高等学校教材

Probability Theory and Mathematical Statistics

概率论与数理统计

（第2版）

主　编　严继高
副主编　程东亚

高等教育出版社

高等学校教材

概率论 统计

（第 2 版）

Probability Theory and Mathematical Statistics

主　编　严继高

副主编　程东亚

高等教育出版社·北京

内容简介

本书的主要内容包括随机事件及其概率，一维随机变量，多维随机变量，大数定律与中心极限定理，数理统计的基本概念，参数估计和假设检验七章。各章节都配有习题。

本书是在多年教学实践的基础上逐步形成并汇编成册的，在不失数学理论严谨性的基础上，浅显易懂地介绍了概率论与数理统计的基本理论和方法，加强培养相关专业学生的随机性思维方式和应用概率统计的能力。本书给出适量典型的、结合相关专业实际内容的例题和习题，对一些重要的概念、定理和部分例题，以注的形式阐明其意义，加深理解，深入浅出，易教易学，全方位地提升学生的综合素质和创新能力。

本书可供高等学校非数学类专业学生作为教材使用，也可供其他财经、工程专业人士进一步学习概率论与数理统计时阅读参考。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 / 严继高主编. --2版. -- 北京：高等教育出版社，2017. 5

ISBN 978-7-04-047134-2

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①严… Ⅲ. ①概率论－高等学校－教材 ②数理统计－高等学校－教材 Ⅳ. ① O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第321370号

Gailülun yu Shuli Tongji

策划编辑 杨 帆　　责任编辑 杨 帆　　封面设计 李小璐　　版式设计 王艳红
插图绘制 尹文军　　责任校对 刘娟娟　　责任印制 刘思涵

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　　刷	山东临沂新华印刷物流集团		http://www.hepmall.com
开　　本	787mm×960mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　　张	16.5	版　　次	2014年2月第1版
字　　数	300千字		2017年5月第2版
购书热线	010-58581118	印　　次	2017年5月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	31.00元

物 料 号 47134-00

序

祝贺严继高先生的《概率论与数理统计》出版，这是一本倾注了他心血的书。严继高先生做事历来严谨细致、一丝不苟，在这本书的写作中延续了他一贯的风格，取材谨慎、字斟句酌、反复推敲，力争做到滴水不漏。

“概率论与数理统计”是一门课程，却又是两门学科的结合体。概率论是一门地地道道的数学学科，有其公理化体系，一切从所假定的条件出发，运用概率论中的定理、定律和其他数学领域中的工具，经过严密的推理和计算得出结论。“每个问题只有一个答案”，这是数学中的一个原则，这也是概率论所接受的规则。数理统计则不尽然，它是一门面向数据的学科，由于数据的不完整和不完全可靠，在做统计推断时，往往对同一个问题会出现不同的结论，这里面有着哲理观念带来的差异，也有受制于统计手段、统计方法的因素，甚至是受制于面对大量数据无从下手而导致的困惑。因此，当前的一种被普遍接受的观点是：统计学是一门独立于数学的一级学科，主导它的更多因素是哲理。也有人说，它是一门处理数据的艺术。

当今世界正在兴起一门学科，叫作“数据科学”(data science)，有人把它称为“21 世纪最敏感的职业”。多数人认为，这个新兴热门领域将会对各行各业产生深刻的影响：从企业到政府，从医疗保健到学术界，不一而足。现实世界中存在着催生现代技术的庞大数据，不管是网络用户的在线行为、癌症患者的组织样本、杂货店顾客的购买习惯还是城市的犯罪统计。数据科学家是大数据 (big data) 时代的魔术师。他们处理数据，利用数学模型分析数据并用文字或图表加以解释，然后给出利用这些信息做出决策的建议。

概率论为数据处理提供理论基础，数理统计教会你一些最基本的统计模型和统计方法，数据中所带有的随机性和不确定性决定了概率论与数理统计在数据科学中的主角地位。这本《概率论与数理统计》的读者大多是在读的大学生，即将在不久的将来进入社会自主择业。今日对这门学科的学习将有可能直接影响你们今后事业的发展前程!

