普通高等教育精品教材

微积分

学习指导与习题集

WEIJIFEN XUEXI ZHIDAO YU XITIJI

（上册）

主编 陈育栎

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育精品教材

微积分学习指导与习题集

（上册）

主编　陈育栎

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

《微积分》是高校理工科、经济管理类专业的一门重要的基础课程，本书按照《微积分》的大纲要求编写，全书共7章，内容包括预备知识、极限与连续、导数与微分、微分学的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程与差分方程，并在书后附有模拟试卷及课后习题.

本书按照学校建设“应用技术型”大学的要求，以及教育部教学指导委员会对《微积分》课程的要求，对复杂的微积分理论知识进行处理，在通俗易懂、重在应用和模块编排上下功夫. 在介绍基本理论、基本方法和重要定理时，采用了浅显易懂的描述方法.

本书可作为高等学校工科、理科（非数学专业）、经管类各专业的教材以及研究生入学考试的参考书，也可供工程技术人员、科技工作者参考.

图书在版编目（CIP）数据

微积分学习指导与习题集. 上册 / 陈育栎主编. -- 上海 : 上海交通大学出版社，2016

ISBN 978-7-313-15692-1

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①微积分－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第202954号

微积分学习指导与习题集（上册）

主　　编：陈育栎
出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路951号
邮政编码：200030　　电　　话：021-64071208
出 版 人：韩建民
印　　制：三河市祥达印刷包装有限公司　　经　　销：全国新华书店
开　　本：787mm×1092mm　1/16　　印　　张：16.5　　字　　数：381千字
版　　次：2016年9月第1版　　印　　次：2016年9月第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-313-15692-1/O
定　　价：36.50元

前　言

“微积分”是高等院校理工类和经管类本科各专业的一门重要基础学科. 随着应用技术型大学办学理念的提出和实施，以及构建增强学生创新创业能力的应用型人才培养目标指导下人才培养模式的改革，作为承载着技术应用所需的数学知识和数学方法的高等数学课程的改革也日益紧迫. 本书在遵循数学学科教育教学规律的同时，围绕经济社会发展的实际需要，为适应当前应用技术型大学的高等数学教学改革以及培养科学精神和人文素养兼备的应用型专门人才而编写.

本书在编写过程中，力求体现以下特色：

1. 本书是在参照“理工类及经管类本科专业高等数学教学的基本要求”的前提下，综合考虑应用技术型大学的实际情况下编写的. 本书是全书的上册，包含七章内容：第一章是预备知识，在现今高考综合改革的形势下本书力求指导学生做到与高中数学理论的无缝衔接，让学生顺利地从中学初等数学过渡到大学高等数学；第二章是极限理论，本章作为微积分学科的奠基石，指导学生从中学的常量数学过渡到变量数学，逐步建立高等数学中的思维方式；第三、四章是一元函数微分学；第五、六章是一元函数积分学；第七章是常微分方程与差分方程初步.

2. 具体内容的编写力求简洁易懂. 特别是对数学知识点的阐述和归纳，以及例题的选取均采用由易到难的顺序，使读者能循序渐进地掌握. 对各章节知识点的归纳和教学应用部分覆盖微积分在经济学、物理学和几何学等各个方面，理工科和经管类学生都适用，鼓励读者跨专业全面发展，扩大知识面.

3. 本书的内容按章编写. 每章包括：教学主要内容，学法建议，典型例题和疑难解析. 其中，教学主要内容部分将各章节的知识点进行归纳总结，且注重前后衔接，按“了解”“理解”“掌握”的次序表示程度上的差异. 典型例题和疑难解析部分是本书的重心所在，是教师上习题课和学生自学的良好辅导素材. 编者力图将学习内容、基本方法、解题技巧、释疑解难、数学应用等多方面的教学要求融于典型方法和例题之中，引导读者思考问题，开拓思路，培养读者的理性思维能力以及分析问题和解决问题的能力.

4. 绝大多数例题具有典型性，示范性，有利于学生举一反三. 例题的选取注重数学与实际应用相结合，注重对《微积分》教材的内容作适当的扩展和延伸. 例题先分析思路再给出求解过程，这样做的目的是想提高读者运用数学知识、技能分析问题和解决问题的能力，也就是建立数学模型的能力.

