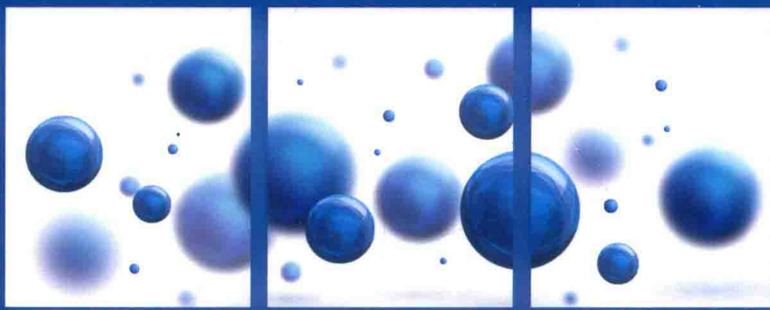
ROBUST ADAPTIVE BACKSTEPPING CONTROL METHODS AND RESEARCH FOR UNCERTAIN NONLINEAR SYSTEMS



不确定非线性系统的自适应Backstepping控制方法及应用

王 锐 著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

不确定非线性系统的自适应 Backstepping 控制方法及应用

王 锐 著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

不确定非线性系统的自适应 Backstepping 控制方法及应用/王锐著. —北京:北京理工大学出版社,2017. 3

ISBN 978 - 7 - 5682 - 3818 - 2

Ⅰ. ①不… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①非线性系统(自动化) - 自适应控制 Ⅳ. ①TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 050459 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
　　　　　(010)82562903(教材售后服务热线)
　　　　　(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www. bitpress. com. cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本 / 710 毫米 ×1000 毫米　1/16
印　　张 / 9. 75
字　　数 / 159 千字
版　　次 / 2017 年 3 月第 1 版　2017 年 3 月第 1 次印刷
定　　价 / 38. 00 元

责任编辑 / 王玲玲
文案编辑 / 王玲玲
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 王美丽

前　　言

当今的经济社会经历着一场强劲的信息科技革命，而实际工程中被控对象本质上均是非线性系统，且往往受到非光滑输入（如死区、时滞、随机因素）的影响，因此，系统模式往往呈现多变性、高度非线性及不确定性。在稳定性分析过程中，不仅要考虑如何来设计控制器、补偿器及观测器，还要补偿未知死区、时滞及随机因素的影响，这显然增加了设计的难度。为这类复杂系统寻求更有效、更精密的智能控制方案受到国内外自动控制领域的高度重视。目前，针对这类系统的控制问题，尚缺乏更加有效化、系统化的控制策略和研究方法。

20 世纪 90 年代以来，基于不确定非线性系统的自适应控制算法已经迅速发展起来，如 PID 控制、鲁棒控制、变结构控制、滑模控制、Backstepping 控制技术等。随着新型智能控制理念的提出，这些传统控制方法与智能控制算法如模糊逻辑系统、小波网络、NN、人工智能、遗传算法得以相结合，在处理不确定非线性系统的控制问题时取得了非常好的控制效果，典型的自适应 NN 控制算法、自适应模糊控制算法等都受到广大学者的青睐。

其中，自适应反推 Backstepping 技术是一类非常重要的控制设计方法，它是 20 世纪 90 年代初由 Kokotovic 与 Kanelakopoulos 等在处理一类具有严格反馈非线性系统的全局镇定跟踪控制问题中首次提出的。Backstepping 技术不再依赖于非线性函数满足匹配条件，能有效解决下三角结构模型非线性不确定系统的迭代控制设计问题，为设计控制器提供了一种通用的迭代构造工具。

然而，Backstepping 设计技术在递归设计过程中需要对上一步的虚拟控制器进行求导，导致“计算膨胀”问题的产生。随着控制系统阶数的不断提高，其计算量呈指数增长趋势。如何更好地改进和应用 Backstepping 设计技术以解决实际控制中的不确定非线性问题，仍然需要进一步研究。

本书基于 Backstepping 设计技术和模糊逻辑系统、动态面控制技术、减少计算量算法、自适应控制等理论及方法，针对非线性系统的不确定性控制问题，系统地介绍了基于 Backstepping 设计技术的动态面状态反馈与

输出反馈控制、减少计算量状态反馈和输出反馈模糊控制、非反推模糊控制的设计方法，以及模糊控制系统的稳定性和收敛性等理论分析，着重反映了自适应 Backstepping 设计方法及模糊控制领域的研究成果和最新动态。本书的内容取材于作者在各种杂志和国际会议上公开发表的学术论文，同时融合了国内外学者在该领域的部分优秀研究成果。

