电路的矩阵分析

上海机械学院
仪表系电工教研室

一九七八年八月

绪　论

在现代科学技术中，电子计祘机已经成为分析和设计的不可缺少的工具。

为了在电路分析和设计中利用计祘机，电路中的基本定律和由这些定律推导出来的计祘方法，必须采用恰当的数学模型，以便在计祘机上实行有效的运祘。这里重要的是采用矩阵代数和柘扑学的成果。

矩阵应用于电路分析已有很久的历史，远在一九二九年，德国学者F·施特列凯和R·菲尔德凯勒首先将矩阵分析用于计祘四端网络。后来，又经过许多人的补充和提炼，使矩阵分析成为电路分析和计祘中一个重要而极有生命力的方法。

电路矩阵分析有什么优点呢？

在计祘机成为分析和计祘的工具之后，电路矩阵分析的优点才充分发挥出来。

我们知辺，电路理论的普遍忈义在于，真实的电气装置，可以用由电阻、电容、电忈和电源组成的等效网络来模拟；它的工作特性，在一定的条件下，可以用一组服从于电路基本定律的线性方程组来描绘。应用矩阵代数以严密的形式运祘这组线性方程就使我们有可能把实际的电气装置的各个组成部分作为一个整体来研究，而不是一级一级地分析。这一优点对于那些包含有晶体管一类双向器件的反馈系统特别重要。在这种网络中，输出电路的任何变化，都会立刻反射到输入电路，一级一级的分析至多只能给出近似的估祘。这样，实际网络的分析与设计不得不借助于“试验板”通过反复的调试来满足既定的要求，往往浪费很多时间。但是，在数字计祘机应用于电路分析与设计之前，若对电路矩阵分析采用手祘法，其计祘工作量相当浩繁，有时甚至难以完成，因而在规模上还是受到很

大限制。实际上，复杂电路的分析与设计还是分块进行的。所以，在传统的电路分析中，始终把网络的化简与分块摆在重要的位置。

随着网络分析与设计的不断需要，电路矩阵分析同计秝机相结合，使越来越复杂的组件的设计，可以由计秝机寻找最佳方案，从而省去在“试验板”上浪费的时间。

在从传统的分析方法向矩阵分析过渡时，需要应用拓扑学的某些基本知识。然而，在电路矩阵分析中应用的拓扑知识比较简单。因为，在我们有了把实际电气装置变成等效电路的概念之后，只需要在等效电路中定义拓扑节点，拓扑支路，抽去每条支路的物理内容而不顾，就得到了同等效电路相对应的拓扑图。拓扑线图理论，简称图论，它能帮助我们理解电子网络的一些基本性质，处理节点、支路和独立回路的问题，在由计秝机形成和解网络方程方百是一个有趣的工具。本篇仅以含独立电源的直流线性网络（正弦交流网络的稳态分析仅作为练习留给学生）为例，讨论电路的矩阵分析，打秝作为计秝机辅助电路设计的入门。

关于矩阵代数的必要知识作为附录并列在本篇的后百，以供查阅。

本篇采用的符号

支路电流　i

网孔电流　j

回路电流　j　i_s

支路电流源　

支路电流向量　I_b

网孔电流向量　J_m

回路电流向量　J_l

支路电流源向量　$\mathcal{J}_s$

节点电压　v

支路电压　u

树支电压　e

v_s

支路电压源　

节点电压向量　V_n

支路电压向量　U_b

树支电压向量　e_t

支路电压源向量　V_s

支路对角线阻抗　Z

支路对角线导纳　y

网孔—网络阻抗　Z_m

回路—网络阻抗　Z_l

节点—网络导纳　Y_n

割集—网络导纳　Y_c

网络电流源向量　I_s

网孔—网络电压源向量	e_m
回路—网络电压源向量	e_l
网络	N
图	G
子图	g
树	T
节点	n
支路	b
网孔	m
回路	l
基尔霍夫电流定律	KCL
基尔霍夫电压定律	KVL
支路伏—安特性方程	V-A
节点关联矩阵	A
回路关联(连集)矩阵	B
割集关联矩阵	C
网孔关联矩阵	M

目　录

主要参考著作

1. Circuit Theory: A Computational Approach
stepen W. sireeter
University of Florida 1975.
2. Basic Circuit Theory
C.A.Desoer anel E.S.Kuh 1969.
3. 半导体电路旡理
旡著者(美) R.F.Shea 1954.
译 者 何治拨 朱邦俊
4. 电工基础
邱关源 等编写 1965.

