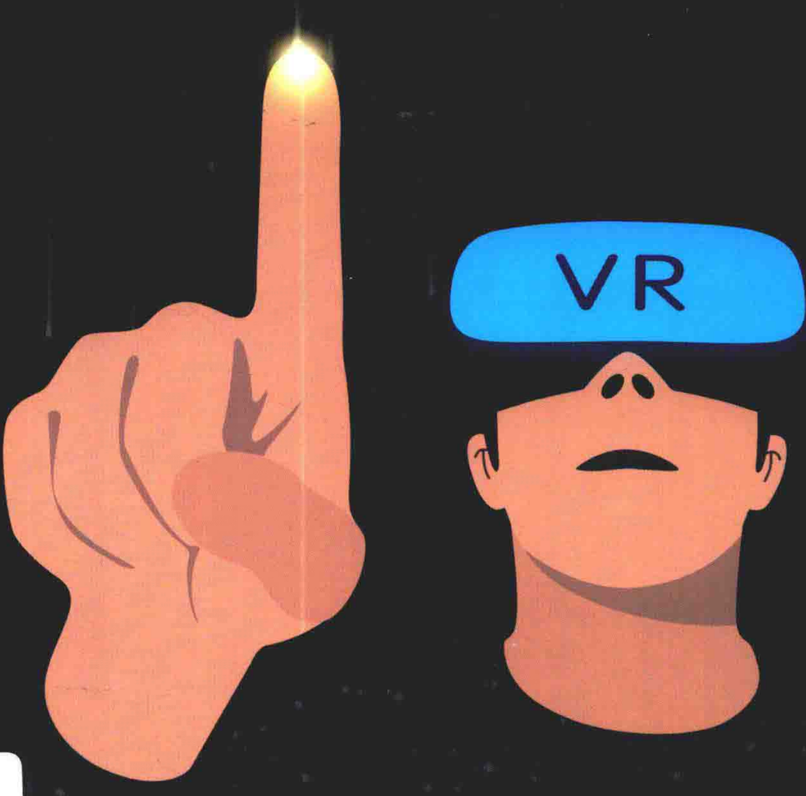
VR三维技术系列

三维模型参数化算法：理论和实践（C#版本）

● 赵 辉 顾险峰 雷 娜 著



中国工信出版集团 電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

VR 三维技术系列

三维模型参数化算法：理论和实践

（C#版本）

赵　辉　顾险峰　雷　娜　著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内容简介

本书介绍了各种三维模型参数化算法。本书一共分为 17 章，详细讲述了曲面参数化、Blender 软件贴图、碟形网格参数化算法、三维模型扭曲度量、和谐参数化算法、迭代参数化算法、基于角度平展参数化算法、位置重建算法、LSCM 算法、DCP/DAP 算法、频谱参数化算法、局部全局参数化算法、高斯曲率参数化算法、线性系统和线性系统函数库的使用。本书包含了所有线性参数化算法的理论和实现。通过本书的学习，可以掌握三维模型贴图的原理以及线性系统在三维算法里的应用。

本书不仅可以作为数字媒体技术专业的专业基础课教材，还可以作为计算机学科和软件工程学科"数据结构和算法"、"计算机图形学"等课程的教材和参考书。

图书在版编目(CIP)数据

三维模型参数化算法：理论和实践：C#版本 / 赵辉，顾险峰，雷娜著. —北京：电子工业出版社，2017.7
(VR 三维技术系列)
ISBN 978-7-121-31682-1

Ⅰ. ①三… Ⅱ. ①赵… ②顾… ③雷… Ⅲ. ①三维动画软件 - 程序设计 Ⅳ. ①TP311.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 120542 号

策划编辑：张　迪
责任编辑：底　波
印　　刷：中国电影出版社印刷厂
装　　订：三河市良远印务有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本：787 × 1092　1/16　印张：16.5　字数：422 千字
版　　次：2017 年 7 月第 1 版
印　　次：2017 年 7 月第 1 次印刷
定　　价：79.00 元