本书的出版得到了国家自然科学基金（61663035）、内蒙古自治区自然科学基金（2015BS0604）及内蒙古科技大学创新基金（2015QDL18）的资助，在此作者表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，书中疏漏之处在所难免，殷切希望广大读者批评指正。

作　者

目　　录

第1章　绪论

1.1　引言

在实际工程应用中，很多动力系统如机械工程、工业控制、计算机网络、生物工程等的大多数被控对象都具有非线性特性。系统中具有不同程度的不确定性和随机干扰，不稳定信号会随机出现，使得系统很难处理，因此对不确定非线性系统的研究意义重大。特别是近20年，由于科学技术的不断进步和人们对控制精度要求的不断提高，传统的线性控制理论在很多领域不再适用，而对非线性系统的研究受到广大学者的关注，并取得了很大的进展。

自从Wiener、Bode、Yquist等人于20世纪40年代创建控制论以来，控制论就迅速发展起来。它经历了从最初的建立在传递函数基础上的解决线性系统控制问题的经典控制理论（40年代），到建立在状态空间（Kalman引入）时域描述基础上的主要解决复杂的非线性系统最优控制问题的现代控制理论（50年代），再到70年代后期相继出现的用于解决更为复杂的不确定系统的新型的智能控制理念，如Rosenbroek等提出的频率域多变量控制理论，Mcculloch、Pitts、Hopfield提出的神经网络控制，Zadeh、Mamdani提出的模糊系统理论等自适应鲁棒控制等。这些理论均为解决这些不确定复杂系统的控制理论研究奠定了坚实的理论基础。

控制理论的研究和实际工程的背景紧密相连。众所周知，在实际的工程控制问题中，多数被控对象均是带有不确定因素的非线性系统。典型的倒立摆系统、机器人系统、计算机网络、生物工程、电力系统和航天航空飞行器等领域的被控系统，在控制过程中均会受到如外界随机干扰、元件老化、测量误差等不可避免的诸多不确定性因素（死区、迟滞、时滞、饱和间隙特性、继电位滞后不饱和现象等）的影响。近20年来，针对这些不确定非线性系统的稳定性控制设计分析成为当今控制理论中一个极为重要的研究领域，并取得了一系列丰硕的研究成果。

然而，在对这些实际的系统进行控制分析时，系统的输出响应及稳定性

不仅与结构参数有关,还与初始条件、输入信号形式有关。在实际建模中,还需要考虑如何获取精确的参数、模型是否简化,以及测量噪声、建模误差、动态时间变化参数、未建模动态等问题。模型建好之后,如何对其进行控制、采取什么样的控制方法、能不能达到预期的控制效果等在具体实施时都存在问题。这些困难均使得非线性不确定系统的研究和处理很不方便。与此同时,随着科学技术的不断进步,各个领域对自动化控制的控制精度、系统稳定性自适应调节能力、响应速度等的要求越来越高,尤其是处理一些精密仪器、导弹制导和卫星空间定位等情形时更是如此。因此,探讨和研究非线性不确定系统的控制问题意义重大,如何寻求更有效、更精密的控制方案成为控制论发展的迫切需求。20 世纪 80 年代以来,基于不确定非线性系统的自适应控制算法已经迅速地发展起来,如 PID 控制、鲁棒控制、变结构控制、滑模控制、Backstepping 控制技术等。随着新型智能控制理念的提出,这些传统控制方法与智能控制算法(如模糊逻辑系统、小波网络、NN、人工智能、遗传算法)不断结合,在处理不确定非线性系统的控制问题方面取得了非常好的控制效果,典型的自适应 NN 控制算法、自适应模糊控制算法等都受到了广大学者的青睐。

1.2 Backstepping 控制技术的发展

反推(Backstepping)设计方法是一类非常重要的控制设计方法,它是 20 世纪 90 年代初由创始人 Kokotovic 与 Kanelakopoulos 等在处理一类具有严格反馈非线性系统的全局镇定跟踪控制问题中首次提出的。Backstepping 技术不再依赖于非线性函数满足匹配条件,其能有效解决下三角结构模型非线性不确定系统的迭代控制设计问题,为设计控制器提供了一种通用的迭代构造工具。

