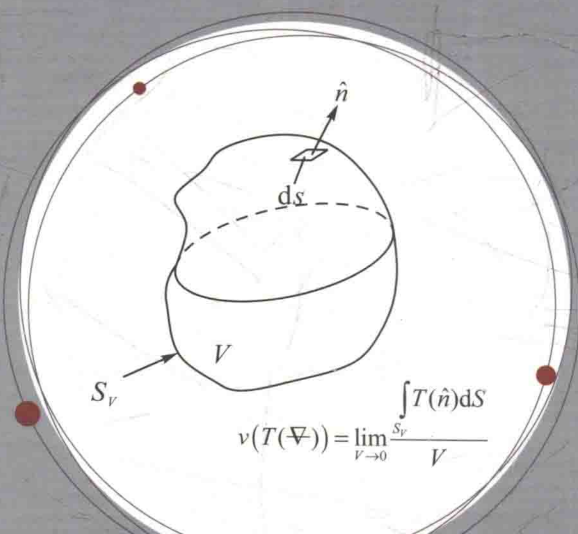
盛克敏　唐晋生　冯　菊／著

矢量分析新理论及其应用



科学出版社

矢量分析新理论及其应用

盛克敏　唐晋生　冯　菊　著

科学出版社
北　京

内容简介

本书在简单介绍坐标系的基本知识和原有矢量分析的主要内容及其存在问题的基础上，着重叙述戴振铎教授创立的矢量符号法新理论。在“积分定理”一章中，以新理论中的概念证明了已有的积分公式，其方法简便、巧妙。本书最后一章叙述以新理论为基础的并矢分析，以及对并矢分析在电磁理论中的应用——并矢格林函数理论，也作了详细的阐述。

本书可供数学专业、物理专业、电类专业，及其他与矢量分析有关专业的科技人员和学生参考，或作为有关课程的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

矢量分析新理论及其应用／盛克敏，唐晋生，冯菊著. —北京：科学出版社，2017.6

ISBN 978-7-03-052676-2

Ⅰ.①矢… Ⅱ.①盛…②唐…③冯… Ⅲ.①矢量-分析-研究 Ⅳ.①O183.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 096839 号

责任编辑：罗 莉／责任校对：邓丽娜 刘莉莉

责任印制：余少力／封面设计：墨创文化

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

四川煤田地质制图印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017年6月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2017年6月第一次印刷 印张：9 3/4

字数：182 千字

定价：58.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

谨以本书献给清华北大物理系老前辈,尊敬的

叶企孙教授

前　　言

本人盛克敏，1954 年进入北京大学物理系学习，1959 年毕业。与北京大学物理系老前辈叶企孙教授虽有生活时代、专业上的交集，却始终无缘谋面，但对叶老之品德及学识万分钦佩。故以此书献给尊敬的叶企孙教授。

本书作者于 20 世纪 90 年代就接触到了戴振铎教授关于矢量分析的新理论，觉得很有道理。后来，发现戴教授原来工作中存在一些不足，对此作者也写过一些文章。当时觉得有必要推广这个新的理论，后来由于一些别的事情就放下了。近一年来，才下决心要写一本介绍戴教授新理论的书，同时，也将作者的有关研究成果(包括已发表与还未发表的，以及一些思考)纳入其中。西南交通大学领导，特别是研究生院和教务处领导对此想法大力支持，解决了编写、出版经费的问题。科学出版社的有关人员，也为本书的出版花费了很大精力，在此一并表示感谢。还要特别提出，邹德友同学和王辉同学为本书的插图及附录做了大量工作，作者对他们为本书做出的贡献表示衷心的感谢。

作者欢迎对本书的任何批评、指正和讨论。(联系方式：电子邮箱：kmshemg1@163.com。)

本书作者盛克敏已年届八旬，在本书撰写过程中得到妻子罗莉兰，以及其他亲友们的鼓励、帮助和支持，在此也表示衷心感谢。

盛克敏

2017. 4

目　　录

第1章 绪 论

“矢量分析”是电磁场理论的最基本数学工具之一，简单说，就是与矢量有关的微积分运算。它最初是在电磁场理论的研究中发展起来的。最早，Maxwell在总结他的电磁理论时用的还是四元数(quaternion)，四元数包括了由一个元表示的标量和另外由三个元表示的空间矢量。Gibbs 将后者单独分离出来，发展建立了矢量分析的基本理论。后来，矢量分析广泛地被应用在物理学的其他分支，如各种力学等的分支中。