所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888,88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@ phei. com. cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@ phei. com. cn。

本书咨询联系方式:(010)88254469, zhangdi@ phei. com. cn。

前　言

虚拟现实（Virtual Reality）是一项最近非常热门、应用广泛的技术。该技术起源于计算机三维图形学。计算机中这个方向的研究涉及大量的数学、物理、工程、编程以及艺术，需要跨学科协作。除了计算机专业，近几年在软件工程、数字媒体技术等专业也大量开设了这方面的课程。虚拟现实中一个最重要的应用就是模型贴图，即对模型进行纹理贴图，从而使模型看起来更逼真。模型贴图技术依赖于三维模型的参数化算法，也就是把模型从三维空间展开到二维平面，然后才能贴上二维的图片，最后再把两者的信息映射回三维模型上。

三维模型参数化算法涉及微分几何、线性代数等数学知识，可以分为保角参数化、保面积参数化及混合参数化等。保角参数化保持映射前后的角度、面积不变，这样能够保持原始模型的结构。保面积参数化目标是保持局部每个三角形的面积不发生改变。针对这两个目标，设计了各种各样的算法，有线性的，有非线性的。

通常来说，对于一个封闭的三维模型需要切开再进行参数化。但基于计算共形几何的理论，我们也可以不切开，对一个模型进行全局参数化。对于保面积参数化，也可以用最优传输的理论来实现。

本书介绍了各种三维模型参数化算法。本书一共分为17章，详细讲述了曲面参数化、Blender软件贴图、碟形网格参数化算法、三维模型扭曲度量算法、和谐参数化算法、迭代参数化算法、基于角度平展参数化算法、位置重建算法、LSCM算法、DCP/DAP算法、频谱参数化算法、局部全局参数化算法、高斯曲率参数化算法、线性系统和线性系统函数库的使用。本书包含了所有线性参数化算法的理论和实现。通过本书的学习，可以掌握三维模型贴图的原理以及线性系统在三维算法里的应用。

本书不仅可以作为数字媒体技术专业的专业基础课教材，还可以作为计算机学科和软件工程学科“数据结构和算法”、“计算机图形学”等课程的教材和参考书。需要书中部分代码的读者，可发邮件向作者索取，邮箱地址：graphicsresearch@qq.com。

赵　辉

2017年5月于清华大学近春园

作 者 简 介

赵辉，虚拟现实专家、清华大学丘成桐数学科学中心访问学者、哈佛大学访问学者。主要研究计算微分几何、拓扑、三维模型处理算法（三维模型简化、细分、分割、变形、光滑、参数化、向量场、四边形化等）、三维动画算法（骨骼动画、蒙皮算法）、渲染算法（非真实感渲染、实时渲染、基于物理渲染），以及三维技术在3D打印、虚拟现实、增强现实、三维游戏、手机游戏、影视特效等的应用。

顾险峰，师从国际著名微分几何大师丘成桐院士，现为纽约州立大学石溪分校计算机科学系和应用数学系终身教授，清华大学丘成桐数学科学中心客座教授，大连理工大学海天学者，首都师范大学数字几何和成像实验室主任等。2005年获得美国国家自然科学基金CAREER奖，2006年获得中国国家自然科学基金海外杰出青年学者奖，2013年第六届世界华人数学家大会晨兴应用数学金奖等。

顾险峰教授和丘成桐先生及其合作者共同创立了一门新兴的跨领域学科：计算共形几何。这门学科结合了现代几何和计算机科学，广泛应用于计算机图形学、计算机视觉、可视化、几何建模、网络和医学图像等领域。

雷娜，大连理工大学软件学院教授，博士生导师，北京市成像技术高精尖创新中心兼职研究员；中国工业与应用数学学会几何设计与计算专业委员会委员；中国数学会计算机数学专业委员会委员；美国数学会Mathematical Review评论员；清华大学数学科学中心访问教授；纽约州立大学石溪分校计算机系访问教授；德克萨斯大学奥斯汀分校计算工程与科学研究所Research Fellow；中科院数学与系统科学研究院访问学者。主要研究兴趣是应用现代微分几何和代数几何的理论与方法解决工程及医学领域的问题，聚焦于计算共形几何、计算拓扑、符号计算及其在计算机图形学、计算机视觉、几何建模和医学图像中的应用。