第一章　网络拓扑

大家知道，作为设计和分析的依据，任何一个实际的电系统，在一定的条件下，都可以用相应的等效网络来模拟。当网络的工作频率不太高时，网络中的各个元件可以用集中元件的等效参数电阻R、电容C、电忎L、互忎M以及独立电源、受控电源（或相关电源）来表示。

任何一个由描绘实际电工装置电磁特性的集中参数R、C、L(M)以及电源构成的等效网络，不论其电路过程怎样复杂，描述这个网络电磁特性的数学方程，一定服从两条客观规律——

基尔霍夫电流定律，在以下的叙述中，简称KCL(Kirchhoff's current law)方程；基尔霍夫电压定律，在以下的叙述中简称KVL(Kilhoff's. Votage law)方程。

在简单电路（电路同网络的忎义是一样的，只是比较简单而已）中，基尔霍夫两条定律的陈述分别是：

KCL—在电路中，通过任何节点的电流的代数和恒等于零。

KVL—在电路中，任何一闭合回路上，各段电压降的代数和恒等于零。

实验还表明，基尔霍夫定律完全不取决于电路中元件的自然性质，而仅同电路的结构有关。基尔霍夫定律的这个性质给人们一个重要的启示：即在研究复杂网络时，我们完全可以不去过问组成网络的各条支路中所接元件是什么而用一条支路或一条线段来代替实际元件。经过这样的科学抽象以后，我们就可以借助数学的一个分支—拓扑学中的线图理论—简称图论—来研究网络的结构，处理网络中节点、支路和独立回路的电压、电流的关系问题，以便深入地

理解网络的一般性质。

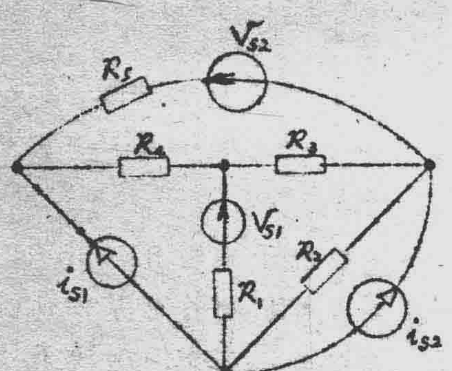
因此，本章我们简单地介绍网络拓扑（线图理论或图论）的基本概念和原理，以便在下一章中用图论的基本概念来建立KCL和KVL方程，从这些方程中引出描述网络拓扑性质的基本矩阵，并根据KCL和KVL的一般形式推导特勒根定理，这是应用抽象图论的一个 妙的例子，它使我们能够极容易地证明某些很有用的网络性质。

§1-1．网络拓扑的基本概念

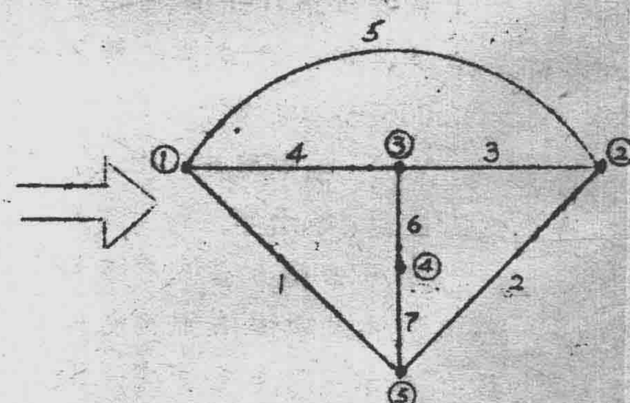
1．网络和它的拓扑图

网络拓扑是通过网络的几何结构来研究网络基本性质的。因此，它只注意网络的联结方式，而不顾它的内容。这样，我们索性就用线段来代替网络中的元件（有源的或无源的），并在元件的联结点处标以黑点，这就构成了同网络N相对应的拓扑图G，如图1-1所示，简称图G。