5. 本书附有针对每节课程内容的课后习题，配合各个章节的知识点，覆盖面广且从

易到难循序渐进，兼顾文、理科学生课后巩固知识的需要，让读者在每次课后自行思考、解题，以达到对问题更深刻和更透彻的理解的目的. 每章后都一定量的附有针对本章内容的综合复习题. 习题课部分选取了与各章节内容相关的历年研究生入学考试相应难度的典型试题供程度较好的学生作为整个章节学习完后综合复习之用，满足了不同层次学生的学习需要. 本书最后的模拟试题选自本科院校历年期中以及期末试题，供学生阶段性自测和复习之用. 需要指出的是，我们希望提醒学生读者学习数学应重视平时训练和过程考核，反之平时不亲自动手做题，仅靠考前临时抱佛脚是绝对无益的.

6. 本书附有二维码，扫码可获得相应模拟试题答案，更重要的是提供了“至诚数学微课堂”的订阅号，让学生、读者与教师随时互动，该平台是致力于大学数学课堂数字化教学的实践与研究平台，集中优势资源，提供师生互动. 引导数学学习，拓宽数学视野，通过移动终端随时随地学习数学知识. 打开数学思维，学会各种题型解题方法与技巧；触类旁通，巩固提高，答疑解惑，互动交流，突破数学学习能力，提高数学素养.

本书由陈育栎组织、策划、编写、定稿，陈育栎任主编，陈江彬、曾怀杰、温淑鸿任副主编，叶静妮、沈金良、陈晓英、侯远、施春玲参加编写. 本书第一、二章由曾怀杰参与编写，第三、四章由叶静妮参与编写，第五、六章由温淑鸿参与编写，第七章由沈金良参与编写.

由于编者水平有限，书中考虑不周或疏漏之处在所难免，敬请广大读者批评指正. 具体意见和建议请发送至本书的策划编辑邮箱：63724403@qq.com.

编　者

2016 年 8 月

本书编委会

主　编　陈育栎

副主编　陈江彬　曾怀杰　温淑鸿

参　编　叶静妮　沈金良　陈晓英

侯　远　施春玲

目　录

第一章　预备知识　函数

一、主要内容

1. 邻域

a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，称实数集

$$\{x \| x-a|<\delta\}$$

为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即 $U(a,\delta)=\{x \| x-a|<\delta\}$，点 a 称为邻域中心，δ 称为邻域半径．点 a 的 δ 邻域在数轴上是以 a 为中心，2δ 为长度的开区间 $(a-\delta,a+\delta)$．点 a 的 δ 邻域去掉中心点 a 后，称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta).$$

2. 映射

1）映射的概念

设 X 和 Y 为两个非空集合，若存在法则 T，使得 $x\in T$ 唯一确定 $y=T(x)\in Y$，则称 T 为 X 到 Y 的映射，记为 $T:X\to Y$，称 x 为原像，y 为像．

集合 X 称为映射 T 的定义域，X 的所有元素的像组成的集合称为映射 T 的值域．

2）几类重要映射

满射：若 $T(X)=Y$，即 Y 中任一元素都是 X 中某个元素的像，称 T 为 X 到 Y 的一个满射．

单射：对任意 $x_1,x_2\in X$，$x_1\neq x_2$，必有 $T(x_1)\neq T(x_2)$，则称 T 为 X 到 Y 的单射．

一一映射：既满足满射又符合单射的映射称为一一映射，又称为一一对应．

逆映射：设映射 T 为 X 到 Y 的一一映射，则由定义，对每个 $y\in Y$ 有唯一的 $x\in X$ 适合 $T(x)=Y$，于是我们可得到一个从 Y 到 X 的映射，它将每个 $y\in Y$ 映射为 X 中的元素 x，这里的 x 满足 $T(x)=Y$．这个映射就称为映射 T 的逆映射，记为 T^{-1}，即 T^{-1} 为从 Y 到 X 的映射，对每个 $y\in Y$，如果 $T(x)=Y$，则 $T^{-1}(y)=x$．

复合映射：$T_2\circ T_1(x)=T_2[T_1(x)]$．

3. 一元函数

1）常量、变量、自变量、因变量；映射与函数，函数的定义域；函数的值域.

确定函数的两要素：定义域与对应法则.

函数的表示方法：图示法、表格法、公式法.

分段函数：绝对值函数、符号函数、取整函数.

解析式表示的函数的定义域，函数的求法.

2）函数的基本性态：奇偶性、周期性、单调性、有界性.

单调递增，单调递减，单调函数，单调区间；有界函数，无界函数；

奇函数 $f(x)$　　$f(-x)=-f(x)$；

偶函数 $f(x)$　　$f(-x)=f(x)$；

周期函数 $f(x)$　　$f(x+T)=f(x)$.