反侵权盗版声明

举报电话：(010) 88254396；(010) 88258888
传　　真：(010) 88254397
E-mail：dbqq@ phei. com. cn
通信地址：北京市海淀区万寿路 173 信箱
电子工业出版社总编办公室
邮　　编：100036

目　录

第 1 章 浅谈曲面参数化

1.1 算法和理论（I）

2017 年寒假期间，笔者老顾游历了很多城市，包括武汉、南京、合肥、金华、青岛、郑州、北京、大连，同时访问了许多大学，和很多领域的专家学者探讨了学术问题，进行了一些演讲，从基础数学至计算机科学，再到具体应用。青年学者们的求知热情非常令人感动。因为每次演讲都是蜻蜓点水，无法将内容讲解透彻，因此老顾计划撰写几篇博文，将相关主题进行深入探讨。

从历史的全局观点来看，工程技术的发展不停地对纯粹科学提出挑战，从而促进理论的发展，同时反过来理论的建立指导着技术实践，为技术的进一步发展指明了方向。历史就是这样循环往复、螺旋上升的。但每个人的生命历程相对短暂，终其一生，只能窥见历史螺旋中的一小段弧线。并且，实际情形非常复杂，历史洪流经常有回旋湍流、泥沙俱下，渺小的个人被裹挟其中，经常身不由己、迷失方向，在无可奈何中随波逐流、蹉跎岁月。

在过去的科研教学中，笔者老顾与纯粹数学家和计算机科学家都有长期合作，他们的知识结构不同，价值观念迥异，在很大程度上分别代表了科学和技术两种文化理念。工程技术人员非常注重算法工艺的开发，强调实用价值，目的在于创新当前技术，推动时代的发展。其研究方法侧重于经验的积累，唯象方法的总结；基础科学家则专注于深刻理论的建立，忽视短期的经济回报，强调长远的价值，推动整体文明的发展。其研究方法侧重抽象理论的建构、苛求严格性、永恒性。

笔者老顾经常遇到计算机科学背景的学生和基础数学背景的学生，他们不同的知识结构和职业训练给了他们非常不同的价值取向和审美品位。很多计算机科学的学生刻意磨炼动手能力，经常陶醉于自己实现的算法程序，追求能够创业的新颖想法，但对于算法的严格性、算法所依据的理论完备性，没有苛求；基础数学的学生注重磨炼抽象思维能力，对于深刻宏大的理论孜孜以求，对于各种数学结构及其内在联系非常敏感，并且能够产生深刻的审美体验，但对于如何将抽象的理论应用于实践有所忽视。笔者老顾在清华大学、大连理工大学和首都师范大学都教授过计算共形几何课程。有很多计算机科学系的学生非常热衷学习并实现各种算法，但比较抵触拓扑和几何理论；也有数学系的学生专注而热切地学习相应的理论，但对于算法部分嗤之以鼻。其实，这些学生都是缺乏人生阅历的年轻人，所处的相对单纯的人文环境塑造了相对狭窄的学术视野。同时，年轻人所面临的学位、就业压力，所在领域的价值取向，使得他们无法自由地向学术纵深探索。例如，有一位计算机图形学领域的博士生，他的博士专题是曲面参数化。他花费了巨大的精力研读了计算机图形学领域顶级期刊中

所有的相关文章，由此构建了他这一方面的知识结构，并且将个人的改进创造融合到时下最为时髦的方法之中，发表在计算机科学的期刊上，得到了学术界的认可，获取了博士学位。但是，他所发明的算法依然停留在经验性方法阶段，他没有真正深究其后的理论，一方面是因为其知识结构的不足，无法真正在理论方面有所突破，另一方面也由于工程界忽视理论的严密性，完全认可经验性的方法，同时更是为生活压力所迫，力求尽早拿到学位。