下三角结构系统非常典型,许多实际工程中的动力系统均可以表示为或通过坐标变换转换为下三角结构。下三角结构的非线性系统是指状态空间(SISO)系统的第 i 个子系统的动态结构变化只与整个系统的前 $i+1$ 个状态向量有关,不受后 $n-i+1$ 个状态变量的影响。下三角结构有两种典型的模式:严格反馈系统及纯反馈系统。

严格反馈系统(Strict feedback systems)结构模型如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = g_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i)x_{i+1} + f_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i), i=1,2,\cdots,n-1 \\ \dot{x}_n = g_n(\bar{\boldsymbol{x}}_n)u + f_n(\bar{\boldsymbol{x}}_n) \\ y = x_1 \end{cases}$$

其中，$\bar{\boldsymbol{x}}_i=[x_1,x_2,\cdots,x_i]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^i$，为状态变量；$y\in\mathbf{R}$，为系统输出；$u\in\mathbf{R}$，为系统输入；函数$f_i(\cdot)$，$g_i(\cdot)$表示未知光滑函数，且控制增益函数$g_i(\cdot)$满足条件$|g_i(\cdot)|>g_{i0}>0$，$g_{i0}$为常数。上述状态空间方程描述的系统称为严格反馈非线性系统。严格反馈是指每一个$\dot{x}_i$子系统中的非线性函数$f_i(\cdot)$，$g_i(\cdot)$仅与变量$x_1,x_2,\cdots,x_i$有关，仅受这i个状态变量反馈的影响。当系统状态变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$均为可测时，系统称为状态反馈(State - feedback)情形；当系统的状态变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$不完全可测，只有系统输出$y=x_1$可测时，系统称为输出反馈系统(Output - feedback)。

纯反馈系统(Pure - feedback systems)结构模型如下：

$$\begin{cases}\dot{x}_i=f_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i,x_{i+1}),i=1,2,\cdots,n-1\\ \dot{x}_n=f_n(\bar{\boldsymbol{x}}_n,u)\\ y=x_1\end{cases}\qquad\begin{cases}\dot{x}_i=f_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i,x_{i+1}),i=1,2,\cdots,n-1\\ \dot{x}_n=g_n(\bar{\boldsymbol{x}}_n)u+f_n(\bar{\boldsymbol{x}}_n)\\ y=x_1\end{cases}$$

式中，$\bar{\boldsymbol{x}}_i=[x_1,x_2,\cdots,x_i]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^i$，为状态变量；$y\in\mathbf{R}$，为输出；$u\in\mathbf{R}$，为输入；函数$f_i(\cdot)$，$g_i(\cdot)$为未知光滑函数，$g_i(\cdot)$为控制增益。这类状态空间方程描述的系统称为纯反馈系统(后者称为仿射纯反馈系统)。纯反馈结构是指未知非线性函数$f_i(\cdot)$不仅与前i个状态变量$x_1,x_2,\cdots,x_i$有关，还与状态变量x_{i+1}有关，即受$i+1$个状态变量反馈的影响。

由上述定义可知，纯反馈结构包含了严格反馈、仿射纯反馈为下三角结构的一般动态模型。

这两类系统之所以典型，是因为多数的非线性系统在满足一定微分几何条件下，均可以通过相应的微分同胚变换转化成这两类系统。本书主要基于这两类系统，来探讨改进的 Backstepping 自适应模糊控制算法。

Backstepping 技术还被推广到更广泛的不确定非线性系统中：

(1)时滞非线性系统，解决这类问题的关键是构建一个 Lyapunov - Krasovskii 能量函数来补偿时滞不确定项。

(2)非线性关联大系统，如何适当地处理关联项仍需要广大学者进一步探讨和研究。

(3)随机非线性系统，基于 Itô 随机微分方程的随机非线性系统的 Lyapunov 设计的主要障碍在于 Itô 随机微分不仅涉及梯度，还涉及高阶 Hessian 项。