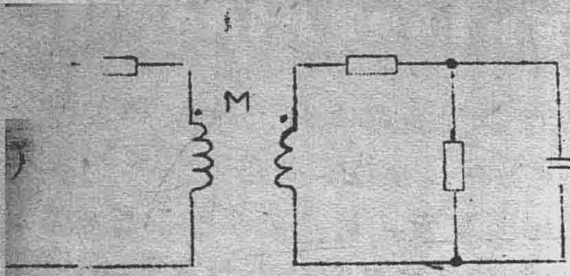
如果图 g 是图G的一部分，我们就称 g 是G的子图。



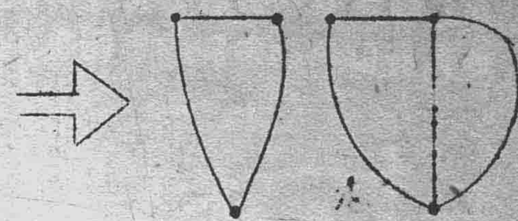
a．网络N，



b．拓扑图G，



c. 网络 N_2



d. 拓扑图 G_2

图 1-1　网络和它的拓扑图

2. 拓扑支路和拓扑节点

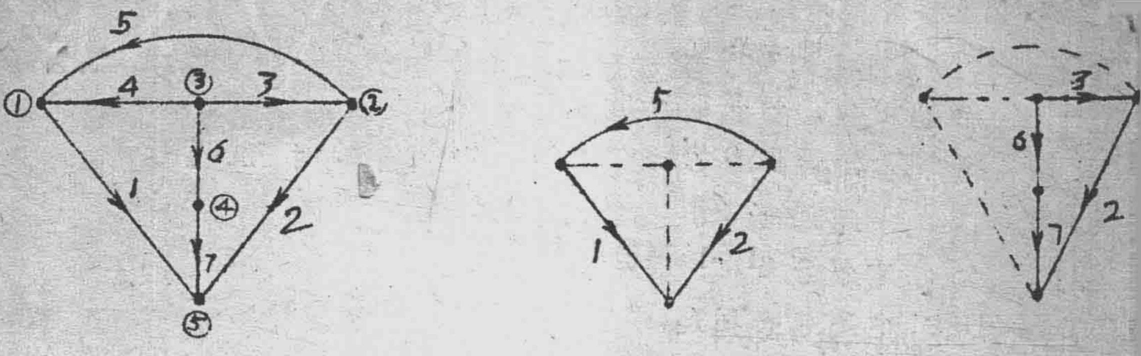
我们把拓扑图中代表元件（有源的和无源的）的线段称为拓扑支路；每两条或两条以上拓扑支路的联结点称为拓扑节点。这里简单提一下，对于一个给定的网络，从拓扑的观点看，每个元件（有源的和无源的）都可以用一条线段表示，当作一条支路来处理，如图1-1*b*中，支路1，6，3，4，7分别代电流源 i_{s1}，电压源 v_{s1}和电阻 R_3，R_4，R_1。但是，实际上，在把电压作为独立变易的节点和割集分析中，不能把理想电压源作为独立支路，而必须同图1-1*b*中支路5那样，它代表 R_5 和 v_{s2} 的串联；在把电流作为独立变易的网孔和回路分析中，理想电流源不能作为独立支路，而必须同图1-1*b*中支路2那样，它代表 R_2 和 i_{s2} 並联。从此可见，拓扑支路的选择比较灵活，不象网络中那样，通过同一个电流的所有元件构成一条支路。由于这个原因，网络中的节点必须是三条或三条以上支路的联结点。在本篇的讨论中，如不加说明，所说的节点和支路都是指拓扑节点和拓扑支路。

