吉林财经大学出版资助图书

非线性微分方程积分边值问题的研究

宋文晶　郭　斌　著

科学出版社

非线性微分方程积分边值问题的研究

宋文晶　郭　斌　著

吉林财经大学出版资助图书

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书主要介绍起源于血管疾病(动脉粥样硬化、动脉瘤)、地下水流、种群动态、等离子物理、计算流体动力学(Computational Fluid Dynamics)等常微分方程积分边值问题相关结果. 在简要介绍有关非线性泛函分析中一些基本理论的基础上，对带 p-Laplace 算子、二阶常微分方程组、四阶常微分方程（组）的积分初(边)值问题，给出了可解性及正解的存在性、多解性的判别依据，展示了常微分方程积分边值问题的研究技巧和方法.

本书适用于数学专业高年级本科生，非线性泛函、微分方程方向的研究生及有研究兴趣的学者阅读参考.

图书在版编目（CIP）数据

非线性微分方程积分边值问题的研究/宋文晶，郭斌著. —北京：科学出版社，2017.6

ISBN 978-7-03-052991-6

Ⅰ.①非… Ⅱ. ①宋… ②郭… Ⅲ. ①非线性方程-微分方程-边值问题-研究 Ⅳ. ①O175.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 116333 号

责任编辑：张中兴 梁 清 / 责任校对：张凤琴
责任印制：张 伟 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京东华虎彩印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 6 月第 一 版 开本：720×1000 B5
2017 年 6 月第一次印刷 印张：8 1/4
字数：185 000

定价：45.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

常微分方程是一门历史悠久的学科, 在物理、化工、医学、天文、生物工程、经济学等各个领域解决了很多实际问题. 其中边值问题是常微分方程理论的一个分支, 它分为局部边值问题和非局部边值问题, 由于非局部边值问题能够更加准确地描述许多重要的物理现象, 所以数学工作者们对它做了很多研究. 近些年来, 起源于热传导、地下水流、热电弹性、等离子物理等方面的常微分方程积分边值问题也受到人们的关注, 并得到了许多优秀成果. 受他们的启发, 我们也在常微分方程积分边值问题方面做了一些工作.

本书主要研究常微分方程积分边值问题, 全书共分 5 章.

第 1 章首先介绍常微分方程的发展及与本书相关的一些问题的研究现状, 然后介绍与本书相关的一些基本概念及定理, 最后简要介绍本书的研究问题及重要结果.

第 2 章研究的是具 p-Laplace 算子的常微分方程的积分初 (边) 值问题, 主要采用二择一定理及拓扑度理论得到问题解的存在性.

第 3 章研究的是具积分边值条件的二阶常微分方程组问题, 利用不动点定理得到了问题解的存在性及多解性.

第 4 章研究的是具积分边值条件的四阶常微分方程及方程组问题, 分别运用上下解方法和不动点定理得到其问题解的存在性及多解性.

第 5 章首先介绍时标基本理论, 然后研究了具 p-Laplace 型算子时标上的动力方程解的存在性.

本书由宋文晶和郭斌合作完成, 其中第 1—4 章及 5.2 节 (合计字数为 125 千字) 由宋文晶撰写, 每章的小结、展望与后续工作及 5.1 节由郭斌撰写. 书中大多数内容已发表于国内外学术刊物.

本书是在国家自然科学基金项目 (项目编号: 11601181)、吉林省教育厅“十二五”科学技术研究项目 (项目编号: 2014164)、吉林财经大学 2016 年专著出版资助计划的资助和支持下完成的.

最后, 特别感谢我的导师高文杰教授在本书撰写过程中给予的帮助和指导!

由于作者水平有限, 书中难免有考虑不周和错漏之处, 敬请各位读者批评指正.

作　者
2016 年 11 月

目录

第1章　引　　言

本章首先简要介绍常微分方程的发展及研究的现状, 然后介绍常微分方程及非线性分析的一些基本理论, 最后简述本书的研究问题及得到的重要结果.