(4)非线性时变系统，关键是如何处理不规律的时变信号及相关估计学习。

(5)非线性离散系统，由于计算机采集的控制信号均为离散信号，都

需要离线预处理。事实上，离散系统比连续系统更能精确描述实际被控对象，但其基于差分状态空间方程，不能连续求导，因此限制了许多理论的应用。

Backstepping 控制技术的设计思想是反向迭代：首先，将复杂的系统分为若干个子系统；然后，基于 Lyapunov 稳定性理论，为每个子系统构造 Lyapunov 能量函数，并基于迭代设计算法为每个子系统设计虚拟控制器及自适应律，以确保子系统的收敛性；最后，通过反向迭代设计实际控制律，以确保整个闭环系统的稳定性。Backstepping 设计技术是一种极为重要的非线性系统的递推控制器设计方法，非常适合在线控制，可以达到减少在线时间的目的，给非线性系统的控制设计带来了很大的方便。Backstepping 设计技术不仅在不确定非线性控制理论领域起着重要作用，在实际工程控制问题中也得到成功应用，如水下跟踪装置、飞机导弹控制系统等。

然而，Backstepping 设计技术在递归设计过程中需要对上一步的虚拟控制器进行求导，导致“计算膨胀”问题。随着控制系统阶数的不断提高，其计算量呈指数增长趋势，以至于它不利于在线实现及实际应用。同时，Backstepping 设计方法只能处理非线性系统中含有不确定参数的自适应控制问题，难以解决不确定的复杂非线性结构系统的控制设计分析问题。

如何更好地改进和应用 Backstepping 设计技术以解决实际控制中的不确定非线性问题，仍然需要进一步的研究。

1.3 自适应模糊控制

美国科学家 Zadeh 于 1965 年在其开创性论文《Fuzzy Sets》中首次提出模糊系统理论。模糊理论的引入，把人类的判断思维用简化的数学表达式来描述，并用以刻画复杂的系统，为解决不确定复杂非线性系统的控制问题提供了可能。随后，英国学者 Mamdani 于 1974 年将模糊语言逻辑成功地应用于系统控制问题中，标志着模糊控制的诞生。紧接着，丹麦学者 Holmblad 和 Ostergaard 设计了第一个模糊控制器，即水泥窑模糊控制器。模糊控制器的应用在 20 世纪 80 年代后期达到高潮：模糊计算机、水质监控、蒸汽机锅炉控制、核反应堆等。90 年代初以来，各式模糊消费产品问世，如模糊洗衣机、数字图像处理器，这里就不再详细阐述，感兴趣的读者参阅相关文献。2002 年，李洪兴等基于变论域自适应模糊控制实现了四级倒立摆实物的控制，填补了一项世界空白，为模糊控制系统的应用奠定

了基础。

模糊控制主要特点:它是建立在模糊集合论、模糊语言变量及模糊逻辑推理基础上的计算机智能系统理论;把人类的判断思维用简化的数学表达式描述,用以刻画复杂的系统,为解决不确定复杂非线性问题提供了可能性;研究的对象不要求建立精确的数学模型,自适应能力强、鲁棒性能好;适用于更为广泛的系统,有着非常广泛的应用前景。在模糊控制诞生后的40年里,其研究经历了从常规的模糊控制到自学习自适应学习模糊控制、专家模糊控制、PID 模糊控制、模糊预测、神经网络模糊控制及模糊辨识等领域。与此同时,模糊控制被广泛应用于各大领域,如系统控制、信号处理、图像识别、通信控制、计算机网络、集成电路制造及电力系统等工程领域,并取得了显著的应用效果。

目前,模糊控制理论研究集中于以下几个方面:

(1)系统稳定性分析。

将非线性不确定系统理论及自适应鲁棒控制理论与模糊控制相结合,应用于系统的稳定性能分析控制问题的研究。目前,模糊控制大多基于万能逼近理论,即将模糊逻辑系统当作万能逼近器来逼近被控系统的未知不确定部分,从而实现复杂系统的控制问题。然而,关于模糊控制的系统稳定性分析问题主要基于 Lyapunov 函数稳定性分析理论,目前的研究还没有突破这一模式。模糊控制基于规则的控制,控制效率好坏基于规则的构建及数量等;而在实际的控制过程中,如何将专家知识经验用合理的规则描述出来并用于实际的控制,如何提高模糊控制的效率等问题,仍是当今模糊控制研究热点。

(2)模糊控制规则设计方法的研究。

模糊控制的原理是基于规则的控制,如何选取 If - then 规则是最关键的。其中 FLSs(Fuzzy Logic Systems,模糊逻辑系统)的知识分显性及隐性两种,显性可以用模糊语言清晰地表达出来并形成规则形式,而隐性为实验专家知道如何去控制,但无法清晰地用语言表达出来并形成规则。针对显性 If - Then规则来说,目前已经有较为成熟的设计技术,而如何获取隐性知识,还有待进一步研究。与此同时,模糊隶属度的选取、采样周期、量化水平、规则系数、在线学习、隶属函数的调节、模糊控制器设计等问题一直是模糊控制的研究课题之一。