如果在拓扑图中从任何一点都可沿着支路连续地通到另一节点，则图形是连通的，称为连通图，如图1-1*b*所示；反之，则称为不连通图，如图1-1*d*所示。在以下各章中，我们仅就连通图进行讨论。

3. 定向图和回路

在拓扑图中，对每个节点和支路编号，并任意假定支路参考方

向，这样得到的图称为定向图。图 1-2 为同图 1-1 所示网络对应的定向图和某些回路和网孔。



a. 定向图　　　*b*. 回路{152}　　　*c*. 网孔{2367}

图 1-2　有向图和它的网孔

这里应特别注意，拓扑图中，支路参考方向和编号有三个意义：

i. 它代表网络中对应支路（元件）中电流的参考方向；

ii. 它代表网络中对应支路（元件）上电压降的参考方向；

iii. 支路编号同支路电流和电压的下标一致。

根据上图假定的参考方向，对照图 1-1，*a*，我们看到

$i_1 = -i_{s1}$;　$u_6 = -v_s$;　…等等。

在定向图中，我们还要引进支路同节点相关的概念。例如，在图 1-2*a* 中，我们称支路 1 同节点①和⑤相关，且进入节点⑤，离开节点①；支路 5 同节点①和②相关，且进入节点①，离开节点②…等等；而支路 1 同节点②和③无关。

假定图 G 的一个子图 g_1 是连通的，而且同每个节点相关联的仅只有两条支路，那么，我们就称子图 g_1 是图 G 的一个回路，如图 1-2*b* 实线所示，由一组支路{152}构成，显然，每个图具有很多可任意选择的回路。如果一个回路内部没有支路分割为两部分，那么，这样最简单的回路又称为网孔，如图 1-2*c* 实线所示。由一组支路{2367}构成，显然，每个图的网孔是唯一确定的，不能任

意选择，它是回路的特例。换句话说，网孔一定是回路，但回路不一定是网孔。在立KVL方程时，每个图的网孔数规定了可供选择的独立回路数。

4 树、树支和联支

在图论中，树是非常重要的概念。

设T是连通图G的一个子图，如果

i. T是连通子图，

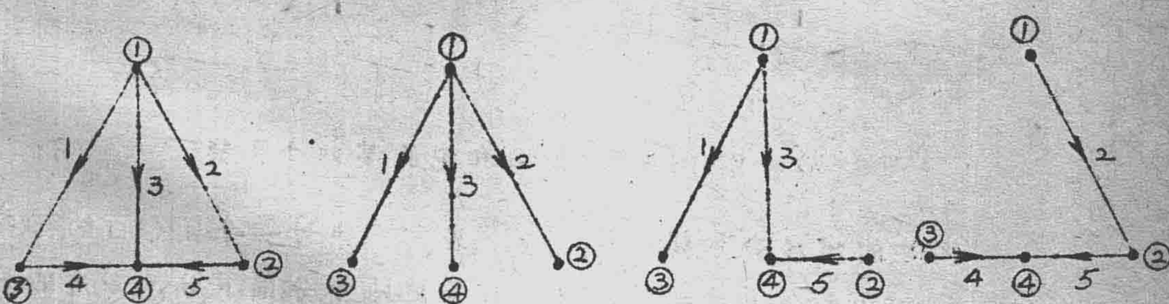
ii. 它包含G的所有节点，

iii. 它不包含回路。

那么，我们就称T是G的一个树。

树一经选定，图中所有的支路就分为两类，构成树的支路，称为树支；不属于树的支路，称为联支。

图1-3表明了连通图G和它的几个可能的树。



a. 图G　　b. 树T_1　　c. 树T_2　　d. 树T_3

图1-3　图G和它的某些树

从图可见，在树T_1中，树支是1，2，3；联支是4，5.在树T_2中，树支是1，3，5；联支是2，4。在树T_3中，树支是2，4，5；联支是1，3。……等等。在一个给定的拓扑图中，树支和联支取决于树的选择。一个任意的图有多少树，没有一般的公式。但是，在每对节点之间仅有而且必须有一条支路的连通图中，设拓扑节点$n_t=n+1$，则树数$T=n_t^{n_t-2}=(n+1)^{n-1}$。