3）反函数、复合函数

函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 之间的关系：

$$f[f^{-1}(x)]=x,\quad x\in R(f);$$

$$f^{-1}[f(x)]=x,\quad x\in D(f).$$

函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称；严格单调函数必有反函数.

两个函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 能复合成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的条件；复合函数的定义域；简单函数的复合函数求法.

4）初等函数

（1）基本初等函数

常数函数：$y=C$；

幂函数：$y=x^{\mu}$（μ是常数）；

指数函数：$y=a^{x}$（a 是常数，$a>0$，$a\neq 1$）；

对数函数：$y=\log_a x$（a 是常数，$a>0$，$a\neq 1$）；

三角函数：正弦函数 $y=\sin x$，余弦函数 $y=\cos x$，正切函数 $y=\tan x$，余切函数 $y=\cot x$，正割函数 $y=\sec x$，余割函数 $y=\csc x$；

反三角函数：反正弦函数 $y=\arcsin x$，反余弦函数 $y=\arccos x$，反正切函数 $y=\arctan x$，反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$.

基本初等函数的定义域，基本初等函数的图形，基本初等函数的几何特性.

初等函数：由常数及基本初等函数经过有限次四则运算及有限次的复合步骤所构成并且可以用一个式子表示的函数，叫做初等函数.

（2）双曲函数及其反函数（工程技术上常用）（理）

双曲正弦：$y=\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；双曲余弦：$y=\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；

反双曲正弦：$y=\operatorname{ar}\sinh x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；

反双曲余弦：$y=\operatorname{ar}\cosh x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$．

（3）几类常见的经济函数（文）

单利、复利多次付息函数，贴现函数；需求函数、供给函数；成本函数、收益函数、利润函数、库存函数．

设某产品的产量为 x，总收益函数为$R(x)$，总成本函数为$C(x)$，则总利润函数为$L(x)=R(x)-C(x)$．对每单位产品的利润，即平均利润，通常用$\overline{L}(x)$表示，亦即$\overline{L}(x)=\dfrac{L(x)}{x}$，显然，对平均利润$\overline{L}(x)$，有$\overline{L}(x)=\overline{R}(x)-\overline{C}(x)$．

二、学法建议

1．函数的特性：有界性、单调性、奇偶性、周期性．对于有界性的理解，可以借助几何意义，有界函数的图形完全落在两条平行于 x 轴的直线 $y=\pm M$ 的中间，而对于其他性质，如单调性、奇偶性、周期性等，借助于中学基础，则较易理解．

2．理解反函数和复合函数的概念尤其重要，后续微积分课程的学习过程中，常会发生基本概念方面的错误，究其根源，往往由于对本节内容未掌握好．例如，对复合函数的记号如 $f(\cos x)$ 等未切实弄懂，结果导致复合函数求导与求积分时产生错误．

3．熟悉基本初等函数的性质及其对应的图形（可以参见课本的附录部分）．

补充一些初等函数公式：

（1）和差角公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$\cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}$$

（2）和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

（3）积化和差公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

（4）倍角公式

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\cot 2\alpha=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$$

（5）半角公式

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\quad,\ \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\cot\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

（6）其他

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad \tan^2 x+1=\sec^2 x$$

$$\cot^2 x+1=\csc^2 x \qquad \mathrm{ch}^2 x-\mathrm{sh}^2 x=1$$

$$(a^3\pm b^3)=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

4．能够建立简单实际问题中的函数关系式．

本章内容非常基本，但却是后续课程的基础，虽然中学阶段已经学习过，内容看来比较熟悉，属复习性质，但也不能被忽略，应当认真领会和掌握．

三、例题解析

例 1　求函数 $f(x)=\sqrt{2+x}+\dfrac{1}{\lg(1+x)}$ 的定义域．

解　要使函数有意义，必须使

$$\begin{cases}2+x\geqslant 0,\\1+x>0,\\1+x\neq 1,\end{cases}\quad 得\begin{cases}x\geqslant -2,\\x>-1,\\x\neq 0.\end{cases}$$

由此可得函数的定义域为 $D(f)=(-1,0)\cup(0,+\infty)$.