(3)建模与辨识。

模糊控制逐渐建立起来以后,其控制的一个关键问题就是如何获取或优化有效的模糊规则。辨识模型的系统设计分析方法基于给定的系统输入信号

来输出信号数据,可以找到 FLSs 去逼近被控系统。FLSs 比传统的描述法更能充分描述被控系统和专家知识经验,常用的模糊辨识有:模式识别、系统规划法、关系模型的辨识方法、模糊聚类辨识算法、神经网络辨识等。模糊辨识关于抗干扰、对模型的验证及可辨识等问题,还需要进一步研究。

(4)模糊控制应用于实际工程背景的研究。

现在模糊控制主要基于的控制方法为自适应算法,以及人工智能、遗传算法、变结构控制、单纯形法、神经网络控制、动态面控制等。

如何将这些算法更好地应用于高性能模糊控制的设计仍是重要的研究课题之一。如何将上述模糊控制相关理论方法结合现有的各种智能控制算法等应用到实际的工业控制领域,一直受到广大学者的关注,如应用于高智能新领域中的无人机驾驶、汽车自动定位、智能高速系统等。

尽管模糊控制的理论还未实现系统化,待解决的问题还有很多,人们对其认识也不够深刻,但其强大的应用前景推动着模糊控制理论不断完善,并且朝向多元化和交叉学科方向不断发展。我们相信,在未来的研究中,模糊控制必将占据主导地位。

下面介绍相关的模糊逻辑系统(Fuzzy Logic Systems,FLSs)的逼近理论。

模糊逻辑系统或模糊控制器由输入量模糊化算子(Fuzzifier)、知识库(Rules)、模糊推理机(Inference)、输出量清晰化算子(Defuzzifier)四部分组成,其结构如图 1.1 所示。

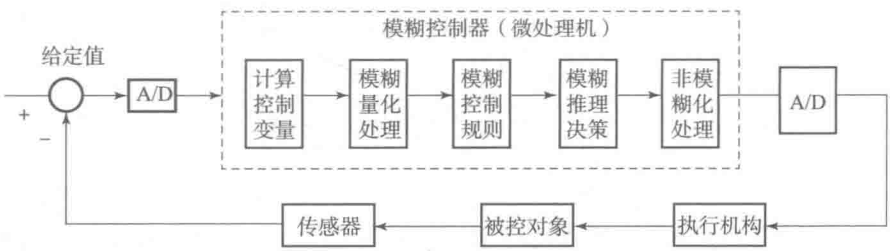


图 1.1 模糊逻辑系统结构

设 $\boldsymbol{x} \in U = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \subset X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \subset \mathbf{R}^n$,为 FLSs 的输入,$y \in V \subset \mathbf{R}$,为 FLSs 的输出,模糊化将系统的实值输入转换为模糊集,模糊 If - Then规则库是模糊推理的核心部分,模糊推理机基于模糊逻辑原理实现从输入语言变量 $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$ 到输出语言变量 $y \in V \subset \mathbf{R}$ 上的映射,而解模糊化是将一个模糊子集输出转化为实值输出,FLSs 的实质则是由输入子空间 U 到输出子空间 V 上的一个非线性映射。模糊化、模糊推理机、去模糊化分别具有多种多样的构造方式,如模糊化方式有单点模糊化、高斯模糊器、三角模糊器等;推理机过程有乘积推理、最小推理、Zadeh 推理机、

Lukasiewicz 推理机、Diened - Rescher 推理机等；去模糊化有重心法、中心平均法、最大值法等。由此，可以组成不同类型的 FLSs，这里将不给出它们的具体形式。现在以多输入 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}$，单输出 $y\in\mathbf{R}$ 为例，介绍几种常用的 FLSs。

设模糊推理 If - Then 规则模糊语句为：

$$\mathbf{R}^l\text{：若 } x_1 \text{ 是 } F_1^l, x_2 \text{ 是 } F_2^l, \cdots, x_n \text{ 是 } F_n^l \text{，则 } y \text{ 为 } G^l, l=1,2,\cdots,M \tag{1.3.1}$$