具体地说，“矢量分析”的核心内容就是所谓的三个关键函数(key function)，即：标量函数(场)的梯度，矢量函数(场)的散度和旋度，分别表示为：grad f，div $\boldsymbol{F}$ 和 rot $\boldsymbol{F}$ (或 curl $\boldsymbol{F}$)，其中，标量函数 f 和矢量函数 $\boldsymbol{F}$ 都是空间的函数，可写为 $f(x, y, z)$ 和 $\boldsymbol{F}(x, y, z)$。

Gibbs 在 1881 年和 1884 年出版的关于矢量分析的讲义中，从原始定义出发，就已经推出以下关系式[①]：

$$\mathrm{grad}\, f = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}f + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}f + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}f = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)f = \nabla f \tag{1-1-1}$$

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{F} = \hat{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{F} + \hat{j}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{F} + \hat{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{F} = \left(\hat{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\cdot\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{F} = \nabla_{.}\,\boldsymbol{F} \tag{1-1-2}$$

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{F} = \hat{i}\times\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{F} + \hat{j}\times\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{F} + \hat{k}\times\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{F} = \left(\hat{i}\times\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\times\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\times\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{F} = \nabla_{\times}\boldsymbol{F} \tag{1-1-3}$$

并将它们记作 ∇f、$\nabla_{.}\,\boldsymbol{F}$ 和 $\nabla_{\times}\boldsymbol{F}$，其中，$\nabla_{.}\,\boldsymbol{F}$ 和 $\nabla_{\times}\boldsymbol{F}$ 中的点和叉稍稍偏下，但在该书中找不到将它们定义成是 ∇ 与 $\boldsymbol{F}$ 的标量积和矢量积的内容。可见，Gibbs 也没有认为它们是标量积和矢量积。其中的点和叉，或许只是用来表示其与点乘和叉乘有关，仅用作下标而已。

在笛卡儿坐标系中，将 $\boldsymbol{F}$ 表示为

$$\boldsymbol{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} \tag{1-1-4}$$

其中，$\hat{i}$、$\hat{j}$、$\hat{k}$ 为单位基矢(basic vector)，F_x、F_y、F_z 为 $\boldsymbol{F}$ 在相应方向上的分量(component)，因此得

① 在对 Gibbs 理论的介绍中，为阅读方便，本书在后续内容中将当时用的符号已改为目前常用的符号了。

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \nabla\cdot\boldsymbol{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{1-1-5}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \nabla\times\boldsymbol{F} = \hat{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \tag{1-1-6}$$

但在以后的表述中，始终没有将$\nabla\cdot\boldsymbol{F}$和$\nabla\times\boldsymbol{F}$中的$\nabla$分离出来。Gibbs 用了 3 个算符来分别表示式(1-1-1)～式(1-1-3)：

$$\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} = \sum_i \hat{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1-1-7}$$

$$(\nabla_{\cdot})_{\mathrm{G}} = \hat{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\cdot\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z} = \sum_i \hat{x}_i \cdot\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1-1-8}$$

$$(\nabla_{\times})_{\mathrm{G}} = \hat{i}\times\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\times\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\times\frac{\partial}{\partial z} = \sum_i \hat{x}_i \times\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1-1-9}$$

其中，对 i=1、2、3 求和处，x_i=x、y、z 和 $\hat{x}_i=\hat{i}$、$\hat{j}$、$\hat{k}$，是笛卡儿坐标系中的基本单位矢量。式(1-1-8)和式(1-1-9)是两个与式(1-1-7)不同的独立算符。