1.1　常微分方程的发展与研究现状

1.1.1　常微分方程的发展

常微分方程这门学科拥有悠久的历史, 其发展可追溯到 17 世纪初期. 早在 1614 年, 苏格兰数学家纳皮尔创立对数的过程中就蕴涵了微分方程的思想. 随后, 人们成功地运用常微分方程解决了五大公开挑战问题，即“等时问题”“悬链线问题”“双曲线积分问题”“最速降线问题”“正交轨线问题”. 使常微分方程的研究备受学术界的关注, 同时也充分表明常微分方程在实际应用中的巨大作用. 随着社会生产力的发展, 常微分方程的应用范围不断扩大, 已深入到物理、化工、医学、经济学等各个领域. 正是这广泛而深刻的实际背景, 使它至今保持着进一步发展的活力.

常微分方程研究初期, 人们致力于寻求它的各种初等解法. 莱布尼茨利用分离变量法解决了一阶线性非齐次方程, 欧拉通过引入新变量的方法求解了二阶方程, 里卡蒂运用“降阶法”解决了不依赖于自变量的二阶方程. 此外, 牛顿、伯努利兄弟、克莱洛等数学家也都为常微分方程初等解法的研究作出了卓越贡献. 直到 1841 年, 刘维尔证明了里卡蒂方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y^2+q(x)y+r(x)$ 的解不能用初等函数的积分表示出来, 才使人们从求通解的热潮转向常微分方程定解问题的研究. 数学家柯西、利普希茨、佩亚诺、毕卡、福克斯等在解的存在性、唯一性、延展性、整体存在性、奇解等方面的工作, 推动了常微分方程定性理论的形成与发展.

边值问题是微分方程理论的一个重要分支, 它广泛应用于气体动力学、流体力

学、经济学、天文学、非线性光学等领域. 该问题最初是通过运用“分离变量法”求解二阶线性数学物理方程时提出的. Liouville 和 Sturm 于 1836 年开始从事边值问题的研究工作, 共同研究了一般的二阶线性微分方程特征值性质、特征函数的性态和任意函数都可用特征函数进行级数展开的性质等, 并形成了 Sturm-Liouville 理论. 20 世纪初 Hilbert 和 Bocher 作出的一系列工作, 为常微分方程边值问题的研究奠定了理论基础. 随后兴起的非线性分析理论为常微分方程定解问题的研究提供有力工具, 从而推动了常微分方程边值问题研究的迅猛发展.

近几十年来, 国内外许多学者如 R. P. Agarwal、D. O'Regan、葛渭高、马如云等相继出版了关于常微分方程边值问题的专著 [1]—[6] 和论文 [7]—[20], 系统地总结了非线性泛函分析在常微分方程边值问题中的应用, 以及非线性常微分方程边值问题的研究方法与成果. 随着常微分方程应用领域的推广与研究工作的深入, 数学工作者们开始研究更为广泛的边值条件, 如多点边值条件 [8,9,12,13,21—31]、积分边值条件 [11,32—42,62] 等, 以及更具一般性的方程, 如高阶常微分方程 [10,43—50]、具 p-Laplace 算子的常微分方程 [7,51—61] 等.

1.1.2 相关问题研究现状

具 p-Laplace 算子的常微分方程一直是数学工作者们关注和研究的热点之一.

吕海琛和钟承奎 [51] 考虑了如下问题:

$$(\phi_p(y'))' + f(t,y) = 0, \quad t \in (0,1),$$

$$y(0) = y(1) = 0,$$

其中 $\phi_p(s) = |s|^{p-2}s$, $p > 1$. 在非线性项 $f(t,y)$ 不具有单调性的情况下, 作者借助锥上的不动点定理得到了该问题解的存在性.

白占兵和葛渭高 [7] 运用文献 [63] 中建立的继 Leggett-Williams 多重不动点定理、Avery 不动点定理和 Avery-Peterson 不动点定理 [5] 之后的一个新的多重不动点定理, 研究了一维奇异 p-Laplace 问题

$$(\phi_p(x'(t)))' + q(t)f(t,x(t),x'(t)) = 0, \quad 0 < t < 1,$$

$$x(0) = x(1) = 0,$$

或

$$x(0) = x'(1) = 0$$

三个正解及 $2n-1$ 个正解的存在性.