笔者老顾也经常遇到社会地位稳定的学者们，他们对于技术、理论的问题的态度更为成熟而深邃。很多功成名就的计算机科学家，他们最大的遗憾就是自己的发明创造被时代所抛弃。比如，计算机图形学领域的泰斗级学者 Tom Sederberg 教授，有一次告诉笔者老顾他的亲身经历。Sederberg 教授刚出道时，计算机的存储和计算能力都非常有限，曲面的主要表示方法是样条曲面（Spline Surface），图形学中曲面渲染（Rendering）的主要方法是光线跟踪法（Ray Tracing）。光线跟踪法需要计算一条射线和曲面的交点，射线的方程是 $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{e}+t\boldsymbol{d}$，这里 $(\boldsymbol{e},\boldsymbol{d})$ 代表相机的光心和射线方向；样条曲面是一种参数表示，$\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$，需要被转换成所谓的隐式表示 $f(x,y,z)=0$，从而和射线方程联立，求得交点。Sederberg 教授的成名作就是用代数几何中的结式（Resultant）方法将样条曲面隐式化（Implicification）。但是，随着时代的发展，计算机存储和计算能力的提高，在数字媒体、电影游戏领域曲面都是用三角网格来表示的，曲面渲染算法主要是用 OpenGL，即便用光线跟踪法，样条曲面也是用三角网格来逼近。Sederberg 教授的隐式化方法迅速被遗忘，并且一度被评为几何建模领域十大无用算法之首。这件事情曾经深深地刺激了 Sederberg 教授，使得他发愤图强，发明了现在被广泛应用的 T－样条理论和算法。也有一些计算机科学家在某个领域独领风骚，发明了影响深远的算法，但是苦恼于无法深刻理解所研究现象的本质和其算法的适用范围。更多的计算机科学家也忧虑自己的发明具有鲜明的时效性，无法长久传世。纯粹数学家相对较少怀疑自身研究成果的恒久价值，但苦恼于无法被普罗大众所理解，距离国计民生过于遥远。

在大连理工大学演讲时，罗钟铉教授大发感慨："中国现在是大国，但还不是强国。中国有着数千年的历史，发明过璀璨的技术，但没有发展出完备成熟的理论体系。因此许多技术在近代失传。目前的社会比较急功近利，在喧嚣浮躁中更加需要追求深刻追求永恒的精神。"

如果我们将眼光放长远，考察科技发展历史，我们的确能够看到技术和理论相辅相成、相互促进的发展历程。在计算机图形学中有一个非常独特的领域：曲面参数化，其 20 年的发展历程佐证了技术和理论相互作用的历史发展观。我们计划首先介绍如何用工程方法来研究曲面参数化问题，然后介绍从古典几何理论如何理解这一问题，最后介绍如何基于古典理论来建立现代离散理论。

1.2　算法和理论（II）

1. 时代的要求

20 世纪 90 年代，计算机图形学技术异军突起，特别是 GPU 技术的发明和普及，使得 CG 电影工业和电子游戏产业蓬勃发展。在 GPU 中，曲面数据处理被分成两条流水线：一条处理曲面的几何数据和几何变换，如曲面的平移旋转、射影变换等；另一条处理曲面的纹理

信息，如颜色、法向量场、局部几何细节鳞片结构、局部材质特性 BRDF 等。几何数据结构一般是多面体三角网格，纹理数据结构一般是平面图像。在图形渲染过程中，两条流水线的处理结果相互融合，将平面的二维纹理粘贴到弯曲的三维曲面上，这一技术称为**曲面纹理贴图**。

纹理贴图技术在数学上等价于求从曲面到平面区域的一个光滑双射，这称为所谓的**曲面参数化**问题。如图 1–1 所示，我们将各种曲面映射到平面区域，然后在平面参数区域上贴上纹理图像，通过逆映射将纹理图像拉回三维曲面。如图 1–2 所示，我们将大理石纹理贴在米开朗基罗的大卫头像上面，从而获得了大理石雕像的质感。

