奥数最佳实战题

（下卷）

唐淳 编

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

AOSHU ZUIJIA SHIZHANTI (XIAJUAN)

$\sum_{i=0}^{761}$ 刘培杰 数学工作室

培杰数学国际文化传播中心
www.impj.cn
刘培杰数学工作室网站
http://lpj.hit.edu.cn

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘立娟
封面设计 孙茵艾

哈尔滨工业大学出版社 刘培杰数学工作室
联系地址：哈尔滨市南岗区复华四道街10号
邮　　编：150006
联系电话：0451-86281378　13904613167
E-mail：lpj1378@163.com
微　　信：impjpp

上架建议：数学竞赛

ISBN 978-7-5603-6410-0

9 787560 364100 >

定价 58.00元

奥数最佳实战题

（下卷）

唐淳 编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书共分两编:第一编主要介绍了知识点与训练题500例;第二编给出了详细的习题解答及知识点解释.本书适合于数学奥林匹克竞赛选手和教练员、高等院校相关专业研究人员及数学爱好者使用.

图书在版编目(CIP)数据

奥数最佳实战题. 下卷/唐淳编. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2017.5

ISBN 978-7-5603-6410-0

Ⅰ.①奥… Ⅱ.①唐… Ⅲ.①数学-竞赛题-题解 Ⅳ.①O1-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第000825号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　刘立娟
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张27.25　字数662千字
版　　次　2017年5月第1版　2017年5月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-6410-0
定　　价　58.00元

⊙ 目 录

第一编

知识点与训练题 500 例

1　设 p 为质数,正整数 a,b 的 p 进制表示分别为 $a=a_kp^k+a_{k-1}p^{k-1}+\cdots+a_1p+a_0$,$b=b_kp^k+b_{k-1}p^{k-1}+\cdots+b_1p+b_0$,证明:$C_a^b\equiv C_{a_k}^{b_k}C_{a_{k-1}}^{b_{k-1}}\cdots C_{a_0}^{b_0}\pmod p$.

2　设正数 x,y,z 满足 $xyz=1$,$x,y,z\in\left[\frac{1}{2},2\right]$,求 $x+y+z$ 的最大值.

3　设 $f(x)=x^4-x^3+8ax^2-ax+a^2$,若 $f(x)=0$ 有 4 个不同的正根,试求 a 的取值范围.

4　1 600 名议员组成 16 000 个委员会,每个委员会由 80 名议员所组成,证明:一定有 2 个委员会至少有 4 名公共议员.

5　一个由 16 个小方格所组成的 4×4 的棋盘,将其中 8 个小方格染黑,使得每行、每列恰有 2 个黑格,则一共有多少种不同的染法?

6　已知 $3^s+13^t=17^s$,$5^s+7^t=11^t$,试判断实数 s,t 的大小关系,并证明.

7　解方程 $\sqrt{x^2-10\sqrt{3}x+80}+\sqrt{x^2+10\sqrt{3}x+80}=20$.

8　求解方程 $x^3-3x=\sqrt{x+2}$.

9　证明:$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\theta)\sin(\gamma+\theta)\sin(\beta+\gamma)\geqslant 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\theta$,其中 $\alpha+\beta+\gamma+\theta=\pi$,且 $\alpha,\beta,\gamma,\theta\in(0,\pi)$.

10　已知集合 $A=\{(x,y)\mid y=-x^2+mx-1\}$,$B=\{(x,y)\mid x+y=3,0\leqslant x\leqslant 3\}$,若 $A\cap B$ 是单元素集,求实数 m 的取值范围.

11　求函数 $y=3\sqrt{x}-2\sqrt{x-1}$ 的值域.

12　正整数 m,n 互质,$20n+m$ 与 $20m+n$ 的最大公约数是 d,求 d 的最大值.

13　解方程组 $x_1+1=\frac{1}{x_2},x_2+1=\frac{1}{x_3},\cdots,x_n+1=\frac{1}{x_1}$.