1901 年，Gibbs 的学生和同事 Wilson，以 Gibbs 的讲义为基础，正式编辑、出版了《矢量分析》一书。在其中，将$(\nabla_{\cdot})_{\mathrm{G}}$和$(\nabla_{\times})_{\mathrm{G}}$中的$\nabla$单独分离开来，把$(\nabla_{\cdot})_{\mathrm{G}}\boldsymbol{F}$和$(\nabla_{\times})_{\mathrm{G}}\boldsymbol{F}$写成$\nabla\cdot\boldsymbol{F}$和$\nabla\times\boldsymbol{F}$，并直接解释为$\nabla$和$\boldsymbol{F}$的标量积和矢量积，其中，$\nabla$就是式(1-1-7)中的算符。但是，又附加了在具体计算时需要将偏导数算符$\dfrac{\partial}{\partial x}$等跨过点或叉先作用于矢量$\boldsymbol{F}$上的条件：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\boldsymbol{F} = \left(\hat{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\cdot\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{F} \tag{1-1-10}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{F} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\boldsymbol{F} = \left(\hat{i}\times\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\times\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\times\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{F} \tag{1-1-11}$$

但∇终究还不是一个矢量，所以加上了“形式上的”的字样，以示区别，称为形式标量积(formal scalar product，FSP)和形式矢量积(formal vector product，FVP)。这样的表示方法，戴教授称之为积模型(product model)。

这种说法或解释的不合理之处在于：①∇不是实在矢量，本质上是一个算符，只是带有某种矢量的性质，其作用于某个函数的结果不能称为积；②∇在 div $\boldsymbol{F}$ 和 rot $\boldsymbol{F}$ 中不是同一个算符；③偏导数符号作为矢量的分量必须写在单位矢量的右边，不然，就要假定偏导数算子不作用于其本身的单位矢量；④数学上，两种运算可以交换是要一般证明的，不能随便假定，现在偏导数算符必须跨过点或叉先作用于矢量$\boldsymbol{F}$上的条件(假定)是没有根据的；⑤在一般正交曲线坐标情形下，求导运算如不跨过点或叉直接作用于矢量$\boldsymbol{F}$，即先进行点或叉的运算，就会得到错误的结果。例如，即使在圆柱坐标系中，积模型的错误也是很明显的。

例如，在圆柱坐标系中，考虑到度规系数，有

$$\nabla=\sum_i \hat{v}_i \frac{\partial}{h_i \partial v_i}=\hat{r}\frac{\partial}{\partial r}+\hat{\varphi}\frac{\partial}{r\partial\varphi}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

其中，$(v_1, v_2, v_3)=(r, \varphi, z)$ 为坐标，$(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3)=(\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{z})$ 和 $(h_1, h_2, h_3)=(1, r, 1)$ 为相应的基本单位矢量和度规系数，基本单位矢量两两正交。矢量函数可以表示为

$$\boldsymbol{F}=F_r\hat{r}+F_\varphi\hat{\varphi}+F_z\hat{z}$$

其中，F_r、F_φ、F_z 为相应的分量，于是，若按积模型就有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r}+\hat{\varphi}\frac{\partial}{r\partial\varphi}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(F_r\hat{r}+F_\varphi\hat{\varphi}+F_z\hat{z}\right)=\frac{\partial F_r}{\partial r}+\frac{\partial F_\varphi}{r\partial\varphi}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

但这个结果是错误的。正确的结果应该为

$$\frac{\partial F_r}{\partial r}+\frac{F_r}{r}+\frac{\partial F_\varphi}{r\partial\varphi}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

其中，用到了基本单位矢量的正交性和它们的导数公式，完整地写出来，总共应该有 18 项，但在这里，其余的项因为基矢的正交性的原因或基矢的导数正巧为零而不存在了。这才是正确的结果。

其实，正确的表示本来应该是式(1-1-1)～式(1-1-3)，它们分别是根据 3 个关键函数的原始定义推导出来的。实际上，式(1-1-4)中的每一项求导的结果，由莱布尼兹(Leibniz)求导规则，也应该得到 2 项，如：

$$\frac{\partial}{\partial x}F_x\hat{i}=\frac{\partial F_x}{\partial x}\hat{i}+F_x\frac{\partial\hat{i}}{\partial x}$$