图 1–1　曲面参数化

图 1–2　曲面纹理贴图

参数化不可避免地会带来畸变。通常，映射的畸变可以归为两类：角度畸变和面积畸变。角度没有畸变的映射，称为共形变换，或者保角变换；面积元没有畸变的映射，称为保面积变换。图 1–3 所示为一个保角参数化的实例。这一映射将一个三维人脸曲面映射到平面圆盘上。我们在人脸曲面任意画两条相交曲线，这两条曲面上的空间曲线被映射到平面上的两条曲线，空间曲线的交点被映成平面曲线的交点，在交点处，空间曲线的夹角等于平面曲线的交角。这两条空间曲线任意选取，其交角被映射完美保持。

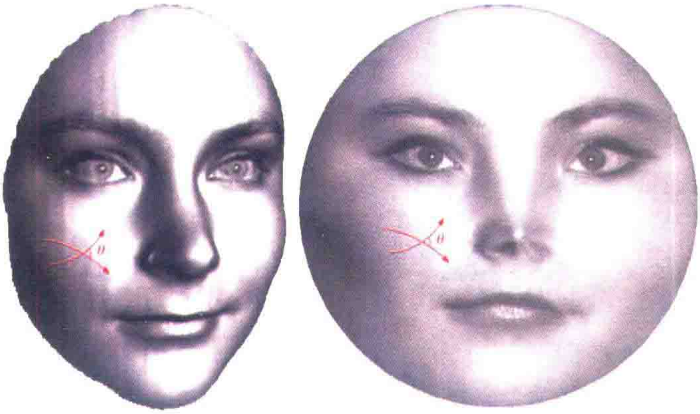


图 1–3　保角参数化实例

如图 1–4 所示为保面积参数化的一个实例。同样的人脸曲面被映射到平面圆盘，通过整体缩放变换，人脸曲面的总面积等于平面圆盘的总面积。我们在人脸曲面上任选一个子区

域 Ω，映射将 Ω 映射到平面一个区域，则曲面上的区域面积等于平面区域的面积。曲面参数化的一个长期目标就在于寻求严格而实用的算法，计算保角和保面积的映射。

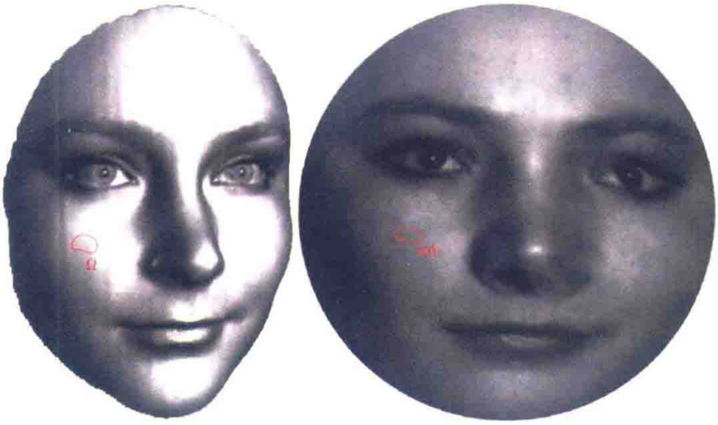


图 1–4　保面积参数化实例

在纹理贴图技术被发明之前，计算机图形学所需要的较深数学技巧包括矩阵求逆、旋转群的四元数表示（Quaternion）和渲染算法背后的积分方程、不动点理论；纹理贴图技术出现之后，曲面参数化需要更为深入的代数拓扑和微分几何的理论支撑。但是，绝大多数计算机科学系的基础课程都不包括代数拓扑和微分几何，这为年轻的学生理解跟踪曲面参数化领域的研究增加了难度。