14　已知 $f(x)$ 是定义在正整数集上的函数,$f(1)=\frac{3}{2}$,且对于任意 $x,y\in\mathbf{N}$,有 $f(x+y)=\left(1+\frac{y}{x+1}\right)f(x)+\left(1+\frac{x}{y+1}\right)f(y)+x^2y+xy+xy^2$,求 $f(x)$.

15　对任意实数 a,b,均有 $\sqrt[3]{a^2b^2(a+b)^2}\leqslant m(a^2+ab+b^2)$,求实数 m 的最小值.

16　已知 $x^3-x=2$,比较 x 与 $\sqrt[4]{5}$ 的大小.

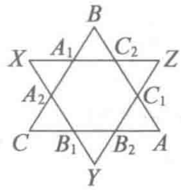
心得 体会 拓广 疑问

17 使 $x^2-\frac{1}{x^2}$ 和 $x^3-\frac{1}{x^3}$ 都是整数的正数 x 有多少个?

18 已知 $x_n=\frac{1}{2}[(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n]$,求 $x_{20\,072\,008}$ 的个位数字.

19 双曲线 $x^2-y^2=a^2$ 的一条准线与实轴相交于点 A,过点 A 引一条直线和双曲线交于 M,N 两点,又过一个焦点 F 引一条垂直于 MN 的直线和双曲线交于 P,Q 两点,求证:$|FQ|\cdot|FP|=2|AM|\cdot|AN|$.

20 如图,设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle XYZ$ 的交点分别为 A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2,满足 $\frac{A_1A_2}{BC}=\frac{B_1B_2}{CA}=\frac{C_1C_2}{AB}$,求证:$\frac{A_2B_1}{XY}=\frac{B_2C_1}{YZ}=\frac{C_2A_1}{XZ}$.



21 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一点 C 与两焦点 F_1,F_2 的连线分别交椭圆于点 A,B,过 A,B 两点的切线相交于点 F,与过点 C 的切线分别交于点 D,E,求证:(1) AE,CF,BD 三线共点;(2) $CF\perp DE$.

22 对每个正整数 n,方程 $x+2y+5z=n$ 的非负整数解 (x,y,z) 的组数记为 a_n,试求所有的 n,使得 $5a_n$ 为平方数,并确定此时的平方数表达式.

23 设 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$,这里 a,b,c,d 是实数,已知 $f(1)=5,f(2)=10,f(3)=15$,求 $f(8)+f(-4)$.

24 设集合 $T=\{x_1,x_2,\cdots,x_{10}\}$ 的五元子集 S 中的任何两个元素最多在两个子集中同时出现,这样的子集最多有多少个?

25 过抛物线 $y=ax^2(a<0)$ 的焦点 F 作弦 PQ,若 $|PF|=2\,007,|QF|=10$,求 a.

26 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle A\leqslant\angle B\leqslant\angle C$,$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}=\sqrt{3}$,求 $\angle B$ 的取值范围.

27 函数 $f(x)=\frac{(k+1)x^2+(k+3)x+(2k-8)}{(2k-1)x^2+(k+1)x+(k-4)}$ 的定义域用 D 表示,求使 $f(x)>0$ 对于 $\forall x\in D$ 均成立的实数 k 的集合.

28 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是给定的实数,求证:存在实数 x,使得 $\{x-x_1\}+\{x-x_2\}+\cdots+\{x-x_n\}\leqslant\frac{n-1}{2}$.

29 (整体思维法)求使不等式组

$$\begin{cases}x^2+2xy-7y^2\geqslant\frac{1-a}{1+a} & ①\\ 3x^2+10xy-5y^2\leqslant -2 & ②\end{cases}$$

有解的参数 a 的取值范围.

30　已知 $A\subseteq\{1,2,\cdots,2\ 000\}$，且 A 中任意两个数之差的绝对值不等于 4 或 7，求 $|A|$ 的最大值.

31　设 $M=\{n\mid n=x^2+y^2,x,y\in\mathbf{N}^*\}$，证明：$1\ 999\notin M$，并且对于任意正整数 k，均有 $1\ 999^k\notin M$.

32　试求不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_5=20$ 满足 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_5\geqslant 1$ 的正整数解 $(x_1,x_2,\cdots,x_5)$ 的个数.