最后，送给 21 世纪的年轻人几句话：数据科学刚刚兴起，数据科学大有可为，数据科学前景广阔，数据科学离不开概率论与数理统计。

苏　淳

2013 年 5 月于中国科学技术大学

第 2 版前言

本书第 2 版是在第 1 版的基础上修订的。在本书第 1 版出版后, 我们经过进一步的教学实践, 积累了不少的经验, 很多任课老师及兄弟院校的同行对本次修订也提出了不少具体意见, 修订时我们都做了认真考虑。在此, 我们对各位同行表示衷心的谢意。

目前, 为更好地适应新形势下人才培养的目标, 很多院系和专业均对教学计划进行了适当调整, 有些专业将原本在第三或第四学期开设的“概率论与数理统计”调整到第二学期, 由此产生的一个直接问题是: 学生的高等数学的基础还没跟上! 特别是多元的重积分没学过! 按照第 1 版《概率论与数理统计》教材的设计, 涉及多元部分的内容就无法介绍。此外, 经过几轮教学过程的体验, 结合任课老师和同学的切实感受, 有些教学的内容在经过适当取舍后反而更易教易学, 综合各方面的因素, 对该教材进行修订就显得刻不容缓。据此, 我们在充分调研, 与多位任课老师及兄弟院校的同行沟通商量的基础上, 计划对教材内容进行修订, 重新设计教材内容的编排, 主要是将相关多元的部分适当往后调整, 但又不增加讲课的重复量, 在某种程度上反而更易于同学对相关知识点的理解, 当然相关例题与习题的选择以及容量均需同时调整。在置信区间和假设检验部分, 拟将双正态总体的相关内容进行微调, 重点对单正态总体进行介绍, 掌握方法后, 在学有余力的基础上再考虑双正态总体就显得很轻松, 不会让同学觉得只是要辛苦地记很多公式。此外, 本版在每章末增加了每章小结及该章总习题, 其中适当补充了一些最近几年典型的考研题, 以增加对前后知识体系的联系理解, 希望这些总习题在检查学习效果及复习方面能发挥作用。

本书的修订再次得到了苏州大学教务处、数学科学学院的领导和各位同仁的支持和帮助。高等教育出版社为本书的修订做了大量的工作。作者谨向他们以及所有关心支持本书的概率统计界朋友表示衷心的感谢。对于新版中存在的问题, 欢迎广大专家、同行和读者继续给予批评指正。

编　者

2017 年 2 月

于苏州大学

第 1 版前言

概率论与数理统计是数学的一个有特色且又十分活跃的分支。一方面, 它有别开生面的研究课题, 有自己独特的概念和方法, 内容丰富, 结果深刻; 另一方面, 它与其他学科又有紧密的联系, 是近代数学的重要组成部分。由于它近年来突飞猛进的发展与广泛的应用, 目前已发展成为一门独立的二级学科。概率论与数理统计的理论与方法已广泛应用于工业、农业、军事和科学技术中, 如预测和滤波应用于空间技术和自动控制, 时间序列分析应用于石油勘测和经济管理, 马尔可夫过程与点过程统计分析应用于地震预测等, 同时它又向基础学科、工科类学科渗透, 与其他学科相结合发展成为边缘学科, 这是概率论与数理统计发展的一个新趋势。

目前, 概率论与数理统计的部分内容已成为高中数学教学中的重要模块, 并且也是高考的重点内容。学生们不但学过古典概型, 还学过几何概型; 不但学过随机变量, 还了解只取有限个值的随机变量的分布律, 以及它们的均值、方差等概念。我们的教学对象已经不是早年间的白纸一张了。新形势带来新任务, 对非数学类专业本科生的概率论与数理统计的教学不能以零作为起点了, 如何写出与形势相适应的教材成为眼下的重要工作。