由于在笛卡儿坐标系中，有

$$\frac{\partial\hat{i}}{\partial x}\equiv 0$$

$$\hat{i}\cdot\hat{j}=\delta_{ij}=\begin{cases}0,(i\neq j)\\1,(i=j)\end{cases}$$

$$(i,\ j=x,\ y,\ z)$$

于是，只留下 1 项 $\frac{\partial F_x}{\partial x}$。

对另 2 个分矢量在另 2 个方向上的求导，也有类似结果，于是得式(1-1-5)。至于得到式(1-1-9)则要用到

$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}\qquad(\hat{i},\ \hat{j},\ \hat{k}=\hat{x},\ \hat{y},\ \hat{z})$$

于是式(1-1-5)，正好是 ∇ 和 $\boldsymbol{F}$ 在点乘意义上的结合，而式(1-1-6)也正好是 ∇ 和 $\boldsymbol{F}$ 在叉乘意义上的结合。

实际上，∇ 的本质是一个算符(求导)，自然要进行正确的求导过程，若先进行了点乘或叉乘，$\boldsymbol{F}$ 中的基本单位矢量或已消失(点乘)或发生了改变(叉乘)，就无法对原来 $\boldsymbol{F}$ 中的基本单位矢量正确求导，所以，导致错误是很自然的。只是，在笛卡儿坐标系的条件下，基本单位矢量的导数处处为 0，其本身只是作为一个常系数出现，于是，便出现了两种相同的结果。所以，只不过是 Wilson 把问题搞反了，他把只在特殊情况下正确，但在一般情况下可能错误的结论拿来作为定义，而强加一些条件来弥补错误。

自 1901 年以来，可能是由于其直观性强、便于记忆，或因当时大多采用笛卡儿坐标系，没有遇到很大的问题，于是这种错误的概念反而受到了广泛的欢迎。至 1943 年，《矢量分析》一书先后重新印刷了 7 次，至 1960 年，发行至世界各国。到 20 世纪 90 年代初，据戴振铎教授收集到的不完全资料，直接采用或默认这种观点的教材、专著就不下 50 余种，其中也不乏像 Feynman、华罗庚那样的大学者写的书。在一般正交曲线坐标情形下，上述错误概念会遇到问题，人们就附加一些假定来弥补，也得出了正确的结论，但根本问题还是没有解决。

直到 1994 年，戴振铎教授提出了他的矢量符号[①]法，才彻底地解决了问题。戴振铎教授的矢量符号法的主要内容如下：

(1) 定义了矢量符号和矢量符号表达式。矢量符号(vector symbol) $\not\nabla$ 是一个带有矢量性质的符号，在至少包含有一个矢量因子的乘积表达式中取代一个矢量，从而得到一个矢量符号表达式(expression of vector symbol)。例如，最简单的双因子矢量表达式，只可能有 3 种，即 $a\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，其中 a 为标量；$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为矢量。这 3 个矢量表达式中各有 1 个矢量被 $\not\nabla$ 代替，成为矢量符号表达式 $a\not\nabla$，$\not\nabla\cdot\boldsymbol{b}$，$\not\nabla\times\boldsymbol{b}$。它们是最简单的双因子矢量符号表达式。其中的 $\not\nabla$ 满足矢量代数运算的所有特性，如 $a\not\nabla=\not\nabla a$，$\not\nabla\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\not\nabla$，$\not\nabla\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\not\nabla$。它们可以用统一的一个符号 $T(\not\nabla)$ 表示，其中，省略了真实函数 a、$\boldsymbol{a}$ 等。但归根到底，它还是一个符号，不代表任何具体的量。进而，定义一个“积分-比-极限”来给矢量符号表达式赋值[②]。对一个双因子矢量符号表达式，定义其赋值公式为

$$v(T(\not\nabla))=\lim_{V\to 0}\frac{\oiint_{S_V} T(\hat{n})\mathrm{d}S}{V} \tag{1-1-12}$$

其中，S_V 为 V 的表面，$\hat{n}$ 为 S_V 上的法向单位矢量。这是一个无坐标(coordinateless)式，可对任何坐标系成立(图 1-1-1)。在一般正交曲线坐标系中的一个基础“平行六面体”上，通过计算式(1-1-12)，导出了该赋值公式的微分形式：