33　设 k 是一个不小于 3 的正整数，θ 是一个实数，证明：若 $\cos(k-1)\theta$ 和 $\cos\theta$ 均为有理数，则存在正整数 $n>k$，使 $\cos(n-1)\theta$ 和 $\cos n\theta$ 均为有理数.

34　设正整数 a 不是完全平方数，求证：对每一个正整数 n，$S_n=\{\sqrt{a}\}+\{\sqrt{a}\}^2+\cdots+\{\sqrt{a}\}^n$ 的值都是无理数，这里 $\{a\}=a-[a]$.

35　四边形 $ABCD$ 内接于圆，其中 AB，DC 的延长线交于点 P，AD，BC 的延长线交于点 Q，过 Q 作该圆的两条切线，切点为 E，F，求证：P，E，F 三点共线.

36　已知 $P(x)=x^3-3x+1$，求作一个多项式 $Q(x)$，使得 $Q(x)=0$ 的根是 $P(x)=0$ 的根的 5 次幂.

37　设 $a_1,a_2,\cdots,a_{99}\in[-2,2]$，且 $a_1+a_2+\cdots+a_{99}=0$，试求 $a_1^3+a_2^3+\cdots+a_{99}^3$ 的最大值.

38　已知 $341\mid 2^{341}-2$，求证：存在无限多个奇合数 n，使得 $n\mid 2^n-2$.

39　求证：对于大于 2 的任意正整数 a，存在无限多个正整数 n，使得 $n\mid a^n-1$.

40　设 $p=4k-1$ 为质数，满足 $p\mid a^2+b^2$，$a,b\in\mathbf{N}^*$，求证：$p\mid a$，$p\mid b$.

41　求所有的质数 p,q，使得 $pq\mid 3^p+3^q$.

42　设四边形 $ABCD$ 既有外心 O，又有内心 O_1，对角线 AC，BD 交于点 O_2，求证：O，O_1，O_2 三点共线.

43　在一个含 10 个元素的集合 A 的若干非空子集中，任意两个不同的子集的交集含有 A 中元素的数目不多于 2，这样的子集合至多有多少个？

44　设 $M=\{1,2,\cdots,65\}$，$A\subseteq M$，若 $|A|=33$，且存在 $x,y\in A$，$x<y$，$x\mid y$，则称 A 为“好集”，求最大的 $a\in M$，使含 a 的任意 33 元子集为“好集”.

45　设在 7×8 的长方形棋盘的每个小方格的中心各放一个棋子，如果两个棋子所在的小方格共边或共顶点，那么称这两个棋子相连. 现从这 56 个棋子中取出 n 个，使得棋盘上剩下的棋子没有任何 5 个在一条直线上（横、竖、斜方向）依次相连，试求 n 的最小值.

心得 体会 拓广 疑问

46 设 x 是实数,求证:$f(x)=(x^2+2x+3)^{x^2}+(x^2+2x+3)^{x+3}\geqslant 6$.

47 已知 MN 是圆 O 的一条弦,R 是弦 MN 的中点,过 R 作任两条相交弦 AB 和 CD,过 A,B,C,D 四点的二次曲线交 MN 于 P,Q 两点,求证:R 是 PQ 的中点.

48 求函数 $y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$ 的值域.

49 函数 $f(x)=\dfrac{9^x-1}{3^{x+1}}-\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{|x+2|-2}+1$,已知 $f(a)=\sqrt{3}$,求 $f(-a)$ 的值($|a|<1$).

50 设函数 $f(x)$ 对所有 $x>0$ 有定义,且满足:(1)函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格递增;(2)对所有 $x>0$,均有 $f(x)>\dfrac{1}{x}$;(3)对所有 $x>0$,均有 $f(x)f\left[f(x)+\dfrac{1}{x}\right]=1$,求 $f(1)$.

51 (钟开莱不等式)设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0$,且 $\sum\limits_{i=1}^{k}a_i\leqslant\sum\limits_{i=1}^{k}b_i$ $(1\leqslant k\leqslant n)$,求证:(1) $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2$;(2) $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^3\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i^2$.

52 (小知识)研究各种类型数列的处理方法.