本书的主要内容包括: 第一章是随机事件及其概率, 主要介绍概率论的最基本的概念, 如样本空间和随机事件等, 并从频率的角度给出概率的公理化定义等初步知识; 第二章介绍现代概率论的主要研究对象: 随机变量, 包括离散型的和连续型的, 一维的和多维的; 第三章是随机变量的数字特征, 包括期望、方差、协方差和相关系数; 第四章是大数定律与中心极限定理, 既回答了频率与概率之间的关系, 又为接下来的数理统计建立理论基础; 第五章介绍了数理统计的基本概念, 如总体和样本, 以及统计量和抽样分布; 第六章和第七章分别介绍了参数估计和假设检验, 让读者了解数理统计是怎样来解决实际问题的。本书的每一小节都配有习题, 有些是正文中相关结论的补充, 还有一些是用来加深理解主要结论的相关典型问题。

本书的写作得到了苏州大学数学科学学院的领导和各位同仁的支持和帮助。本书特别得到了中国科学技术大学苏淳教授的指导和支持, 这使本书增色不少。本书的写作和出版得到了苏州大学文正学院的资助。高等教育出版社为本书的出版做了大量的工作。作者谨向他们以及所有关心支持本书出版工作的概率统

计界朋友表示衷心的感谢。

限于作者水平, 不妥之处在所难免, 恳请同行专家和广大读者不吝赐教。

作　者

2013 年 5 月于苏州大学

目　录

第一章　随机事件及其概率

自然界和人类社会生活中发生的现象多种多样, 主要可归为两类: 一类是**必然现象**, 它在一定条件下必然发生. 例如, 同性电荷必相互排斥, 等等. 另一类是**随机现象**, 这类现象在一定条件下, 可能出现这样的结果, 也可能出现那样的结果, 而且在试验或观察前不能预知确切的结果. 例如, 抛一枚硬币, 可能出现正面, 也可能出现反面; 抛一枚骰子, 可能出现 $1, 2, \cdots, 6$ 点; 110 报警台一天中无法确定会接到多少次报警电话; 等等. 在随机现象中, 有这样的一类, 其试验的结果在个别试验中呈现不确定性, 但在大量重复试验中其结果又具有某种规律性. 例如, 多次重复抛一枚硬币, 得到正面向上的次数与反面向上的次数大致相同, 等等. 这种在大量重复试验或观察中所呈现的固有规律性, 就是我们以后所说的**统计规律性**. 概率论和数理统计就是研究和揭示这种统计规律性的一门专门的学科.

本章主要介绍概率论的一些基本概念, 及随机事件的概率、条件概率及随机事件的独立性等基本知识.

§1.1　随 机 事 件

一、 随机试验

在概率论中, 试验是指对随机现象的观察或实验. 通常将满足下列条件的试验称为**随机试验**.

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行;

(2) 试验的所有可能结果不止一个, 且在试验前能明确其所有可能的结果;

(3) 在试验之前不能确定会出现哪一个结果.

随机试验常用字母 E 表示. 若无特殊声明, 以后所说的试验均指随机试验.

以下是一些随机试验的例子.

E_1: 抛一枚骰子, 观察出现的点数;

E_2: 抛一枚硬币, 观察正反面出现的情况;

E_3: 观察某公交站台的候车人数;

E_4: 在一批灯泡中任取一只, 测试其使用寿命.

二、样本空间与随机事件

定义 1.1.1　将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为试验 E 的**样本空间**, 记作 S. 试验 E 的每一个结果, 即 S 中的元素称为**样本点**, 常用 e 表示.

易知, 上述试验的样本空间分别为:

S_1: $\{1,2,3,4,5,6\}$;

S_2: {正面, 反面};

S_3: $\{0,1,2,3,\cdots\}$;

S_4: $\{t|t \geqslant 0\}$.

可以看到, 样本空间的元素各种各样, 有些能用数字表示, 有些只能用文字叙述; 有些元素的个数只有有限个, 有些元素的个数有无限个, 无限又包含可数无限和不可数无限等.

公交公司在设计发车间隔时间的时候, 会考虑站台候车的人数, 比如, 候车人数不超过 10 人时, 间隔 10 分钟发车; 候车人数在 11 ~ 20 时, 间隔 5 分钟发车; 等等. 这里候车人数不超过 10 人其实是考虑了候车人数属于集合 $\{0,1,\cdots,10\}$, 候车人数在 $11 \sim 20$ 则相当于候车人数属于集合 $\{11,12,\cdots,20\}$. 上述两个集合, 是实际生活中所关注的一些结果, 其本质上是样本空间 S 的子集, 我们给出如下概念.