D. X. Ma, J. X. Han 和 X. G. Chen[21] 研究了当非线性项 $f(t,u)$ 可能在 $u=0$ 处有奇性的三点边值问题

$$(\phi_p(u'))' + q(t)f(t,u) = 0, \quad 0 < t < 1,$$
$$u(0) - g(u'(0)) = 0, \quad u(1) - \beta u(\eta) = 0,$$

或

$$u(0) - \alpha u(\eta) = 0, \quad u(1) - g(u'(1)) = 0.$$

作者通过对边界条件正则化以及对正则化问题的解作先验估计, 获得了所讨论问题解的存在性.

封汉颍和葛渭高 [22] 运用 Avery-Peterson 不动点定理, 得出边值问题

$$(\phi_p(u'(t)))' + q(t)f(t,u(t),u'(t)) = 0, \quad 0 < t < 1,$$
$$u(0) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u'(\xi_i) = 0,$$
$$u(1) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u'(\eta_i) = 0$$

至少三个对称正解的存在性. 关于具 p-Laplace 算子的两点、三点及多点边值问题, 已有了广泛的研究 [8,9,23–27,32,52–58,64–67].

二阶常微分方程是常微分方程理论中最具代表性的方程, 也有很好的应用背景, 并取得了丰硕的结果 [20,29,59,68–76].

姚庆六 [68] 考虑了如下二阶常微分方程的两点边值问题:

$$\begin{cases} u''(t) = \lambda q(t)f(t,u(t),u'(t)), \quad 0 < t < 1, \\ \alpha u(0) - \beta u'(0) = d, \\ u(1) = 0, \end{cases}$$

其中 $f(t,u,v)$ 在 $t=0$, $t=1$ 和 $u=0$ 处奇异. 作者改进了多数研究中要求非线性项 $q(t)f(t,u,v)$ 的非正性, 允许在 $[0,1]\times[0,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$ 的适当子集上非负, 并且将 $q(t)$ 连续减弱为可积, 利用 Leray-Schauder 不动点定理得到了该问题正解的存在性.

孙永平 [28] 运用锥上的拉伸与压缩不动点定理, 得到了如下二阶三点边值问题:

$$\begin{cases} u''(t)+a(t)f(t,u(t))=0, \quad 0<t<1, \\ u(t)=u(1-t), \\ u'(0)-u'(1)=u\left(\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

至少存在两个对称正解. 这里 $a:(0,1)\longrightarrow[0,\infty)$ 在 $(0,1)$ 上对称, 且在 $t=0$, $t=1$ 处可能奇异; $f:[0,1]\times[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ 连续, 对任意 $u\in[0,\infty)$, $f(\cdot,u)$ 在 $(0,1)$ 上对称.

B. Ahmad, A. Alsaedi, B. S. Alghamdi[33] 研究了如下的二阶积分边值条件的杜芬方程:

$$\begin{cases} u''(t)+\sigma u'(t)+f(t,u)=0, \quad 0<t<1,\ \sigma\in\mathbb{R}-\{0\}, \\ u(0)-\mu_1 u'(0)=\displaystyle\int_0^1 q_1(u(s))\mathrm{d}s, \\ u(1)-\mu_2 u'(1)=\displaystyle\int_0^1 q_2(u(s))\mathrm{d}s, \end{cases}$$

其中 $f:[0,1]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $q_i:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}(i=1,2)$ 连续, μ_i 为非负参数. 作者借助上下解方法得到近似解序列, 单调迭代收敛于该问题的解.

A. Boucherif[62] 运用 Krasnoselskii 不动点定理, 得出二阶积分边值问题

$$\begin{cases} y''(t)=f(t,y(t)), \quad 0<t<1, \\ y(0)-ay'(0)=\displaystyle\int_0^1 g_0(y(s))\mathrm{d}s, \\ y(1)-by'(1)=\displaystyle\int_0^1 g_1(y(s))\mathrm{d}s \end{cases}$$

解的存在性.

Z. L. Yang[34] 应用锥上的不动点指数定理, 得出了非局部边值条件的二阶常微

分方程组

$$
\begin{cases}
-u''=f(t,u,v),\\
-v''=g(t,u,v),\\
u(0)=v(0)=0,\\
u(1)=H_1\left(\int_0^1 u(\tau)\mathrm{d}\alpha(\tau)\right),\\
v(1)=H_2\left(\int_0^1 v(\tau)\mathrm{d}\beta(\tau)\right)
\end{cases}
$$

至少存在两个正解. 关于二阶积分边值问题的更多结果可参考文献 [35]—[38] 及其相关参考文献.