53 证明:存在无穷多个正整数解 (x,y,z),使得 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{12}{x+y+z}-\dfrac{1}{xyz}$.

54 求函数 $f(x)=2x+\sqrt{5x^2+7}$ 的最小值.

55 已知常数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,对于 $\forall x\in\mathbf{R}$,$f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2^{i-1}}\cdot\cos(a_i+x)$,求证:若 $f(x_1)=f(x_2)=0$,则 $x_1-x_2=m\pi$,此处 m 为整数.

56 找出所有的正整数 $m,n\geqslant 3$,使得存在无穷多个正整数 a,且 $a^n+a^2-1\mid a^m+a-1$.

57 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足:(1)值域为 $(-1,1)$,且当 $x>0$ 时,$-1<f(x)<0$;(2)对于定义域内的任意实数 x,y,均满足 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$,试回答下列问题:(1)求 $f(0)$ 的值;(2)试判断并证明函数 $f(x)$ 的单调性;(3)若函数 $f(x)$ 存在反函数 $g(x)$,求证:$\sum\limits_{k=1}^{n}g\left(\dfrac{1}{k^2+3k+1}\right)>g\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

58 设 D 为锐角$\triangle ABC$ 内部一点,且满足条件:$DA\cdot DB\cdot AB+DB\cdot DC\cdot BC+DC\cdot AD\cdot AC=AB\cdot BC\cdot CA$,试确定 D 的几何位置,并证明你的结论.

59　设 AF 为圆 O_1 与圆 O_2 的公共弦，点 B,C 分别在圆 O_1、圆 O_2 上，且 $AB=AC$，$\angle BAF$，$\angle CAF$ 的平分线交圆 O_1、圆 O_2 于 P，E，求证：$PE\perp AF$.

60　在一节车厢中，任何 $m(m\geqslant3)$ 个旅客都有唯一的公共朋友（规定当甲是乙的朋友时，乙也是甲的朋友，任何人不作为他自己的朋友），问在这节车厢中，朋友最多的旅客有多少个朋友？

61　解方程：$\log_{12}(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})=\frac{1}{2}\log_9 x$.

62　在$\triangle ABC$中，$\angle A,\angle B,\angle C$所对的边为$a,b,c$，若$\frac{\cos A}{25}=\frac{\cos B}{33}=\frac{\cos C}{39}$，求 $a:b:c$.

63　在$\triangle ABC$中，AP平分$\angle BAC$，AP交BC于P，BQ平分$\angle ABC$，BQ交CA于Q，已知$\angle BAC=30°$，且$AB+BP=AQ+QB$，求$\triangle ABC$各内角的度数.

64　求方程组$\begin{cases}x=\sqrt{y+45}-\sqrt{y+5}\\y=\sqrt{x+45}-\sqrt{x+5}\end{cases}$的实数解$(x,y)$.

65　81 除以一个正整数 n，所求得的实数中的小数部分存在连续四位数为 1,9,9,5，求满足条件的最小的 n.

66　$\triangle ABC$内接于圆K，CL是$\angle ACB$的平分线，圆K_1与AL，CL，圆K相切，求证：若I为圆K_1与CL的公共点，则I为$\triangle ABC$的内心.

67　设 $ABCDEF$ 是凸六边形，且 $AB=BC$，$CD=DE$，$EF=FA$，求证：$\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\geqslant\frac{3}{2}$，并指出等号成立的条件.

68　已知$\triangle ABC$内接于圆O，P为$\triangle ABC$内任一点，过点P引AB,CA,BC的平行线，分别交BC,CA于F,E，交AB,BC于K,I，交AB,CA于G,H，AD为圆O过点P的弦，试证：$EF^2+KI^2+GH^2\geqslant 4PA\cdot PD$.

69　求函数$f(x)=a\sqrt{\sec x}-b\sqrt{\tan x}$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$的最小值，其中$a,b$为常数，且$a>b>0$.

70　设$0\leqslant a\leqslant1$，且$0\leqslant x\leqslant\pi$，求证：$(2a-1)\sin x+(1-a)\cdot\sin(1-a)x\geqslant0$.