① 戴教授原来将它们命名为符号矢量和符号矢量表达式，今改。

② 戴教授原来将右端的极限式仍记作 $T(\not\nabla)$，今改。

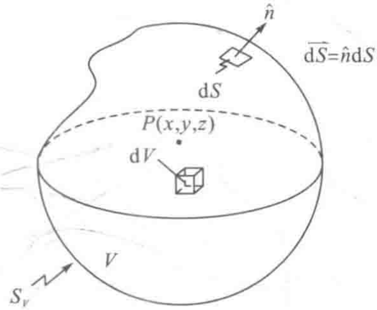


图 1-1-1

$$v(T(\rlap{-}\nabla)) = \frac{1}{\Omega}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial v_i}\left(\frac{\Omega}{h_i}T(\hat{v}_i)\right) \tag{1-1-13}$$

其中，$\hat{v}_i$ 为正交曲线坐标系中的基本单位矢量(图 1-1-2)。

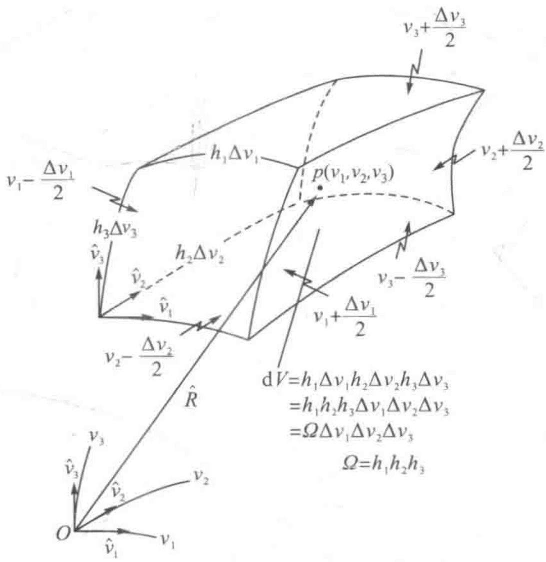


图 1-1-2

(2)对三种可能的双因子矢量符合表达式赋值的结果，正巧就是矢量分析中的三个关键函数，也就是说，三个关键函数就是统一定义式下的三个不同的特殊情形而已：

$$v(\rlap{-}\nabla f) = \sum_{i=1}^{3}\hat{v}_i\frac{\partial}{h_i\partial v_i}f \tag{1-1-14}$$

$$v(\nabla\!\!\!\!-\cdot \boldsymbol{F})=\sum_{i=1}^{3}\hat{v}_i\cdot\frac{\partial}{h_i\partial v_i}\boldsymbol{F} \tag{1-1-15}$$

$$v(\nabla\!\!\!\!-\times \boldsymbol{F})=\sum_{i=1}^{3}\hat{v}_i\times\frac{\partial}{h_i\partial v_i}\boldsymbol{F} \tag{1-1-16}$$

它们正好代表了三个关键函数，即梯度、散度和旋度的具体表达式，它们分别可以用三个不同的算符作用于某个实在函数的结果来表示，即：

$$v(\nabla\!\!\!\!- f)=\sum_{i=1}^{3}\hat{v}_i\frac{\partial}{h_i\partial v_i}f=\nabla f \tag{1-1-17}$$

$$v(\nabla\!\!\!\!-\cdot \boldsymbol{F})=\sum_{i=1}^{3}\hat{v}_i\cdot\frac{\partial}{h_i\partial v_i}\boldsymbol{F}=\triangledown\boldsymbol{F} \tag{1-1-18}$$

$$v(\nabla\!\!\!\!-\times \boldsymbol{F})=\sum_{i=1}^{3}\hat{v}_i\times\frac{\partial}{h_i\partial v_i}\boldsymbol{F}=\nabla\!\!\!\!\times\boldsymbol{F} \tag{1-1-19}$$

其中，

$$\triangledown=\sum_{i=1}^{3}\hat{v}_i\cdot\frac{\partial}{h_i\partial v_i} \tag{1-1-20}$$

$$\nabla\!\!\!\!\times=\sum_{i=1}^{3}\hat{v}_i\times\frac{\partial}{h_i\partial v_i} \tag{1-1-21}$$