高阶常微分方程在各种边值条件下解的存在性, 近些年研究也比较广泛. 例如, M. R. Grossinho 等 [43] 考虑了如下三阶分离边值问题:

$$
u'''(t)=f(t,u(t),u'(t),u''(t)),
$$

$$
u(a)=A,\quad u''(a)=B,\quad u''(b)=C,
$$

或

$$
u(a)=A,\quad c_1u'(a)-c_2u''(a)=B,\quad c_3u'(b)+c_4u''(b)=C,
$$

其中 $c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbb{R}^+$, $A,B,C\in\mathbb{R}$, $f:[a,b]\times\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ 连续且满足单边 Nagumo 条件. 作者借助上下解方法及 Leray-Schauder 度得到了解的存在性.

F. Minhós, T. Gyulov, A. I. Santos[44] 应用上下解方法和 Leray-Schauder 度得到了非线性项依赖于未知函数各项低阶导数的四阶常微分方程边值问题

$$
u^{(iv)}(t)=f(t,u(t),u'(t),u''(t),u'''(t)),\quad 0<t<1,
$$

$$
u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0
$$

解的存在性, 其中 $f:[0,1]\times\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}$ 连续且满足双边 Nagumo 条件.

H. Y. Feng, D. H. Ji, W. G. Ge[10] 研究了四阶两点边值问题

$$
x''''(t)-f(t,x(t),x'(t),x''(t),x'''(t))=0,\quad 0<t<1,
$$

$$
x(0)=x'(1)=0,\quad ax''(0)-bx'''(0)=0,\quad cx''(1)+dx'''(1)=0.
$$

作者将四阶问题降阶为两个二阶问题, 借助上下解方法得到该问题解的存在性和唯一性.

孙永平 [39] 研究了四阶积分边值问题:

$$
\begin{aligned}
&u''''(t) = g(t)f(t,u(t)), \quad 0<t<1,\\
&u(0)=u(1)=\int_0^1 a(s)u(s)\mathrm{d}s,\\
&u''(0)=u''(1)=\int_0^1 b(s)u''(s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

作者先将四阶问题转化为两个二阶问题, 然后利用锥上拉伸与压缩不动点定理得到了该问题对称正解的存在性和多重性.

王友雨和葛渭高 [11] 借助上下解方法讨论了具类 p-Laplace 算子的积分边值问题

$$
\begin{aligned}
&(\phi(u''))' = f(t,u(t),u'(t),u''(t)), \quad 0<t<1,\\
&u(0)=0,\\
&u'(0)-k_1u''(0)=\int_0^1 h_1(u(s))\mathrm{d}s,\\
&u'(1)+k_2u''(1)=\int_0^1 h_2(u(s))\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

解的存在性. 更多有关高阶常微分方程的结果可见文献 [12],[13],[30],[31],[40]—[42],[45]—[50],[60],[61] 及其相关参考文献.

时标理论产生于生态学模型、热传导模型及经济学模型等, 因其广泛的应用背景, 也备受学者们的关注. 关于时标动力学方程的边值问题、振动性问题、周期性问题的研究可参见文献 [77]—[92].

D. B. Wang[89] 利用 Guo-Krasnoselskii 不动点定理, 得到时标上具 p-Laplace 算子动力方程三点边值问题

$$
\begin{aligned}
&[\Phi_p(u^{\triangle}(t))]^{\nabla} + a(t)f(t,u(t)) = 0, \quad t\in[0,T]_{\mathbb{T}},\\
&u(0)=B_0(u^{\triangle}(\eta))=0, \quad u^{\triangle}(T)=0,\\
&\text{或}\quad u^{\triangle}(0)=0, \quad u(T)+B_1(u^{\triangle}(\eta))=0
\end{aligned}
$$

正解的存在性、多解性、无穷多解性. 这里 $\Phi_p(s)$ 为 p-Laplace 算子, $\eta \in (0, \rho(T))_{\mathbb{T}}$.