71　求方程 $\sin x+2\sin 2x=3+\sin 3x$ 的解.

72　解不等式 $\log_{12}(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})>\log_{64}x$.

73　已知非负实数x,y,z满足$x^2+y^2+z^2+x+2y+3z=\frac{13}{4}$，求$x+y+z$的最大值和最小值.

74　设正$\triangle ABC$的内切圆圆心为I，半径为r，在圆I内任取一

点 P,设点 P 到 BC,CA,AB 的距离分别为 d_1,d_2,d_3,求证:以 $\sqrt{d_1}$,$\sqrt{d_2}$,$\sqrt{d_3}$ 为边可以构成一个三角形,且其面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{r^2-PI^2}$.

75 设 G 为 $\triangle ABC$ 的重心,在 $\triangle ABC$ 所在平面上确定点 P 的位置,使 $PA\cdot AG+BP\cdot BG+CP\cdot CG$ 有最小值,并用 $\triangle ABC$ 的边长表示这个最小值.

76 已知 $\triangle ABC$ 满足 $\angle ACB=2\angle ABC$,设 D 为 BC 边上的一点,且 $CD=2BD$,延长线段 AD 至 E,使 $AD=DE$,证明:$\angle ECB+180°=2\angle EBC$.

77 设凸四边形的边长为 a,b,c,d,对角线长是 e 和 f,求证:$2\min\{a,b,c,d\}\leqslant\sqrt{e^2+f^2}$,当且仅当这个凸四边形是菱形时等号成立.

78 设 P 为 $\triangle ABC$ 内任一点,顶点 A,B,C 与 P 的连线分别与 BC,CA,AB 交于点 D,E,F,P' 为 $\triangle DEF$ 周界上任一点,过 P' 作 PD,PE,PF 的平行线,分别与 BC,CA,AB 交于 D',E',F',证明:在比值 $\frac{P'D'}{PD},\frac{P'E'}{PE},\frac{P'F'}{PF}$ 中,必有一个等于另两个之和.

79 设 $\{a_n\}$ 为等差数列,S_n 为其前 n 项之和,$S_9=18,a_{n-4}=30,S_n=336$,求 n.

80 正项数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=1$,S_n 为其前 n 项之和,$S_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$,求 a_n.

81 用三角代换法求函数 $y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$ 的值域.

82 方程 $\tan 5x+\tan 3x=0$ 在 $[0,\pi)$ 内有几个解?

83 设 P,Q 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径 OK 或延长线上的两点,$OP\cdot OQ=R^2$,其中 R 为外接圆半径,点 P 关于 BC,CA,AB 的对称点分别为 U,V,W,而 QU,QV,QW 分别交 BC,CA,AB 于点 D,E,F,求证:D,E,F 三点共线.

84 设 x,y 为任意正实数,求 $M=\min\left\{x,\frac{1}{y},y+\frac{1}{x}\right\}$ 的最大值.

85 设 x,y,z 为正实数,且 $x+y+z\geqslant xyz$,求 $\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}$ 的最小值.

86 过锐角 $\triangle ABC$ 的顶点 A,B,C 的三条高线分别交其对边于 D,E,F,过点 D 平行于 EF 的直线分别交 AC,AB 于点 Q,R,EF 交 BC 于点 P,证明:$\triangle PQR$ 的外接圆过 BC 的中点.

87 $\triangle A_1A_2A_3$ 是一非等腰三角形,它的边长分别为 a_1,a_2,a_3,其中 a_i 是 $\angle A_i(i=1,2,3)$ 的对边,M_i 是边 a_i 的中点,$\triangle A_1A_2A_3$ 的

心得 体会 拓广 疑问

内切圆 I 切边 a_i 于点 T_i，S_i 是 T_i 关于 $\angle A_i$ 的平分线的对称点，求证：M_1S_1，M_2S_2，M_3S_3 三线共点.

88 试证：$\triangle ABC$ 外接圆的任一直径两端点所对应的 $\triangle ABC$ 的两条西摩松线垂直相交，且交点位于此三角形的九点圆上.

89 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_0=0$，且 $x_{n+1}=3x_n+\sqrt{8x_n^2+1}$，求通项 x_n.