定义 1.1.2　将试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的**随机事件**, 简称为**事件**, 通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 特别地, 单点集称为**基本事件**.

设 A 为一个事件, 在一次试验中, 若试验的结果属于 A, 则称事件 A 在这次试验中**发生**了.

例 1.1.1　在 E_3 中, 设事件 A_1 表示候车人数不超过 10 人, 即 $A_1 = \{0, 1,\cdots,10\}$. 若在某时刻观察候车的人数为 5 人, 由于 $5 \in A_1$, 因此事件 A_1 在这次试验中发生了. 若在另一时刻观察候车的人数为 8 人, 由 $8 \in A_1$ 知, 事件 A_1 在该次试验中也发生了. 又若某时刻观察候车的人数为 11 人, 则事件 A_1 在这次试验中没有发生. 可以看到, 导致事件 A_1 发生的可能结果不止一个.

注 1.1.1　根据随机事件的定义, 有这样两个特殊的子集: 空集 $\varnothing$ 和样本空间 S. 由于空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点, 故在每次试验中必然不发生, 所以 $\varnothing$ 又称为**不可能事件**; 另一方面, 由于样本空间 S 包含了所有可能的结果, 故在每次试验中 S 必然发生, 所以 S 又称为**必然事件**. 事实上, 必然事件和不可能事件的发生与否, 已经失去了不确定性, 但为了方便起见, 我们还是把它们看作随机事件, 只不过是随机事件的两个极端情形而已.

三、事件间的关系和运算

从随机事件的定义可以看出, 一个样本空间中, 可以有很多的随机事件. 概率论的任务之一, 是研究随机事件发生的可能性的大小, 通过对较简单的事件规律的研究去掌握更复杂事件的规律. 为此, 需要研究事件间的关系和运算, 以及运算所满足的一些规律. 由于事件是样本空间的子集, 因此, 事件间的关系和运算可以按照集合论中集合之间的关系与运算来考虑, 但需注意每个关系和运算的概率意义.

1. 事件的包含

若 "事件 A 发生必然导致事件 B 发生", 则称事件 A **包含于**事件 B, 或称作事件 B **包含**事件 A, 记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

2. 事件的相等

若 "$A \subset B$ 且 $B \subset A$", 则称事件 A 与事件 B **相等**, 记作 $A = B$.

3. 和事件

若 "事件 A 与事件 B 中至少有一个发生", 则称该事件为事件 A 与事件 B 的**和事件**, 记作 $A \cup B$.

4. 积事件

若 "事件 A 与事件 B 同时发生", 则称该事件为事件 A 与事件 B 的**积事件**, 记作 $A \cap B$ 或 AB.

上述和事件与积事件均可推广到任意有限个事件或可数个事件的情况: $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 发生表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生; $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 发生表示 $A_1, A_2, \cdots$ 中至少有一个发生; $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 发生表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生; $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 发生表示 $A_1, A_2, \cdots$ 同时发生.

5. 互不相容事件

若 "事件 A 与事件 B 不能同时发生", 即 $A \cap B = \varnothing$, 则称事件 A 与事件 B **互不相容或互斥**.

显然, 基本事件之间必两两互不相容.

6. 差事件

若 "事件 A 发生而事件 B 不发生", 这样的事件称为事件 A 与事件 B 的**差事件**, 记作 $A - B$.

7. 对立事件 (逆事件)

若 "事件 A 与事件 B 在每一次试验中有且只有一个发生", 则称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**或**逆事件**, 记作 $B = \overline{A}$ 或 $A = \overline{B}$.

注 1.1.2 由逆事件的意义, 事件 $A-B$, 即 "事件 A 发生而事件 B 不发生", 可理解为 "事件 A 发生且事件 $\overline{B}$ 发生", 根据积事件的意义, 后者即为 $A\cap\overline{B}$, 故

$$A-B=A\cap\overline{B}.$$

上述事件的关系和运算可以用图 1–1 的维恩 (Venn) 图表示.