5. 割集

在图论中，割集也是一个很重要的概念。

如果用任一闭合百把连通图G分割为两个卩分，使某些节点在闭合百内卩，而另外一些节点在它的外卩。这样，把穿过闭合百的支路全卩移去，连通图G就变成两个分离卩分，我们把这些移去的一组支路称为连通图G的割集，如图1-4所示。

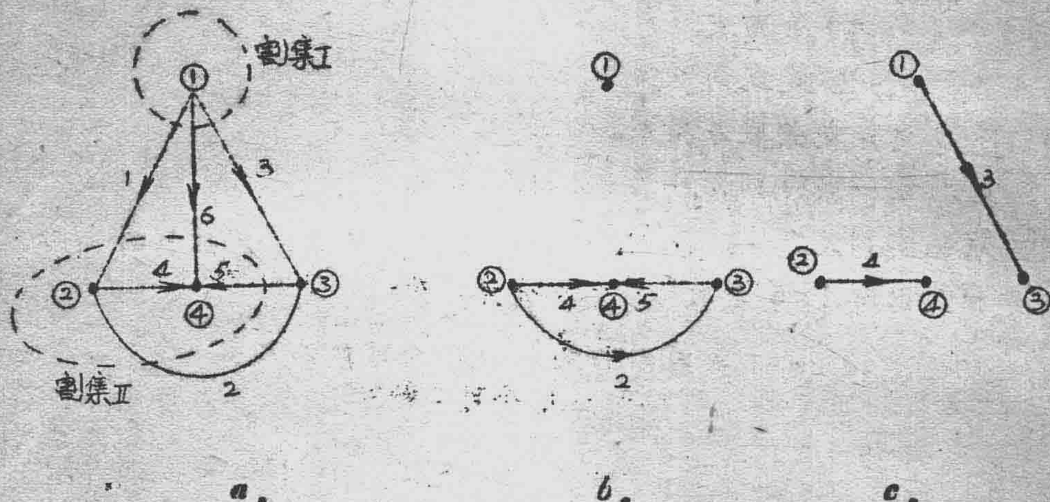


图1-4　图G和它的某两个割集

图中的虚线表示闭合百。b. 表示把穿过一个闭合百的三条支路1，3和6全卩移去后，尻图G变成两个分隔卩分，对应的割I{136}；c. 表示把穿过另一个闭合百的四条支路1，2，5和6全卩移去后，尻图G变成两个分隔卩分，对应的割集II{1256}，显然，对于一个给定的拓扑图，具有很多的割集，如同具有很多回路一样。

§1-2. 图论基本理论

在了解了网络拓扑的基本概念之后，我们进而介绍图论的基本

理论。这些理论叙述了回路、树和割集的基本性质。根据这些性质我们可以迠立网络分析和计沵的独立方程组，从而证明一般的网络尻理。这里介绍的图论基本理论是：若给定一个具有（$n+1$）个拓扑节点和b条拓扑支路的连通图G以及它的任意一个树T，那么