其中，$F_1^l,F_2^l,\cdots,F_n^l$ 及 B^l 为模糊集，分别由模糊隶属函数 $\mu_{F_i^l}$ 和 μ_{B^l} 来表示；其中 $\bar{y}^l$ 满足 $\mu_{B^l}(\bar{y}^l)=1$，即 B^l 为模糊正规子集，其隶属函数在峰点 y^l 处取到最大值。

（1）由单点模糊化、最小值乘积推理、中心平均加权去模糊化构成的 FLSs：

$$y=\frac{\sum_{l=1}^{M}\bar{y}^l\{\min\{\mu_{F_1^l}(x_1),\cdots,\mu_{F_k^l}(x_k)\}\}}{\sum_{l=1}^{M}\{\min\{\mu_{F_1^l}(x_1),\cdots,\mu_{F_k^l}(x_k)\}\}}$$

（2）由单点模糊化、乘积推理、加权平均去模糊化所得到的 FLSs：

$$y=\frac{\sum_{l=1}^{M}\bar{y}^l\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_{F_k^l}(x_k)\right)}{\sum_{l=1}^{M}\prod_{k=1}^{n}\mu_{F_k^l}(x_k)}=\sum_{l=1}^{M}\bar{y}^l\frac{\prod_{k=1}^{n}\mu_{F_k^l}(x_k)}{\sum_{l=1}^{M}\prod_{k=1}^{n}\mu_{F_k^l}(x_k)}=\sum_{l=1}^{M}\bar{y}^l\xi^l(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\xi(\boldsymbol{x}) \tag{1.3.2}$$

式中，$\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}=[\bar{y}^1,\bar{y}^2,\cdots,\bar{y}^M]^{\mathrm{T}}$，为可调节参数向量；$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})=[\xi^1(\boldsymbol{x}),\xi^2(\boldsymbol{x}),\cdots,\xi^M(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}}$，为模糊基函数；$\xi^l(\boldsymbol{x})$ 定义为

$$\xi^l(\boldsymbol{x})=\frac{\prod_{k=1}^{n}\mu_{F_k^l}}{\sum_{l=1}^{M}\prod_{k=1}^{n}\mu_{F_k^l}}$$

王立新与 Mendel 于 1992 提出了模糊基函数（Fuzzy Basis Function）的概念。这种模型的 FLSs 从函数的角度研究模糊集，在模糊控制理论上具有重要的研究意义，如直接自适应模糊控制用其直接逼近控制器，间接自适应模糊控制基于其万能逼近性，用来逼近任意一连续未知函数等。

（3）T - S 模糊系统：采用形如公式（1.3.1）的模糊 If - Then 规则，后件变为 $y=c_0^l+c_1^lx_1+\cdots+c_n^lx_n$，其中 c_i 为参数。由单点模糊化、乘积推理、加权

平均去模糊化得到的 T - S FLSs：

$$y=\frac{\sum_{l=1}^{M}\sum_{j=1}^{n}c_j^l x_j\prod_{k=1}^{n}\mu_{F_k^l}(x_k)}{\sum_{l=1}^{M}\prod_{k=1}^{n}\mu_{F_k^l}(x_k)}$$

T - S 模型是 Takagi 和 Sugeno 提出的一种定量模糊建模方法，模糊规则前件为输入变量等，后件不是模糊语言值，而是一个关于前件变量的线性函数。T - S 模型是对不确定非线性系统建模的一个重要工具，目前已经广泛应用于系统辨识及控制、故障诊断、决策支持、在线监测等控制问题中。

从人类专家经验的观点来说，FLSs 是一个万能逼近器，已经证明上述 FLSs 均可以以任意精度一致逼近任意一个定义在紧集上的非线性连续函数。

引理 1.3.1 万能逼近定理。

令 $f(\boldsymbol{x})$ 为定义在紧集 $\Omega\in\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 上的任意一个给定的连续函数，则对于任意常数 $\varepsilon>0$，一定存在一个模糊逻辑系统，使得不等式(1.3.3)成立。

$$y=\frac{\sum_{l=1}^{M}\bar{y}^l\left[\prod_{i=1}^{n}a_i^l\exp\left(-\frac{x_i-\bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2\right]}{\sum_{l=1}^{M}\left[\prod_{i=1}^{n}a_i^l\exp\left(-\frac{x_i-\bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2\right]}$$

$$\sup_{x\in\Omega}|f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{W}_f^{\mathrm{T}}\xi(\boldsymbol{x})|\leqslant\varepsilon \tag{1.3.3}$$