H. R. Sun[90] 运用 Avery-Henderson 和 Leggett-Williams 不动点定理证明了多点边值问题

$$\begin{cases} [\Phi_p(u^{\triangle}(t))]^{\nabla} + a(t)f(t, u(t)) = 0, \quad t \in (0, T), \\ u^{\triangle}(0) = 0, \quad u(T) = \sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i u(\xi_i) \end{cases}$$

至少两个正解和至少三个正解的存在性. 其中 $f \in C((0,T) \times [0,\infty), [0,\infty)), a(t) \in C_{ld}((0,T), [0,\infty))$, $0 < \sum\limits_{i=1}^{m-2} a_i < 1$.

Y. K. Li 和 J. Y. Shu[91] 利用 Guo-Krasnoselskii 不动点定理和 Leggett-Williams 不动点定理研究了带时标的一阶非线性脉冲积分边值问题

$$\begin{cases} x^{\triangle}(t) + p(t)x(\sigma(t)) = f(t, x(\sigma(t))), \quad t \in J := [0,T]_{\mathbb{T}} \backslash t_1, t_2, \cdots, t_m, \\ \triangle x(t_i) = x(t_i^+) - x(t_i^-) = I_i(x(t_i)), \quad i = 1, 2, \cdots, m, \\ \alpha x(0) - \beta x(\sigma(T)) = \int_0^{\sigma(T)} g(s)x(s)\triangle s \end{cases}$$

至少存在一个、两个、三个正解.

1.2 预备知识

为了方便读者阅读本书, 将书中所涉及的一些基本理论作简要的回顾.

1.2.1 基本概念

定义 1.2.1[93] 距离空间 X 中的集合 M 称为列紧的, 如果 M 中任何序列都含有一个收敛的子序列. 闭的列紧集称为自列紧的.

定义 1.2.2[93] 距离空间 X 中的集合 M 称为紧的, 如果 M 的任何开覆盖都存在有限的子覆盖. 在距离空间中紧集与自列紧集等价. 如果 M 的闭包是紧的, 则称 M 是相对紧的.

定义 1.2.3[94] 设 X, Y 是线性赋范空间, $T: X \longrightarrow Y$ 是线性算子, 如果 T 将 X 中的有界集映成 Y 中的相对紧集, 则称 T 是全连续线性算子.

定义 1.2.4[93] 设 X 是 Banach 空间, T 是 X 上的有界线性算子, 如果 T 具有

(i) $R(T)$ 是闭的,

(ii) $\dim N(T) < \infty$ 且 $\dim N(T') < \infty$,

则称 T 是 Fredholm 算子.

定义 1.2.5[93] 设 $\mathcal{F}$ 是一族从 $\langle X, d\rangle$ 到 $\langle Y, \rho\rangle$ 的函数. 如果对任给 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使得对一切 $f \in \mathcal{F}$, 都有

$$\rho(f(x), f(x')) < \varepsilon, \text{当} d(x, x') < \delta,$$

则称 $\mathcal{F}$ 是等度连续的.

定义 1.2.6[95] 设 E 是实 Banach 空间, 如果 P 是 E 中某非空凸闭集, 并且满足下面两个条件:

(i) $x \in P, \lambda \geqslant 0 \Rightarrow \lambda x \in P$;

(ii) $x \in P, -x \in P \Rightarrow x = \theta$, θ 表示为 E 中的零元素,

则称 P 是一个锥.

1.2.2 基本定理

定理 1.2.1 (二择一定理 [96]) 设 X 是一个 Banach 空间, A 是 X 到 X 的全连续算子, 则对任意 $\lambda \neq 0$, 仅有下面两者之一成立:

(i) 对于任意 $y \in X$, 方程 $(A - \lambda I)x = y$ 存在唯一解 $x \in X$;

(ii) 方程 $(A - \lambda I)x = 0$ 存在一个非平凡解 $x \in X$, $x \neq 0$.

定理 1.2.2 (Arzelà-Ascoli 定理 [93]) $F \subset C([a, b])$ 是列紧集当且仅当 F 是一致有界且等度连续的函数族.

定理 1.2.3 (同伦不变性 [95]) 设 $H : [0, 1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow E$ 全连续, 令 $h_t(x) = x - H(t, x)$. 若 $p \notin h_t(\partial\Omega), \forall\, 0 \leqslant t \leqslant 1$, 则对任意 $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\deg(h_t, \Omega, p)$ 保持不变.