90 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 的平分线与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于 D，I 是 $\triangle ABC$ 的内心，M 是 BC 的中点，P 是 I 关于 M 的对称点（设 P 在圆内），延长 DP 与外接圆相交于 N，试证：在 AN，BN，CN 三条线段中，必有一条线段是另两条线段之和.

91 设 $f(x)=x^2+x$，且 $f(a)=\frac{1}{2}$，求 $\frac{1}{f(a)+1}+\frac{1}{f^{(2)}(a)+1}+\cdots+\frac{1}{f^{(100)}(a)+1}$ 的整数部分.

92 设 $f(x)=\frac{x^2}{2(x-1)}$，求 $f^{(n)}(x)$.

93 已知 $f(x)=|1-2x|$，$x\in[0,1]$，求方程 $f(f(f(x)))=\frac{1}{2}x$ 的解的个数是多少？

94 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}_+$，且对任意 $x,y\in\mathbf{R}$，$u\in\mathbf{R}_+$，有 $f(ux+(1-u)y)\leqslant(f(x))^u(f(y))^{1-u}$，试求 $f(x)$.

95 求 $\tan\frac{\pi}{16}+\tan\frac{5\pi}{16}+\tan\frac{9\pi}{16}+\tan\frac{13\pi}{16}$ 的值.

96 圆 O_1、圆 O_2 相交于 P，Q，圆 O_1 的弦 PA 与圆 O_2 相切，圆 O_2 的弦 PB 与圆 O_1 相切，设 $\triangle PAB$ 的外心为 O，求证：$OQ\perp PQ$.

97 圆 A、圆 B 相交于 C，D，且它们都与圆 O 内切，切点为 M，N，射线 CD 交圆 O 于 P，PM 交圆 A 于 E，PN 交圆 B 于 F，证明：EF 是圆 A 和圆 B 的公切线.

98 设锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆 ω 的圆心为 O，过 A，O，C 三点的圆 ω_1 的圆心为 K，且与边 AB，BC 分别相交于点 M，N，现知点 L 与 K 关于直线 MN 对称，证明：$BL\perp AC$.

99 设过 $\triangle ABC$ 上的 B，C 两点的圆分别与 AB，AC 相交于 C'，B'，证明：BB'，CC'，HH' 三线共点，此处 H，H' 分别为 $\triangle ABC$，$\triangle AB'C'$ 的垂心.

100 设 p，R，r，S 分别表示锐角 $\triangle ABC$ 的半周长、外接圆半径、内切圆半径及面积，p_1，R_1，r_1，S' 分别表示 $\triangle ABC$ 的垂足 $\triangle DEF$ 的半周长、外接圆半径、内切圆半径和面积，则有如下性质：(1) $p_1=\frac{r}{R}p$；(2) $S'=2S\cos A\cos B\cos C$；(3) $r_1\leqslant\frac{r^2}{R}$；(4) $R_1=\frac{1}{2}R$.

101 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=50°$，$\angle ACB=30°$，M 为形内一点，$\angle MCB=20°$，$\angle MAC=40°$，求 $\angle MBC$.

心得 体会 拓广 疑问

102 圆 O 经过 $\triangle ABC$ 的顶点 A,C,且与 AB,BC 交于 K,N(K 与 N 不同),$\triangle ABC$ 的外接圆和 $\triangle BKN$ 的外接圆相交于 B,M,求证:$\angle BMO=90°$.

103 设 H,G,I 分别为三边两两互不相等的三角形的垂心、重心、内心,求证:$\angle HIG>90°$.

104 三角形的内心与外心之距离等于内心到垂心之距离的充要条件是该三角形有一个内角为 $60°$.

105 (小知识)试阐述圆锥曲线的若干性质.

106 (小知识)伪内切圆的性质定理.

107 (小知识)圆的一个解析性质.