式中，$l=1,2,\cdots,M$；$a_i^l\in[0,1]$；$\sigma_i^l\in(0,\infty)$；$x_i^l,y^l\in\mathbf{R}$，均为实值参数。

上述万能逼近定理即王立新于 1992 年基于 Stone - Weierstrass 定理证明的高斯型模糊逻辑系统 $f(\boldsymbol{x})$ 具有万能逼近特性。在实际应用中，隶属函数通常取三角形、梯形及其他的指数型。王士同将王立新的结论推广到具有隶属函数 $\exp(|x|^r)$ 的一类广义隶属函数，证明了这类 FLSs 对未知函数具有万能逼近性。

基于上述万能逼近定理，任意连续非线性函数 $f(\boldsymbol{x})$ 可以表示为

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{W}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})+\varepsilon^*(\boldsymbol{x}) \tag{1.3.4}$$

其中，$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})$ 为模糊基函数，最优模糊逼近向量参数 $\boldsymbol{W}^{*\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^M$ 定义为

$$W^*=\operatorname{argmin}_{\hat{W}\in\Omega_{\hat{W}}}\left\{\sup_{x\in\Omega_{\boldsymbol{x}}}|f(\boldsymbol{x})-\hat{\boldsymbol{W}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})|\right\}$$

$\Omega_{\hat{W}},\Omega_{\boldsymbol{x}}$ 为 $\hat{\boldsymbol{W}}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 的有界紧集；$\varepsilon^*(\boldsymbol{x})$ 为逼近误差。

1.4　非线性系统稳定性基本理论

稳定性是评价系统的一个非常重要的性能指标，决定着一个自动控制系统能否正常运行。稳定性是控制过程中必须首先达到的标准，其次才是高效运行、高精度逼近、自适应鲁棒性能等。俄国数学家 Lyapunov 于 19 世纪在其博士论文《运动稳定性的一般问题》中首次提出稳定性概念并给出相关的稳定性理论分析方法（Lyapunov 稳定性第一方法与第二方法等）。之后，随着自动控制理论的高速发展，Lyapunov 稳定性理论被广泛应用于各种控制系统的理论研究。

下面将给出本书用到的相应的 Lyapunov 收敛性、稳定性定义，以及相关的稳定性定理及判定定理。

首先，引入两个重要函数，即$\mathcal{K}$类函数及$\mathcal{KL}$函数，并给出相关定义。

定义 1.4.1　$\mathcal{K}$类函数：若一个连续函数 $\alpha(s):\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$，满足 $\alpha(0)=0$ 且为严格递增的，则称函数 $\alpha(\cdot)$ 是$\mathcal{K}$类函数，可以记作 $\alpha(\cdot)\in\mathcal{K}$；进而，若满足 $\lim\limits_{s\to\infty}\alpha(s)=\infty$，则称函数 $\alpha(\cdot)$ 为$\mathcal{K}_\infty$类函数。

定义 1.4.2　$\mathcal{KL}$类函数：若一个连续函数 $\beta(s,r):\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}_+$，满足条件：①对于每个给定的变量 s，函数 $\beta(s,r)$ 关于变量 r 是单调递增的，且满足 $\lim\limits_{r\to\infty}\beta(s,r)=0$；②对于每个给定的变量 r，函数 $\beta(s,r)$ 关于变量 s 是一个$\mathcal{K}_\infty$函数，则称函数 $\beta(\cdot,\cdot)$ 是一个$\mathcal{KL}$函数，记作 $\beta(s,r)\in\mathcal{KL}$。

例 1　基于上述两类函数的定义，现在考虑函数 $\gamma(s)=\dfrac{s}{s+1}, s\geqslant 0$。很容易验证 $\gamma(s)$ 满足$\mathcal{K}$类函数的条件，是一个$\mathcal{K}$类函数，但不满足$\mathcal{K}_\infty$类函数条件。函数 $\gamma(s)=s, s\geqslant 0$ 为$\mathcal{K}_\infty$类函数。函数 $\beta(s,r)=\dfrac{se^{-t}}{1+s}, s\geqslant 0, r\geqslant 0$ 满足$\mathcal{KL}$类函数条件，是一个$\mathcal{KL}$类函数。

考虑下面常微分方程所描述的确定性非线性系统：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x},t),\ t\geqslant t_0,\ \boldsymbol{x}(t_0)=x_0 \tag{1.4.1}$$