定理 1.2.4 (Kronecker 存在定理 [95]) 若 $\deg(f, \Omega, p) \neq 0$, 则方程 $f(x) = p$ 在 Ω 内必有解.

定理 1.2.5 (Krasnoselskii 不动点定理 [97]) 设 E 为 Banach 空间, $K \subset E$ 是锥, Ω_1, Ω_2 是 E 上两个有界开集, 且 $\theta \in \Omega_1$, $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$. 若算子 $T: K\cap(\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1) \longrightarrow K$ 为全连续算子, 满足:

(A_1) $\| Tx \| \leqslant \| x \|$, $\forall x \in K \cap \partial\Omega_1$; $\| Tx \| \geqslant \| x \|$, $\forall x \in K \cap \partial\Omega_2$, 或

(A_2) $\| Tx \| \geqslant \| x \|$, $\forall x \in K \cap \partial\Omega_1$; $\| Tx \| \leqslant \| x \|$, $\forall x \in K \cap \partial\Omega_2$,

则 T 在 $K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$ 上至少有一个不动点.

1.3 本书内容简述

据我们所知, 人们对起源于热传导、地下水流、热电弹性、等离子物理等的常微分方程积分边值问题的研究工作相对比较少, 主要是由于积分条件在论证过程中产生了一些障碍, 增大了解决问题的难度. 本书针对常微分方程积分初 (边) 值的问题, 利用 Leray-Schauder 度、锥上的不动点定理及上下解方法, 研究了非线性常微分方程 (组) 的可解性、正解的存在性和多解性. 本书主体部分共四章, 主要内容如下:

在第 2 章中, 我们研究了具积分初 (边) 值条件的 p-Laplace 型常微分方程的可解性. 所讨论的问题为

$$\begin{cases} (\phi_p(u'))' = -f(t,u), \quad t \in (0,1), \\ u(0) = \displaystyle\int_0^1 g(s)u(s)\mathrm{d}s, \\ u'(0) = A, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $f:[0,1]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 连续, $g(s) \in L^1([0,1])$, 以及

$$\begin{cases} (\phi_p(u'))' = -q(t)f(t,u,u'), \quad t \in (0,1), \\ u(1) = \displaystyle\int_0^1 g(s)u(s)\mathrm{d}s, \\ u'(0) = A, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $f:[0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 连续, $g(s) \in L^1([0,1])$, $q(t) \in L^1([0,1])$.

具 p-Laplace 算子常微分方程的边值问题产生于非牛顿流体理论和多孔介质中气体的湍流理论, 并广泛地应用在非牛顿流体力学、燃烧理论、血浆问题、种群生

态学等领域. 由于其应用范围的广泛, 这类问题一直备受数学工作者们的偏爱. 虽然具 p-Laplace 算子的常微分方程边值问题的研究成果已很丰硕, 但关于具 p-Laplace 算子的常微分方程积分初 (边) 值问题的结果并不多见. 因此, 我们将 p-Laplace 算子与积分条件结合起来, 研究了一个具 p-Laplace 算子的积分初值问题和一个具 p-Laplace 算子的积分边值问题. 加权函数的引入对带有 p-Laplace 算子的常微分方程边值问题的研究增加了一些困难. 经典研究带 p-Laplace 算子的常微分方程边值问题的方法不能直接地推广到我们所研究的问题上，我们通过结合二择一定理和拓扑度理论, 成功地克服了加权函数对解的存在性的影响. 这一部分的工作既有实际应用价值, 又在一定程度上丰富了常微分方程积分边值问题的研究. 我们所得到的主要结果如下.

定理 1.3.1 假设

(H_1) $\displaystyle\int_0^1 |g(s)|\mathrm{d}s = M < 1$;

(H_2) $|f(t,x)| \leqslant c_1\phi_p(|x|) + c_2,\ c_1, c_2 > 0$, 且 $c_1 < \phi_p\left(\dfrac{1-M}{2^{q-1}}\right)$ 成立,

则问题 (1.1) 至少存在一个解.