2. 研究的范式

在过去的 20 年间，曲面参数化领域蓬勃发展，各种算法层出不穷，出现了百花齐放、百家争鸣的局面。海量的研究成果既有极其具有原创性的突破，也有拾人牙慧的跟风之作，更有人为运作的学术泡沫。这方面的工作需要长久的时间来蒸馏，20 年的时间依然太短。我们试图在各种流派中寻求统一的研究模式，并对于各种研究范式加以比较。

第一种研究范式比较工程化。首先将映射的质量要求表述成数学公式，然后通过积分这些公式来设计出相应的能量，运用常见的优化方法来优化能量，从而得到曲面参数化结果，最后选择几个算例和其他方法比较来彰显所提出算法的优越性。这种方法基于经验，简单直观，容易实现，绝大多数的工作遵循这一范式。这种方法无法保证解的存在性、唯一性和光滑性，缺乏全局拓扑观点，无法揭示几何现象的深刻层面。

第二种研究范式基于连续理论的离散逼近。首先深刻理解相应的经典几何理论；将光滑曲面、光滑映射进行离散逼近，将光滑情形的偏微分方程用离散解来逼近，或者将光滑情形的变分问题转化成离散能量优化问题，求得离散解；然后估计逼近误差，证明收敛阶。这种方法具有严格性，但需要应用数学方面的训练，如有限元方法、偏微分方程理论等。并且，这种方法比较适用于线性椭圆形偏微分方程，对于几何理论中出现的大量非线性偏微分方程、传统的有限元方法依然无能为力。

第三种研究范式直接建立离散的几何理论。传统的几何理论是建立在光滑流形基础之上的，需要曲面的微分结构，离散几何理论建立在多面体网格之上，然后证明离散曲面无限细分之后，离散理论导出光滑理论。这种研究范式对于非线性几何偏微分方程非常有效，同时给出了经典理论的一种全新理解方式。但是，因为缺乏成熟的数学工具（如第二种范式中

的伽辽金方法），这种研究具有很大的挑战性。

目前来看，在现实生活中，第一种研究范式的成果被工程类学术界广泛接受，并在工业界被广泛应用。但因为其缺乏严格性会被数学领域所拒绝；第二种研究范式和第三种研究范式的成果会被数学界接受，但因为其内容艰涩、逻辑曲折，很少会被工业界直接采纳。许多计算机科学家认为，那些被大型公司所采纳的算法会日渐胜出；许多数学家坚信，从长远来看，随着岁月流逝，大浪淘沙，具有普适性和严格理论保证的方法会被保留下来。

3. 工程化的研究方法

计算机只能表示离散数据，光滑的曲面一般用分片线性的多面体网格（Piecewise - linear Polyhedron）来逼近，又称三角网格（Triangle Mesh）、离散曲面（Discrete Surface），曲面之间的映射，用分片线性映射（Piecewise linear mapping）来逼近。这种表示方法是自然的，并且具有理论依据。在代数拓扑中有一条单纯逼近定理（Simplicial Mapping Approximation），大意是说任何连续映射，都可以在适当的三角剖分下，用单纯映射来逼近。给定任意的逼近精度要求，我们可以动态加细三角剖分，使得单纯映射满足精度要求。在理论和算法层面，几何逼近论着重研究下列问题：对于给定的光滑曲面和逼近精度要求，如何选取相应的三角剖分，构造离散的三角网格，使得在不同的度量意义下离散曲面和光滑曲面之间的"距离"小于给定阈值。这方面已经具有成熟的结果，如 Normal Cycle 理论。但对于给定光滑曲面间的光滑映射，并不存在统一系统的理论结果，绝大多数情况下依赖于所采用的方法，有各种各样的理论估计。

线性映射工程上对于曲面参数化问题研究的思路如下：曲面到平面区域的映射被表示成分片线性映射，通过对每一片线性映射进行分析，我们可以掌控整个映射。因此，我们首先来分析两个（欧式）平面三角形之间的线性映射，$\varphi:\mathbb{E}^2\to\mathbb{E}^2$。源欧式平面的坐标记为$(x,y)$，内积为