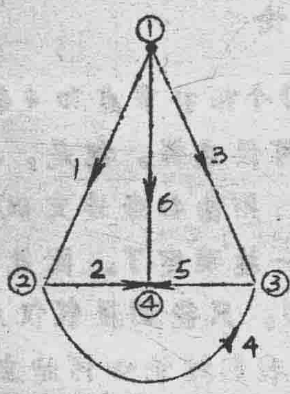
1．在任何一对节点之间，沿着树只有唯一的一条通路。

2．在图G中，仅只有〔（$n+1$）-1〕$=n$条树支，〔$b-$（$n+1$）$+1$〕$=$（$b-n$）条连支。

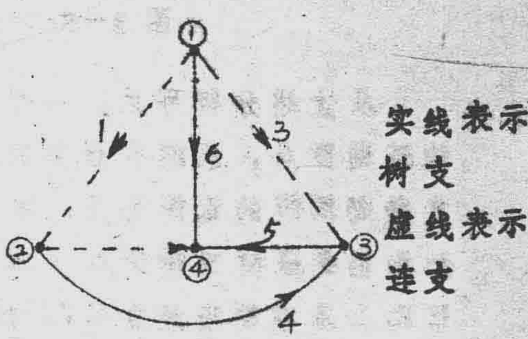
3．每一条连支同它的相关节点之间的树通路构成一个唯一的回路，称为连支关联基本回路，或者连集。

4．每一条树同图中的某些连支确定一个唯一的割集，称为树支关联基本割集。

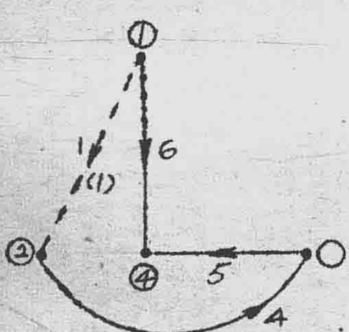
我们以图1-5来说明上述图论尻理，但不作一般的证明。



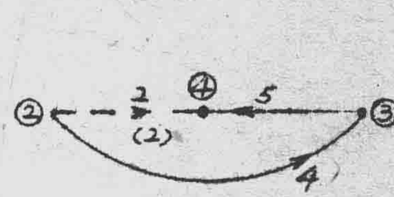
a．图G （$n+1$）$=4$，$b=6$



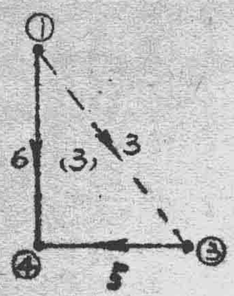
b．树T｛456｝树支数$n=3$
连支数$l=b-n=3$



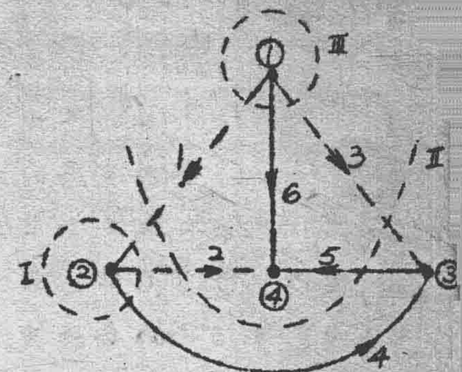
c．连支1同它的相关节点①和②之间树通路4－5－6确定一个唯一的回路(1)



d．连支2同它的相关节点②和④之间的树通路4－5确定一个唯一的回路(2)



e. 连支3同它的相关节点①和③之间的树通路5—6确定一个唯一的回路(3)