是两个与 ∇ 不同的新算符。它们是 $(\nabla\cdot)_G$ 和 $(\nabla\times)_G$ 算符在一般正交曲线坐标系中的新形式。也就是，戴教授的新理论给出了三个关键函数的统一定义以及两个新的算符。在戴教授的原始文献中，这两个新算符目前还未纳入常用文档处理的软件中，另外，对于梯度，仍采用了 Gibbs 原来的符号。为保持整个理论的完整性和系统性，我们在本书中将梯度算子纳入新算子系统，暂将这三个算符分别表示为 ∇^0 、$\nabla^{\bullet}$ 和 $\nabla^{\times}$，称为 Gibbs-戴符号（Gibbs-Tai notation），或 Gibbs-戴算子（Gibbs-Tai operator），分别用来表示三个关键函数。

$$\nabla^0 f=\mathrm{grad}\, f \tag{1-1-22}$$

$$\nabla^{\bullet}\boldsymbol{F}=\mathrm{div}\boldsymbol{F} \tag{1-1-23}$$

$$\nabla^{\times}\boldsymbol{F}=\mathrm{rot}\boldsymbol{F}\quad 或\ \nabla^{\times}\boldsymbol{F}=\mathrm{curl}\boldsymbol{F} \tag{1-1-24}$$

(3) 导出了矢量符号表达式赋值公式的所有性质。包括推出了两个引理。

第一个引理是：矢量符号在矢量符号表达式赋值公式中符合矢量运算规则，即有

$$v(\nabla\!\!\!\!- f)=v(f\nabla\!\!\!\!-),\quad v(\nabla\!\!\!\!-\cdot\boldsymbol{F})=v(\boldsymbol{F}\cdot\nabla\!\!\!\!-)$$

第二个引理是：对于含有两个以上实在函数的矢量符号表达式 $T(\nabla\!\!\!\!-, f_1, f_2)$，其中，$f_1$、$f_2$ 可以为标量或矢量，其赋值式为

$$v(T(\nabla\!\!\!\!-, f_1,f_2))=v(T(\nabla\!\!\!\!-_1, f_1,f_2))+v(T(\nabla\!\!\!\!-_2, f_1,f_2))$$

其中，$\nabla\!\!\!\!-$ 的下标 1 与 2 分别表示相应的赋值式中令 f_2 或 f_1 为常数（因子），而 f_2 与 f_1 在表达式中是相乘的形式存在的。实际上，$\nabla\!\!\!\!-_1$ 和 $\nabla\!\!\!\!-_2$ 作为矢量符号，是没有

区别的，在赋值式中，它们对应于求导算子，所以，这也可看做在微分表达式中，$\nabla\!\!\!\!-_1$ 只对 f_1 起作用，$\nabla\!\!\!\!-_2$ 只对 f_2 起作用。这是 Leibniz 求导规则的变形。

(4) 定意了含有两个(或两个以上)矢量符号的表达式的赋值。式(1-1-12)是双因子矢量符号表达式的定义，若有多个矢量符号，则需将真实函数(标量或矢量)与就近的一个矢量符号组成双因子单矢量符号表达式，对其赋值后，得到的实在函数再与另一个矢量符号组成另一个合理的双因子单矢量符号表达式，再用式(1-1-12)进行赋值，得到最后结果。所谓合理，是指矢量代数允许的。例如两个矢量可以点乘或叉乘，但一个矢量与一个标量只能直接乘，不能点乘或叉乘，但整个式子又不能有二义性，如出现二义性可以采用默认或加括号来确定。如将 $\nabla\!\!\!\!-\times\nabla\!\!\!\!-\times\boldsymbol{F}$ 默认为 $\nabla\!\!\!\!-\times(\nabla\!\!\!\!-\times\boldsymbol{F})$ 等。

$$v(T(\nabla\!\!\!\!-,\ \nabla\!\!\!\!-,\tilde{f}))=v(T_2(\nabla\!\!\!\!-,\ v(T_1(\nabla\!\!\!\!-,\tilde{f}))))=\lim_{V\to 0}\frac{\displaystyle\oiint_{S_V}T_2\left(\hat{n},\lim_{V\to 0}\frac{\displaystyle\oiint_{S_V}T_1(\hat{n},\tilde{f})\mathrm{d}S}{V}\right)\mathrm{d}S}{V}\tag{1-1-25}$$