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle - x_1x_2 + y_1y_2$$

目标欧式平面的坐标记为(u,v)，内积为

$$\langle (u_1,v_1),(u_2,v_2)\rangle = u_1u_2 + v_1v_2$$

通过平移，线性映射可以用矩阵来表示：

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

如果映射非退化，则矩阵满秩，$\mathrm{ranh}(\boldsymbol{A})=2$；如果映射保持定向，则矩阵行列式为正，$\det(\boldsymbol{A})>0$。下面的讨论中，我们假设 $\boldsymbol{A}$ 满秩，具有正值行列式。对于线性映射的细致分析，我们通常用矩阵的奇异值分解。

***QR* 分解**给定矩阵 $\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为对称正定矩阵，因此存在分解

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \\ & \lambda_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = O\mathrm{diag}(\lambda_1^2,\lambda_2^2)O^{\mathrm{T}}$$

这里 $\lambda_1,\lambda_2>0$ 为正实数。由此，我们可以定义 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的平方根：

$$\sqrt{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = O\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)O^{\mathrm{T}}$$

显而易见：

$$\boldsymbol{A}=\sqrt{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}}\left(\sqrt{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}}\right)^{-1}\boldsymbol{A}=QR$$

这里 $Q=\sqrt{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}}$，同时 $R=\left(\sqrt{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}}\right)^{-1}\boldsymbol{A}$。我们直接计算

$$RR^{\mathrm{T}}=\left(\sqrt{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}}\right)^{-1}A\cdot A^{\mathrm{T}}\left(\sqrt{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}}\right)^{-1}=I$$

因此矩阵 R 是旋转矩阵。因此矩阵 $A=QR$ 被分解为对称正定矩阵和旋转矩阵的乘积，这被称为矩阵的 QR 分解。

由矩阵的 QR 分解，我们直接得到矩阵的奇异值分解

$$A=QR=O_1(\lambda_1,\lambda_2)O_1^{\mathrm{T}}R=O_1(\lambda_1,\lambda_2)O_2$$

即矩阵可以被分解为旋转阵、对角阵、旋转阵的乘积。这里 λ_1,λ_2 称为奇异值，为正值实数。

线性映射分类根据矩阵奇异值，我们可以将线性映射分类。

（1）**等距变换**，如果 $\lambda_1=\lambda_2=1$，则矩阵为旋转阵，线性映射保持内积不变，换言之，$\langle \boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2\rangle=\langle\varphi(\boldsymbol{r}_1),\varphi(\boldsymbol{r}_2)\rangle$。

（2）**相似变换**，如果 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$，则矩阵为旋转阵乘以一个标量，$A=\lambda O$。相似变换保持形状不变，因此可以被视为是共形变换的特例；相似变换保持角度不变，又被称为保角变换的特例。相似变换并不保持面积，其面积元变化率为 λ^2，

$$\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v=\lambda^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

相似变换诱导的内积变换为

$$\langle\varphi(\boldsymbol{r}_1),\varphi(\boldsymbol{r}_2)\rangle=\lambda^2\langle\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2\rangle$$

（3）**保面积变换**，如果 $\lambda_1\lambda_2=1$，则矩阵为

$$A=O\mathrm{diag}(\lambda,\lambda^{-1})O^{\mathrm{T}}$$

面元保持不变，$\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v=\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$。

我们可以看到，等距变换必为保面积变换；如果一个线性映射既是相似变换，又是保面积变换，则此变换必为等距变换。

（4）**拟共形变换**，一般情况下矩阵奇异值不等 $\lambda_1\neq\lambda_2$，源平面上取一个标准圆 $x^2+y^2=r^2$，我们考察其像

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=O_1\begin{pmatrix}\lambda_1&\\&\lambda_2\end{pmatrix}O_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

我们进行坐标变换

$$\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=O_1^{-1}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$