108 设 O 为平面直角坐标系的原点,P 为直线 $l:g(x,y)=Ax+By=1$(A,B 不同时为零)上一点,射线 OP 交圆:$f(x,y)=\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1$ 于点 R,若点 Q 在 OP 上满足 $|OQ|\cdot|OP|=|OR|^2=r^2$,则点 P 在 l 上移动时,点 Q 的轨迹为圆 $\left(x-\frac{Ar^2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{Br^2}{2}\right)^2=\frac{(A^2+B^2)r^4}{4}$,或 $f(x,y)-g(x,y)=0$.

109 (小知识)点圆应用.

110 (小知识)海莱(Helly)定理.

111 解方程 $\sqrt{x^2+6x+12}+\sqrt{x^2-2x+4}=8$.

112 求函数 $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{4-2x}$ 的值域.

113 已知定点 $A(1,1)$,F_1 为椭圆 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 的左焦点,动点 P 在椭圆上,试求 $|PF_1|+|PA|$ 的最大值和最小值,并求取得最值时 P 的坐标.

114 $\triangle ABC$ 的内切圆分别切 BC,CA,AB 于 A_1,B_1,C_1,$\triangle ABC$ 的外接圆弧 $\overset{\frown}{BAC},\overset{\frown}{CBA},\overset{\frown}{ACB}$ 的中点分别为 A_2,B_2,C_2,求证:A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2 三线共点.

115 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上任取两点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$,点 $P(x,y)$ 是以线段 P_1P_2 为直径的圆上任一点,求证:$x^2+y^2\leqslant\frac{3}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2$.

116 求函数 $f(x)=2x+3+\sqrt{-2x^2+12x-14}$ 的值域.

117 (迭代法)解函数方程:$f(x)=\cos\frac{x}{2}\cdot f\left(\frac{x}{2}\right)$,其中 $f(x)$ 为连续函数,且 $f(0)=1$.

118 解函数方程:$f(xy)=f(x)+f(y)$,其中 $f(x)$ 是 $(0,$

心得 体会 拓广 疑问

$+\infty$)内的连续函数.

119 实连续函数 $f(x)$ 对一切 $x,y\in\mathbf{R}$,满足 $f(\sqrt{x^2+y^2})=f(x)f(y)$,且 $f(0)\neq 0$,$f(1)=1\ 995$,求证:$f(x)=1\ 995^{x^2}$.

120 (不动点法)已知 $f:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$,且满足条件:(1)对任意 $x,y\in\mathbf{R}_+$,$f(xf(y))=yf(x)$;(2)当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)\to 0$,求函数 $f(x)$ 的表达式.

121 (微分法)解函数方程 $f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)=f(x)+f(y)$.

122 (辅助函数法)若 $P(x)$ 表示 x 的 n 次多项式,且当 $k=0,1,\cdots,n$ 时,$P(k)=\dfrac{k}{1+k}$,试求 $P(x)$ 的表达式.

123 经过点 $M(2,-1)$ 作抛物线 $y^2=x$ 的 4 条弦 P_1Q_1,P_2Q_2,P_3Q_3,P_4Q_4,且 P_1,P_2,P_3,P_4 的纵坐标成等差数列,试比较 $\dfrac{P_1M}{Q_1M}-\dfrac{P_2M}{Q_2M}$ 与 $\dfrac{P_3M}{Q_3M}-\dfrac{P_4M}{Q_4M}$ 的大小.

124 设 $x_1,x_2,x_3>0$,证明:$\left(\dfrac{x_1+\sqrt{x_1x_2}+\sqrt[3]{x_1x_2x_3}}{3}\right)^3\leqslant x_1\cdot\dfrac{x_1+x_2}{2}\cdot\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$.

125 (小知识)圆锥曲线的光学性质.

126 解不等式 $|3x-5|-|x+3|-2<0$.

127 设正数 a,b 满足 $a>\dfrac{b}{\sqrt{2}}$,且使得关于 x 的不等式 $\sqrt{x-1}\geqslant a\sqrt{x+1}-b$ 总有实数解,试求 $f(a,b)=a^2-3ab+b^2$ 的取值范围.

128 (法向量)已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,$|AB|=4$,$|AD|=3$,$|AA_1|=2$,求 B_1 到平面 ACD_1 的距离.