例 2　判断下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=2^x+\sin x$；　（2）$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

（3）$f(x)=\begin{cases}-x^3+1, & x<0,\\x^3+1, & x\geqslant 0.\end{cases}$

解　（1）由于

$$f(-x)=2^{-x}+\sin(-x)=2^{-x}-\sin x\neq f(x),$$

且

$$f(-x)=2^{-x}-\sin x\neq -f(x)=-2^x-\sin x,$$

因此函数 $f(x)$ 既不是奇函数，也不是偶函数（通常称这类函数为非积非偶函数）.

（2）由于

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$
$$=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

因此，$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数.

（3）由于

$$f(-x)=\begin{cases}-(-x)^3+1, & -x<0\\(-x)^3+1, & -x\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}x^3+1, & x>0\\-x^3+1, & x\leqslant 0\end{cases}=\begin{cases}-x^3+1, & x<0\\x^3+1, & x\geqslant 0\end{cases}=f(x),$$

因此，$f(x)$ 是偶函数.

例 3　求 $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ 的反函数.

解　由 $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ 得 $xy+y=2x-1$，解之得 $x=\dfrac{y+1}{2-y}$. 因此所求反函数为

$$y=\frac{x+1}{2-x}\ (x\neq 2).$$

例 4　指出下列函数的复合过程：

（1）$y=\ln\sqrt{x}$；　（2）$y=\sin x^2$；　（3）$y=\arctan e^{\frac{1}{x}}$.

解　（1）函数 $y=\ln\sqrt{x}$ 是由 $y=\ln u$，$u=\sqrt{x}$ 复合而成的.

（2）函数 $y=\sin x^2$ 是由 $y=\sin u$，$u=x^2$ 复合而成的.

（3）函数 $y=\arctan e^{\frac{1}{x}}$ 是由 $y=\arctan u$，$u=e^v$，$v=\dfrac{1}{x}$ 复合而成的.

例 5 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(0,1]$，求下列复合函数的定义域：

（1）$f(x^2)$；（2）$f(\sin x)$；（3）$f(\ln x)$.

解 此类记号都是表示复合函数的记号，以 $f(x^2)$ 为例，若令 $u=x^2$，则函数 $f(x^2)$ 表示由 $f(u)$ 和 $u=x^2$ 复合而成的函数. 这类记号以后用得很多，要注意掌握.

（1）要使函数 $f(x^2)$ 有意义，中间变量 $u=x^2$ 必在定义域 $(0,1]$ 中，$0<x^2\leqslant 1$，解得 $0<|x|\leqslant 1$，故 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-1,0)\cup(0,1]$.

（2）由 $\sin x\in(0,1]$，即 $0<\sin x\leqslant 1$，可解得函数 $y=f(\sin x)$ 的定义域为 $(2k\pi,(2k+1)\pi)$，其中 $k\in\mathbf{Z}$.

（3）由 $\ln x\in(0,1]$，即 $0<\ln x\leqslant 1$，可解得函数 $y=f(\ln x)$ 的定义域为 $(1,e]$.

例 6 设 $f(x-1)=x^2-1$，求 $f(x)$，$f(x+1)$.

解 令 $u=x-1$，则 $x=u+1$，于是

$$f(u)=f(x-1)=x^2-1=(u+1)^2-1=u^2+2u,$$

即

$$f(x)=x^2+2x.$$

进而有

$$f(x+1)=(x+1)^2+2(x+1)=x^2+4x+3.$$

本题也可以利用函数定义和符号 f 的意义求解：

$$f(x-1)=x^2-1=(x-1)(x+1)=(x-1)[(x-1)+2]=(x-1)^2+2(x-1),$$

于是由函数定义及对应法则 f 的意义，得 $f(x)=x^2+2x$.

例 7（文） 试生产某种产品 x 件时的总成本为 $C(x)=20+2x+0.5x^2$，若每售出一件该商品的收入是 20 万元，求生产 20 件时的总利润和平均利润.

解 依题意，总收入函数 $R(x)=20x$，则总利润函数为

$$L(x)=R(x)-C(x)=20x-(20+2x+0.5x^2)=-20+18x-0.5x^2.$$

当 $x=20$ 时，总利润为

$$L(20)=(-20+18x-0.5x^2)|_{x=20}=140\ (\text{万元}).$$

平均利润为

$$\overline{L}(20)=\frac{L(20)}{20}=7\ (\text{万元/件}).$$

从以上分析可知，利润是产量 x 的函数，但并非产量越高利润就越大. 这是因为，一方面生产产品的总成本总是生产量 x 的增函数；另一方面，由于需求量 x 受到价格等诸多因素的影响往往不总是增加的，从而导致销售总收入 $R(x)$ 有时增加显著，有时增加缓慢，