其中，T_1 与 T_2 复合成 T，这里，$\tilde{f}$ 是一个真实的函数，可以是标量或矢量，上式也可表示为

$$v(T(\nabla\!\!\!\!-,\ \nabla\!\!\!\!-,\tilde{f}))=\frac{1}{\Omega^2}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial v_j}\left(\frac{\Omega}{h_j}T_2\left(\hat{v}_j,\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial v_i}\left(\frac{\Omega}{h_i}T_1(\hat{v}_i,\tilde{f})\right)\right)\right)\tag{1-1-26}$$

若有更多矢量符号，可依此类推。至此，便可推出原来矢量分析微分公式表中的全部公式。这样，就在严格的数学基础上建立起了一套完整的矢量分析的理论。在戴教授的原始工作中，赋值公式的性质是分散叙述的，现在已经将它们系统化了。

作为矢量符号法的延伸应用，其理论贡献还有：

(1) 利用戴教授的赋值公式(即式(1-1-12))进行相反的求和过程，便可得到相应的矢量积分公式。可以无坐标地再次证明所有的已有的矢量积分公式，这些公式在现有的教材中，一般都是将矢量分解到笛卡儿坐标系的三个坐标轴上，然后再在一个标准平行四边形或标准平行六面体上，作具体推导，从而得到要证明的结果。无坐标证明方法直观，简单明了，方法十分巧妙。这是该新理论的一个重要应用。这由本书作者完成，在戴教授的原始工作中是没有的。

(2) 将矢量分析的公式升格为并矢形式，完成了并矢分析，并与格林函数法结合，将并矢格林函数成功应用于电磁理论之中。

(3) 重新推导了一般正交曲线坐标系的单位基矢的导数公式，并得出关于单位基矢导数和的两个重要公式：

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial v_i}\left(\frac{\Omega}{h_i}\hat{v}_i\right)=0\tag{1-1-27}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\hat{\mathrm{v}}_i}{h_i}\times\frac{\partial}{\partial v_i}\left(\frac{\hat{\mathrm{v}}_j}{h_j}\right)=0\quad (j=1,2,3) \tag{1-1-28}$$

相应的公式已有前人做过，但戴教授的方法比较简单。

戴教授将已有并矢的概念进行了系统化，并将其成功地运用于电磁理论中，建立了并矢格林函数法，用这个方法可以对矢量形式的电磁方程直接进行求解，直接得到电磁场的矢量解。这也可作为新理论的一部分。

当然，戴教授的以矢量符号法为基础的矢量分析新理论也还不是完美无缺的。我们认为主要的不足之处在于：①将 $\nabla\!\!\!\!-$ 称为符号矢量(symbolic vector)似不妥，因它终究是一个符号，它没有值，不代表任何量，只是带有某些矢量的性质而已，故还是称矢量符号(vector symbol)为好，相应的表达式也一样；②混淆了矢量符号表达式与其赋值式，将一个没有具体数值的式子，与可以有值的极限式等同起来，这是不恰当的；③一般正交曲线坐标系情形下的并矢分析还存在一些问题，具体问题将在本书正文中相应处指出。

第 2 章　矢量及矢量代数

2.1　笛卡儿坐标系与矢量

在物理学中，常常会遇到与方向有关的量，要描写这些量，必须要有参照物。数学上，这参照物便是坐标系。最简单的坐标系便是笛卡儿坐标系。

空间中的交于 1 点(称为原点)且两两相互垂直的 3 条直线构成 1 个架子，分别给它们各自定 1 个固定的正方向和名称，例如 x、y 和 z；并且 x、y、z 的顺序按右手规则循环。这样的 3 条直线称为轴，轴上任意一点与原点间的距离都与 1 个实数对应。在每根轴上长度为 1，以原点为起点的有向线段，称为基本单位矢量(简称基矢)，用 $\hat{x}$、$\hat{y}$、$\hat{z}$ (或 $\hat{i}$、$\hat{j}$、$\hat{k}$ 或 $\hat{x}_1$、$\hat{x}_2$、$\hat{x}_3$) 表示。这样的 1 个架子，就称为笛卡儿坐标系(Cartesian coordinate system，笛卡儿，法国哲学家、数学家、自然科学家，1596～1650 年)，如图 2-1-1 所示。如果 x、y、z、x、y…按右手顺序，则称为右手的(right-handed)，否则，就称为左手的(left-handed)。