f. 树4，5，6各确定一个唯一的割集：割集I{4…
割集II{5123}，割集III{613}

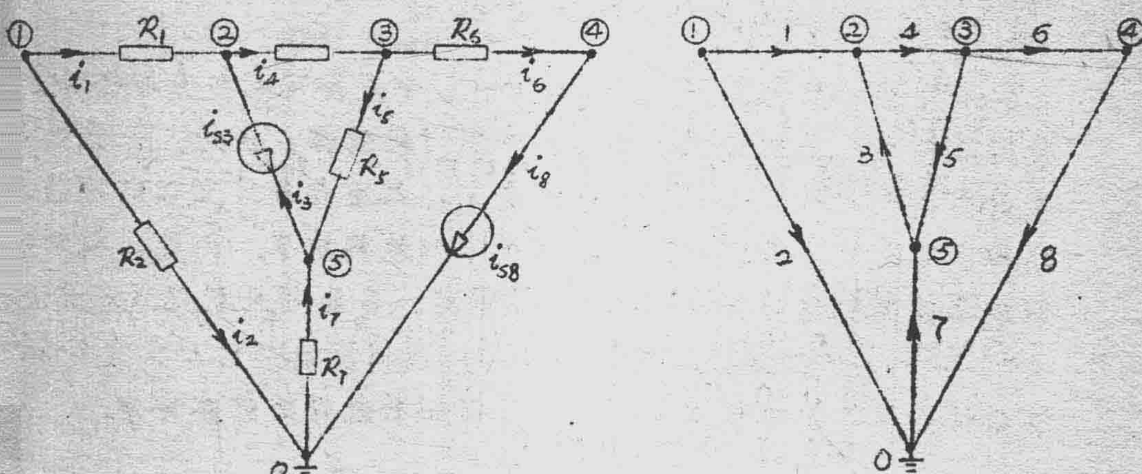
图1-5　图论理论

从上述分析可见，一个具有(n+1)个拓扑节点和b条拓扑支路的连通图G，虽然有很多回路和割集可供选择，但是，树支数和连支数却同树的选择无关，树一经选定，则由每条连支确定的基本回路和由每条树支确定的基本割集就唯一地确定了。因此，根据基本回路和基本割集建立KVL和KCL方程，只能而且仅仅只能建立(b+n)=b个独立方程。在下一章中，我们讨论如何建立这些方程以及如何并从这些方程中引出描述网络拓扑性质的基本矩阵。

第二章　电路基本定律

在本章中我们以特定的网络及其对应的拓扑图为例，首先根据电路中基本定律的物理意义写出代数方程；其次从这些方程中抽象出描绘网络拓扑性质的基本矩阵；最后用矩阵来表示电路中的基本定律，以便在下一章中根据这些基本定律的矩阵形式推导电路分析的基本方法。

我们以图（2－1）为例研究电路的基本定律。在图（2－1）中，a 为原电路图，b 为其相应的拓扑图。



a．原电路图　　　　　　*b*．拓扑图

图 2－1　网络及其拓扑图

这里应注意拓扑支路和拓扑节点同电路支路和节点的概念 不完全一致。从传统电路观点看，节点①和④是不存在的。

§ 2-1. KCL方程和节点关联矩阵A

在电路理论中，有两条很重要的定律，即基尔霍夫节点电流定律（Kircrhoff's current law），和基尔霍夫回路电压定律（Kircrhoff's voltage law），前者简写为KCL，后者则简写为KVL。

KCL表明，在任何瞬间，流出节点的电流同流入节点的电流必须相等。设一个网络具有（$n+1$）个节点，b条支路，　　那么，根据KCL可建立〔（$n+1$）-1〕$=n$个独立方程。例如，在图（2-1）中，（$n=5$，$b=8$）按规定的电流方向，并且约定将正标朝向节点的电流看作负，正标离开节点的看作正，于是可得出：

在节点①　　$i_1+i_2=0$

在节点②　　$-i_1-i_3+i_4=0$

在节点③　　$-i_4+i_5+i_6=0$

在节点④　　$-i_6+i_8=0$

在节点⑤　　$i_3-i_5-i_7=0$　　2-1

这组联立代数方程各电流的系数确定了一个矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&0&0&0\\ -1&0&-1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&-1&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0&1\\ 0&0&1&0&-1&0&-1&0 \end{pmatrix}\quad \text{行：}n=5\text{个独立节点}$$

列：$b=8$条支路

我们把它称为节点关联矩阵，简称A矩阵。它的行数（横为行）为独立节点数，列数（纵为列）为支路数。每行的非零数表示同每一节点相联的支路数。如上所述，正负表明支路电流的规定正方向流出节点者为正，反之为负；每列最多只有两个非零元素，它表明每条支路同哪两个节点相联结。同参考电位点相联结的支路，只有一个非零元素，具有两个非零的列，总是一正一负，因为每条支路电流总是流出一个节点（+），流入另一个节点（-1）。由此可见，