定理 1.3.2 假设

(H_3) $\displaystyle\int_0^1 |g(s)|\mathrm{d}s = M < 1$;

(H_4) $\displaystyle\int_0^1 |q(t)|\mathrm{d}t \leqslant M_1 < \infty$;

(H_5) $|f(s,x,y)| \leqslant c_1\phi_p(|x|+|y|) + c_2,\ c_1, c_2 > 0$, 且 $c_1 < \dfrac{\phi_p\left(\dfrac{1-M}{2^q}\right)}{M_1}$ 成立, 则问题 (1.2) 至少存在一个解.

在第 3 章中, 我们研究了两类具积分边值条件的二阶常微分方程组正解的存在性和多解性. 所讨论的方程组为

$$\begin{cases} x''(t) = -f(t,x(t),y(t)), & (t,x,y) \in (0,1)\times[0,+\infty)\times[0,+\infty), \\ y''(t) = -g(t,x(t),y(t)), & (t,x,y) \in (0,1)\times[0,+\infty)\times[0,+\infty), \\ x(0) - ax'(0) = \displaystyle\int_0^1 \varphi_0(s)x(s)\mathrm{d}s, & x(1) + bx'(1) = \displaystyle\int_0^1 \varphi_1(s)x(s)\mathrm{d}s, \\ y(0) - ay'(0) = \displaystyle\int_0^1 \psi_0(s)y(s)\mathrm{d}s, & y(1) + by'(1) = \displaystyle\int_0^1 \psi_1(s)y(s)\mathrm{d}s \end{cases} \tag{1.3}$$

及

$$\begin{cases} x''(t) = -f(t, x(t), y(t)), & (t, x, y) \in (0,1) \times [0, +\infty) \times [0, +\infty), \\ y''(t) = -g(t, x(t), y(t)), & (t, x, y) \in (0,1) \times [0, +\infty) \times [0, +\infty), \\ x(0) - ax'(0) = \int_0^1 \varphi_0(s) y(s) \mathrm{d}s, \quad x(1) + bx'(1) = \int_0^1 \varphi_1(s) y(s) \mathrm{d}s, \\ y(0) - ay'(0) = \int_0^1 \psi_0(s) x(s) \mathrm{d}s, \quad y(1) + by'(1) = \int_0^1 \psi_1(s) x(s) \mathrm{d}s, \end{cases} \tag{1.4}$$

其中 $f, g \in C([0,1] \times [0, +\infty) \times [0, +\infty), [0, +\infty))$, $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1 \in C([0,1], [0, +\infty))$, a, b 都是正的参数.

这一章的工作主要受文献 [62] 的启发, 将其所论的单方程转化为方程组, 并进一步研究了边值条件耦合的方程组. 除讨论了方程组正解的存在性外, 我们还研究了其多解性. 由于是积分边值条件，在给出方程组的等价积分方程组形式时有一定的困难. 我们将算子谱理论与不动点定理相结合攻克了这一难点. 方程组尤其是边值条件耦合的情况要比单方程复杂得多, 所以我们作了细致的计算验证工作. 这一部分的研究工作是文献 [62] 所论问题的一个推广.

我们得到主要结果为

假设

(A_0) $f, g \in C([0,1] \times [0, +\infty) \times [0, +\infty), [0, +\infty))$, φ_i, $\psi_i \in C([0,1], [0, +\infty)), i = 1, 2$, a, b 都是正的实参数.

(A_1) 定义函数

$$\Phi(t, s) = \frac{1}{1+a+b}[(1+b-t)\varphi_0(s) + (a+t)\varphi_1(s)], \qquad t, s \in [0,1],$$

$$\Psi(t, s) = \frac{1}{1+a+b}[(1+b-t)\psi_0(s) + (a+t)\psi_1(s)], \qquad t, s \in [0,1],$$

且满足

$$0 \leqslant m_\Phi \triangleq \min\{\Phi(t,s) : t, s \in [0,1]\} \leqslant M_\Phi \triangleq \max\{\Phi(t,s) : t, s \in [0,1]\} < 1,$$

$$0 \leqslant m_\Psi \triangleq \min\{\Psi(t,s) : t, s \in [0,1]\} \leqslant M_\Psi \triangleq \max\{\Psi(t,s) : t, s \in [0,1]\} < 1.$$