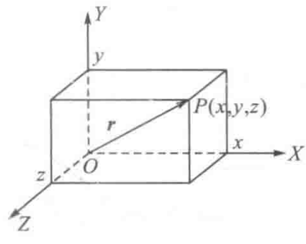


图 2-1-1　笛卡儿坐标系

空间任意一点 P，在 3 根轴上的投影(点)，对应于 3 个固定的数，该点与原点间距离对基矢长度(长度为 1)的比值记作 x、y、z，称为坐标(值)。点 P 的位置，就由这 3 个数(坐标)完全确定，记作 $P(x, y, z)$。x、y、z 也称为分量。有向线段 $\overline{OP}$，称为 P 点的位置矢量(positional vector)，可以用 P 点在轴上的投影和相应的基本单位矢量表示为

$$\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad 或 \quad \boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i \hat{x}_i \qquad (2\text{-}1\text{-}1)$$

设$\overrightarrow{OP}$与3轴的夹角分别为α、β、γ，称为$\overrightarrow{OP}$的方向角(directional angle)，则有

$$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{r}=r(\cos\alpha\hat{\boldsymbol{x}}+\cos\beta\hat{\boldsymbol{y}}+\cos\gamma\hat{\boldsymbol{z}}) \tag{2-1-2}$$

其中，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$为$\overrightarrow{OP}$的长度，$\cos\alpha$等称为相应的方向余弦(directional cosine)，且有

$$\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}=1 \tag{2-1-3}$$

由此看来，一个空间点也可以用它与原点间的距离(其位置矢量的长度)及3个方向余弦来表示，但3个方向余弦中只有2个是独立的。因此，归根到底，空间任意一点可以用3个独立的数表示，或者说由3个独立的坐标(coordinate)决定。

如果在空间的任意一点上都有一个确定的具有方向及大小的量(物理量)，虽然它并不一定是形象化的有向线段，也没有实际的长度，但为方便起见，仍可以这样形象化地表示。必须注意，这些箭头实际上是不存在的，仅仅是一种近似的、形象化表示。因为，被描写为矢量的物理量，是指在某一点的特性，而一个有形的箭头至少包括两点以上，而且，矢量的大小也不是长度。把在某点不同方向测得的该物理量的最大值看作(对应于)是它的(矢量)大小(有时也称长度)，此方向就是此量的方向；在其他方向上测得的值就是它在相应方向上的分量。于是，在数学上也可像上面一样表示与处理，用3个独立的量来表示。例如，用3个坐标轴上的投影，即3个分量，或一个表示大小的量和2个方向余弦(一共仍是3个量)等。这样的物理量也称为矢量，如力、速度等。

2.2 矢量及矢量场

矢量(vector)，又称向量，顾名思义是一个既有大小又有方向的量。在空间的每一点上都有一个确定的矢量，这些矢量的集合就称为矢量场(vector field)，或称矢量函数(vector function)。

若没有参照系，是无所谓方向的，所以，描写矢量首先要确定一个参照系。在数学上最简单的参照系是笛卡儿坐标系。最简单和直观的矢量是位置矢量，它是大小为从坐标原点到某点的直线距离，方向为从原点指向该点的方向的矢量。在空间的每一点上，都有确定的这样一个矢量，这些矢量就构成一个位置矢量场。

相应地，没有方向的量，称为标量(scalar)(或纯数量，pure number 或 pure quantity)，如两点间的距离，温度等。

物理学中，还有许多矢量并没有这样直观，如力、速度、电场强度、磁场强度等，它们都是既有大小又有方向的量，也符合上述矢量的性质，我们也可以用