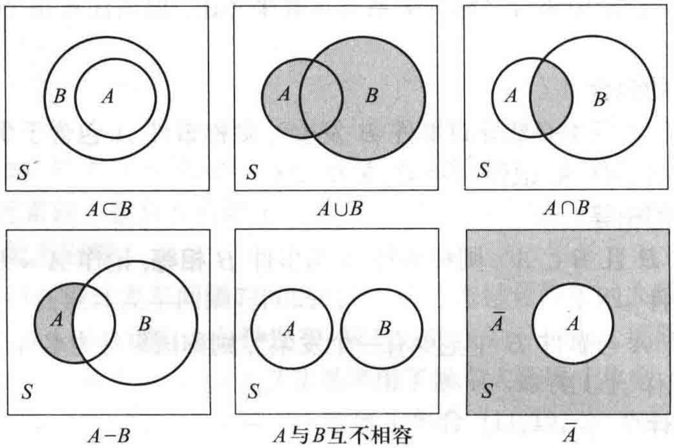

图 1–1 事件的关系和运算的维恩 (Venn) 图

事件的运算满足如下规律:

假设 A,B,C 都是随机事件, 则有

(1) 交换律 $A\cap B=B\cap A$, $A\cup B=B\cup A$;

(2) 结合律 $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$, $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;

(3) 分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$, $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(4) 德摩根 (De Morgan) 定理 (对偶律) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$, $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

注 1.1.3 根据上述规律,

$$A-AB=A\cap(\overline{A\cap B})=A\cap(\overline{A}\cup\overline{B})=(A\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B})=A\cap\overline{B}=A-B.$$

结合注 1.1.2, 则有 $A-B=A-AB=A\overline{B}$.

例 1.1.2 设 A,B,C 为三个事件, 试用 A,B,C 的运算关系式分别表示下列事件:

(1) A,B,C 至少有一个发生;

(2) A,B,C 都不发生;

(3) A,B 发生而 C 不发生;

(4) A,B,C 中恰有一个发生;

(5) A,B,C 中至多只有一个发生;

(6) A,B,C 中至多有两个发生;

(7) A,B,C 中恰有两个发生;

(8) A,B,C 中至少有两个发生.

解 (1) $A\cup B\cup C$; (2) $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$; (3) $AB\overline{C}$; (4) $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$; (5) $\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}$; (6) $\overline{ABC}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$; (7) $AB\overline{C}\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C$; (8) $AB\cup BC\cup AC$.

注 1.1.4 该例中的问题 (5), A,B,C 中至多只有一个发生, 即为 A,B,C 中恰有一个发生或三个都不发生, 故根据 (2),(4) 知, (5) 也可写为

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C.$$

读者可根据事件运算的规律来推导上式等于 $\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}$, 并理解其意义; 可以类似考虑问题 (7) 和 (8).

习 题 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间 S:

(1) 将一枚硬币抛掷三次, 记录其正面出现的次数;

(2) 记录 100 件电子元件中不合格品的个数;

(3) 某人进行射击试验, 记录直到击中目标 5 次为止所进行的射击总次数;

(4) 在数轴上区间 (0, 1) 中随机取一个点, 观察取到的点的坐标.

2. 在商学院的学生中任选一名, 令事件 A 表示 "选出的学生是男生", 事件 B 表示 "选出的学生是大学二年级的学生", 事件 C 表示 "选出的学生是运动员", 试用 A,B,C 的运算关系式分别表示下列事件:

(1) 选出的学生是大学二年级的男生, 但不是运动员;

(2) 选出的学生是大学二年级的女生, 且是运动员;

(3) 选出的男生是大学二年级的运动员.

3. 事件 A,B,C 同题 2, 试回答下列问题:

(1) 叙述在什么条件下 $ABC=C$ 成立?

(2) $C\subset B$ 表示什么意义?

(3) 什么时候 $\overline{A}=B$ 成立?