129 有三堆石头,分别是(3,5,7)个,现在甲乙两人轮流在其中一堆取石头任意个(可一次取完),谁取最后一个算输,甲先取,问甲怎样取才可以有必胜的策略?

130 设 $(b,c)=1$,$c\mid n!$,证明:$c\mid a(a+b)(a+2b)\cdots[a+(n-1)b]$,其中 a,b,c,n 均为正整数.

131 设 n,a,b 为整数,证明:$n!\mid b^{n-1}a(a+b)\cdots[a+(n-1)b]$.

132 求证:$[\sqrt{n}]+[\sqrt[3]{n}]+\cdots+[\sqrt[n]{n}]=[\log_2 n]+[\log_3 n]+\cdots+[\log_n n]$,其中 $n\in\mathbf{N}_+$,[ ]为取整函数.

133 (小知识)数集 $X=\{1,2,\cdots,n\}$ 的 m 类平均划分构造方法.

134 m,n 是两个不同的正整数,一个长方形地面可以用大小为 $1\times n$ 的垂直方向的地砖和 $1\times m$ 的水平方向的地砖不重叠地铺满,证明:可以用其中一种地砖不重叠地铺满房间.

心得 体会 拓广 疑问

135 (小知识)闵可夫斯基(Minkowski)定理.

136 (小知识)费马-高斯定理.

137 整数 a,b,c 满足$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$和$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$均为整数,求证:$|a|=|b|=|c|$.

138 设正系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根,证明:(1)$\max\{a,b,c\}\geqslant\frac{4}{9}(a+b+c)$;(2)$\min\{a,b,c\}\leqslant\frac{1}{4}(a+b+c)$.

139 (小知识)重要恒等式.

140 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续函数,且对任意 $x\in\mathbf{R}$,有 $f(x)+f[f(x)]=x^4+3x^2+2$,求证:对任意 $x\in\mathbf{R}$,有 $f(-x)=f(x)$.

141 $\{1,2,\cdots,2\ 000\}$ 有多少个子集的元素之和为 5 的倍数?

142 设函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,对任意的实数 x,y,只要 $x+y\neq0$,就有 $f(xy)=\frac{f(x)+f(y)}{x+y}$成立,求 $f(x)$.

143 数列从 1,0,1,0,1,0 开始,以后每项为前 6 项之和的个位数,证明:不可能出现 0,1,0,1,0,1 片段.

144 (小知识)克罗内克(Kronecker)定理.

145 已知:平面上有限条直线(其中任意三条不共点)将平面分成有限个区域,若两个区域有一条公共边(可以是直线、射线、线段),则称这两个区域是相邻的,问:是否能将每个区域标上一个实数,满足:(1)任意两个相邻区域内的实数之和小于它们的乘积;(2)每条直线同一侧各区域的实数之和为 0.

146 设 a,b,c 为一三角形的三边之长,S 为面积,求证:$-6a^2+10b^2+123c^2\geqslant48\sqrt{3}S$.

147 C 是 $xy=1$ 的图像,C 关于直线 $y=2x$ 的对称图像是 C',已知 C'可以写成 $12x^2+bxy+cy^2+d=0$ 的形式,求 bc 的值.

148 已知$\triangle ABC$ 中,顶点 $A(2,1)$,$B(-1,-1)$,$\angle C$ 的平分线的方程为 $x+2y-1=0$,求顶点 C 的坐标.

149 3 个圆半径都是 3,中心分别在(14,92),(17,76),(19,84),过点(17,76)作一直线,使得这 3 个圆位于直线某一侧的部分的面积和等于这 3 个圆位于这条直线另一侧的部分的面积和,求这条直线的斜率的绝对值.

150 证明:$\frac{1}{m+1}C_n^0-\frac{1}{m+2}C_n^1+\frac{1}{m+3}C_n^2+\cdots+\frac{(-1)^n}{m+n+1}C_n^n=\frac{n!\ m!}{(n+m+1)!}$($m\geqslant0$ 且 $m\in\mathbf{Z}$).

151 已知平面上 10 个圆,任意两个圆都相交,是否存在直线 l,与每个圆都有公共点?证明你的结论.

152 求满足如下条件的最小正整数 n,在圆周上任取 n 个点