则标准圆的像为一椭圆

$$\frac{\xi^2}{\lambda_1^2}+\frac{\eta^2}{\lambda_2^2}=r^2$$

椭圆的偏心率由奇异值 λ_1,λ_2 所决定。如果椭圆为圆，则拟共形变换为共形变换。

（5）**变换的极分解**，矩阵的 QR 分解具有更为深刻的理解。假设 $A=QR$，这里矩阵 R 是旋转矩阵，可以视作保面积映射。构造映射

$$\tau:(x,y)\rightarrow(\xi,\eta)$$

$$\tau:\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

则 $d\xi \wedge d\eta = dx \wedge dy$。

Q 是一个正定矩阵，它代表了一个最优传输映射（Optimal Mass Transportation Map）

$$\rho:(\xi,\eta)\rightarrow(u,v)$$

$$\rho:\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

更进一步，变换是某个凸函数的梯度映射 $\rho(\xi,\eta) = \nabla f(\xi,\eta)$，这里凸函数

$$f(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(\xi,\eta)Q\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

可以证明，映射 ρ 将面积元 $dx \wedge dy$ 映成面积元

$$du \wedge dv = \det(A)\, dx \wedge dy,$$

同时，在所有满足上述条件的映射中，ρ 极小化如下的传输代价：

$$E(\rho) := \int_{\Omega} |p - \rho(p)|^2 dxdy$$

这里的 Ω 是任意一个紧凸集。

非线性推广以上线性映射的分类结果可以（非平庸地）推广到曲面映射情形，基本想法如下。假设给定带度量的曲面间的光滑映射 $\varphi:(S_1,\boldsymbol{g}_1)\rightarrow(S_2,\boldsymbol{g}_2)$，局部上，非线性的映射 φ 可以用其一阶近似，切平面间的线性映射来逼近，所谓的导映射（Derivative Map）

$$d\varphi: T_p S_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} S_2$$

φ 会带来各种畸变，这些畸变的测量需要用到黎曼度量。线性映射 $d\varphi$ 的分类可以利用上述线性映射分类的想法，例如，如果对于任意一点 $p \in S_1$，$d\varphi$ 都是等距（或者保角、保面积、拟共形），则整体上 φ 是等距（或者保角、保面积、拟共形）。但是，最优传输映射（Optimal Mass Transportation Map）、映射的极分解、极值拟共形变换等，本质上是整体的，局部上的理解无法诠释其内在实质。相应的共形几何（保角映射）、最优传输（保面积映射）、泰希米勒理论（极值拟共形映射），我们会在后继的内容中阐述。

直接变分法在计算机图形学的曲面参数化领域，有许多工程化的研究方法，可以归为第一类研究范式。这种方法的基本思路如下：我们用分片线性映射来表示从三角网格到平面区域的映射，$\varphi: M\rightarrow\mathbb{D}$。固定一个三角形，我们将其铺到平面上，我们用 v_i, v_j, v_k 来表示顶点的平面坐标，用 $\varphi(v_i), \varphi(v_j), \varphi(v_k)$ 来表示顶点像的平面坐标，则线性映射矩阵可以直接写出：

$$A_{ijk} = (v_j - v_i, v_k - v_i)^{-1}(\varphi(v_j) - \varphi(v_i), \varphi(v_k) - \varphi(v_i))$$

这一映射和保角映射的差距可以定义为：

$$e_{ijk} := \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 2\right)^2 = \left(\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1\lambda_2} - 2\right) = \left(\frac{\mathrm{tr}(A_{ijk})^2}{\det(A_{ijk})} - 4\right)^2$$

如果 e_{ijk} 为0，则限制在此三角形上的线性映射为保角变换。整个映射和等距变换的差距定义为：

$$E(\varphi) := \sum_{ijk} e_{ijk} s_{ijk}$$

这里 s_{ijk} 代表相应三角形的面积。然后，我们运用非线性优化方法来优化这个能量，并将所得结果作为全局保角变换的近似：

$$\varphi = \mathrm{argmin}_{\varphi} E(\varphi)$$

如果我们的目的是寻求保面积变换，我们可以如法炮制