§1.2　随机事件的概率

在实际生活中, 人们不仅要了解随机事件, 更要掌握随机事件发生的可能性的大小. 比如抛一枚硬币, 出现正面的次数跟出现反面的次数大致相同, 等等, 这些结论, 都是通过不断重复地做试验而得到的. 因此, 为直观起见, 我们先介绍频率的概念和性质, 再根据这些性质给出概率的公理化定义.

一、频率、概率的公理化定义

定义 1.2.1　在相同的条件下, 重复进行了 n 次试验, 在这 n 次试验中, 事件 A 发生的次数记作 n_A, 称为在这 n 次试验中事件 A 发生的**频数**. 称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为在这 n 次试验中事件 A 发生的**频率**, 记作 $f_n(A)$, 即 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$.

由频率的定义, 我们很容易得到频率具有如下性质:

(1) 非负性　即对任何事件 A, 有 $f_n(A)\geqslant 0$;

(2) 规范性　$f_n(S)=1$;

(3) 有限可加性　设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 为 k 个两两互不相容的事件, 即对于任意整数 $i\neq j,\ 1\leqslant i,j\leqslant k,\ A_i\cap A_j=\varnothing$, 有

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

频率反映了事件发生的频繁程度, 即事件发生得越频繁, 其频率就越大, 反之亦然. 在历史上, 曾有很多统计学家做过抛硬币的试验, 部分结果见表 1–1.

表 1–1

试验者	抛硬币次数	出现正面次数	出现正面频率
蒲丰 (Buffon)	4040	2048	0.5069
德摩根 (De Morgan)	4092	2048	0.5005
费勒 (Feller)	10000	4979	0.4979
皮尔逊 (Pearson)	12000	6019	0.5016
皮尔逊 (Pearson)	24000	12012	0.5005
洛马诺夫斯基 (Lomanovskii)	80640	39699	0.4923

由上表可以看出, 当试验的次数越来越多时, 出现正面的频率总在常数 0.5 附近摆动, 且越来越接近于常数 0.5, 这一常数正是反映了 "出现正面" 这一事件发生的可能性大小, 也就是所谓的概率. 据此, 我们给出如下关于概率的公理化定义, 它是在 20 世纪 30 年代由苏联数学家柯尔莫哥洛夫 (Kolmogorov) 创立的.

定义 1.2.2 (概率的公理化定义) 设 E 是随机试验, S 是它的样本空间. 对于 E 的每个事件 A, 给它赋予一个实数, 记为 $P(A)$, 如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件:

(1) 非负性 即对任何事件 A, 有 $P(A) \geqslant 0$;

(2) 规范性 $P(S) = 1$;

(3) 可列可加性 设 $A_1, A_2, \cdots$ 是 E 中一列两两互不相容的随机事件, 即对于任意整数 $i \neq j$, $i, j \geqslant 1$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, 有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 发生的**概率**.

根据上述公理化定义, 可以得到如下概率的一些重要的性质.

二、概率的性质

性质 1 $P(\varnothing) = 0$.

证明 令 $A_1 = S$, $A_i = \varnothing$, $i = 2, 3, \cdots$, 则事件序列 $\{A_n,\ n = 1, 2, \cdots\}$ 两两互不相容, 根据规范性和可列可加性有

$$1 = P(S) = P(S \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots) = P(S) + P(\varnothing) + \cdots + P(\varnothing) + \cdots,$$

又由非负性 $P(\varnothing) \geqslant 0$, 故由上式知 $P(\varnothing) = 0$.

性质 2 (有限可加性) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 E 中 n 个两两互不相容的随机事件, 即对于任意整数 $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, 有 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

证明 令 $A_i = \varnothing$, $i = n+1, n+2, \cdots$, 则事件序列 $\{A_i,\ i = 1, 2, \cdots\}$ 两两互不相容, 根据可列可加性及性质 1, 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(\varnothing) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

性质 3 设事件 A, B 满足 $A \subset B$, 则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A),$$

特别地,

$$P(A) \leqslant P(B). \qquad \text{(称作概率的单调性)}$$