式中，$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 为 n 维状态向量；函数 $f(\boldsymbol{x},t)$ 是定义在 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}^n$ 上的关于时间变量 t 的分段连续函数，且关于状态变量 $\boldsymbol{x}$ 满足局部 Lipschitz 条件。显然，状态方程(1.4.1)满足解的存在唯一性条件，以 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 为初始条件，其对应的解记为 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$。对于任意 $t\geqslant t_0$，$f(0,t)\equiv 0$，称 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为系统的平衡点。若 $f(\boldsymbol{x},t)=f(\boldsymbol{x})$，$t\geqslant t_0$，则称系统(1.4.1)为时不变系统，即 $f(\boldsymbol{x},t)$ 不随着时间 t 的变化而变化；否则，称为时变系统。

现给出非线性系统(1.4.1)相应的 Lyapunov 收敛性、稳定性定义。

下面给出两个相关收敛性定义。

定义 1.4.3　对于任意时变信号 $Z(t):\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$,若满足 $\lim\limits_{t\to\infty}|Z(t)|=0$,则称信号 $Z(t)$ 是收敛于零的;若满足 $\lim\limits_{t\to\infty}|Z(t)|\leqslant\delta$,即存在时间 T,当 $t\geqslant T$ 时,$|Z(t)|\leqslant\delta$,则称 $Z(t)$ 收敛于零的 δ 邻域 $U(0,\delta)$。

定义 1.4.4　对于任意时变信号 $Z(t):\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$,如果 $\lim\limits_{t\to\infty}\sqrt{\frac{1}{t}\int_0^t\left|Z(\delta)\right|^2\mathrm{d}\sigma}=0$,则称 $Z(t)$ 收敛于零;如果 $\lim\limits_{t\to\infty}\sqrt{\frac{1}{t}\int_0^t\left|Z(\sigma)\right|^2\mathrm{d}\sigma}\leqslant\delta$,即存在时间 T,当 $t\geqslant T$ 时,$\sqrt{\frac{1}{t}\int_0^t\left|Z(\sigma)\right|^2\mathrm{d}\sigma}\leqslant\delta$,则称 $Z(t)$ 收敛于零的 δ 邻域 $U(0,\delta)$。

现在给出稳定性和有界性相关定义。

定义 1.4.5　(稳定、不稳定、渐近稳定、一致稳定、一致渐近稳定 Lyapunov 意义下)

假设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为紧集,称非线性系统(1.4.1)在平衡点 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 处具有:

(1)(稳定性)若对于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0$,使得

$$\|\boldsymbol{x}(t_0)\|<\delta\Rightarrow\|\boldsymbol{x}(t)\|<\varepsilon,\ \forall t\geqslant t_0>0,\ \forall x_0\in\Omega,\ (\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n)\tag{1.4.2}$$

则称系统(1.4.1)在平衡点 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 处是稳定的。

(2)(不稳定性)若系统(1.4.1)在平衡点 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 处不是稳定的,则称系统(1.4.1)是不稳定的。

(3)(渐近稳定性)若系统(1.4.1)在平衡点 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 处是稳定的,同时存在常数 $c=c(t_0)$,满足对于任意 $\|\boldsymbol{x}(t_0)\|<c$,有 $\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t)=\mathbf{0}$,则称平衡点 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 是渐近稳定的。

(4)(一致稳定性)若存在函数 $\gamma(\cdot)\in\mathcal{K}$ 满足

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|<\gamma(\|\boldsymbol{x}(t_0)\|),\ \forall t\geqslant t_0>0,\ \forall\boldsymbol{x}_0\in\Omega,\ (\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n)\tag{1.4.3}$$

则称系统(1.4.1)在平衡点 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 处是一致稳定的。

(5)(一致渐近稳定性)若存在函数 $\beta(\cdot,\cdot)\in\mathcal{KL}$ 满足

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|<\beta(\|\boldsymbol{x}(t_0)\|,t-t_0),\ \forall t\geqslant t_0>0,\ \forall\boldsymbol{x}_0\in\Omega,\ (\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n)\tag{1.4.4}$$

则称系统(1.4.1)在平衡点 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 处是一致渐近稳定的。

若动态系统方程(1.4.1)是非时变的,即函数 $f(\cdot)$ 不显含时间 t,则上述定义中稳定性等价于一致稳定性。对于状态方程(1.4.1)来说,由于一致稳