国防科技大学
本科教材出版经费资助

机械振动

JIXIE ZHENDONG

胡茑庆　胡雷　程哲　编著

国防科技大学出版社
National University of Defense Technology Press

国防科技大学
本科教材出版经费资助

机械振动

胡茑庆　胡　雷　程　哲　编著

国防科技大学出版社
·长沙·

图书在版编目(CIP)数据

机械振动/胡茑庆，胡雷，程哲编著．—长沙：国防科技大学出版社，2017.4
ISBN 978－7－5673－0477－2

Ⅰ.①机…　Ⅱ.①胡…　②胡…　③程…　Ⅲ.①机械振动—高等学校—教材
Ⅳ.①TH113.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 001288 号

国防科技大学出版社出版发行
电话：(0731) 84572640　邮政编码：410073
http://www.gfkdcbs.com
责任编辑：王　嘉　责任校对：何咏梅
新华书店总店北京发行所经销
国防科技大学印刷厂印装
*
开本：787×1092　1/16　印张：21.75　字数：516 千
2017 年 4 月第 1 版第 1 次印刷　印数：1－800 册
ISBN 978－7－5673－0477－2
定价：48.00 元

编者说明

在复杂装备及武器平台中，振动是经常遇到的问题。随着现代多学科工程技术的发展与相互渗透，人们更加追求装备性能的先进性与性能持续发挥的稳定性，并越来越认识到振动是装备研制成败与使用效能好坏的关键问题。机械振动对于寻找装备中的振源或噪声源，促进装备振动的防护、治理、控制与诊断是必不可少的基本知识。随着现代技术的发展，一方面装备的功率不断增大，转速逐步提高；另一方面，新型复合材料和功能材料，甚至智能材料的应用，使得装备的重量减轻，外壳变薄或结构变轻，装备振动问题越来越突出，过大的振动会影响装备的正常运行甚至引起破坏。特别是飞机、导弹、装甲车辆往往服役于恶劣的工作环境，对振动控制的需求日渐增多。如坦克装甲车辆的悬挂系统、武装直升机的挂弹稳瞄平台等都包含着振动问题，而配备的精确打击武器和信息装备又要求能为其提供一个稳定的平台。因此，装备系统或平台的振动防护、治理、控制和诊断问题的解决方案就凸显出来，对装备振动知识的了解与掌握是解决这些问题的基础和前提。对于研制、驾驭、维护装备的技术人员而言，掌握振动的基础知识和基本理论尤其重要。为此，从发展的角度和紧贴军事需求目标出发，有必要在“机械工程及其自动化”专业本科生开设技术基础选修课“机械振动”，目的是使该专业本科生掌握与装备振动有关的基本理论及分析问题、解决问题的基本方法。考虑到本课程只有30学时，直接选用现有的一些高校出版的教材不太适宜，所以根据实际需求并参照相关参考书编写了该教材。

编者多年担任本课程的主讲教员，一边从事教学工作，一边进行自我深化学习。多年从事机械振动及相关课程的教学经历使我们明白一个事实，只要一个基本概念或一个公式没有从本源上弄明白，就会极大地影响青年学员进一步潜心学习的热情和欲望，教学效果就会大打折扣。而且，机械振动属于力学的一个分支，要用到许多大学先期课程如高等数学、工程力学、机械设计等的基础知识，这些知识的遗忘对机械振动的学习影响极大。为此，在编写本教材时，我们潜心参考了国内外相关的教材与参考书，力求溯本追源，力求基本概念与基本知识的系统性与内在关联层次性，力求把知识点的来龙去脉搞清楚；设法系统、细致而完整地阐述清楚机械振动中最基本的概念、理论与计算方法；力求自成体系。可能由于我们的功力不够，没有较好地达到这一要求。但大体上也反映我们从事该课程教学的些许心得和体会。从多届学员反馈的信息来看，大多数学员对本课程还是比较喜欢的。这种“喜欢”可能不是来自于我们的教学风格，更多的是来自于机械振动这门课程所蕴含的哲理与价值。借用陈绍汀教授为西安交通大学倪振华教

授编著的《振动力学》所作序言中对两句拉丁格言的阐释，可以很好地解释这种“喜欢”：

“Simplex sigillum veri——简单是真的印记；

Pulchritudo splendor veritatis——美是真理的光辉。

第一句拉丁格言，作为天才的先辈们对未来的将发现新事物的人们的告诫，以大字刻在世界最负盛名的高等学府之一的哥廷根大学的物理学报告厅里。振动力学这门课程向人们展示了令人迷惑的杂乱的振动现象，是如何被出奇深刻地归结为最简单的单自由度系统。正是这种‘柳暗花明又一村’的清澈印记，使青年们感悟到求知欲的真谛。第二句拉丁格言启示人们，探索者最初是借助于科学美、借助于这一真理的光辉、借助于它的照耀来认识科学真理的。振动力学中通过变换向人们揭示出，对物体一记敲击而引起的振动，包含了全部等量正弦激励引起的物体振动，反映了物体关于振动的全部固有属性。类似这种由绚丽的科学美引导人们达到对事物本质的洞察的鲜明事例，有哪一个青年会不受到震撼和鼓舞。正是这种真理的光辉，使青年人体验到自身创造欲的萌动。”

事实上，在本门课程中，“大美天成、大道至简”的结果并不少见。

当今，高等教育更多地强调能力培养，这是发展方向，但没有合理的知识结构和足够的知识存量，又何谈能力培养？当然有人会说学不学机械振动无所谓于能力培养，要学的东西太多了，也许的确如此吧。诸位，如果你们看到了这段文字，肯定是选修了机械振动的，那就好好学吧，一个公式一个公式地推导、一道题一道题地做，把基本概念、基础知识、基本方法搞清楚，构建起完整的振动知识体系。这其实就潜在获得了一种学习能力，也有助于其他课程的学习、其他学问的钻研甚至工程问题的解决。当然，这样做并不意味着让学生获得尽可能多的振动知识，而是要求其在短时间内掌握学习和思维的方法，构建振动知识体系的整体观，使他们在以后的实践中仍能保持继续学习的兴趣，获得终身持续发展的动力。

在该教材编写过程中，高经纬博士后与研究生张晓飞、夏鲁瑞、王珉、陈铠、高明、李磊、范彬、赵国英、张新鹏、何德雨、张伦、沈建、王怡恬、何林、陈徽鹏做了一些协助性的工作，陈凌博士后、周洋工程师对全书进行了文字审查，在此对他们表示感谢。该教材的编写较多地参考了参考文献中的一些经典的教科书，对这些教材及文献的作者表示诚挚的谢意，在正文中将不再详细标注。

由于编写仓促，书中定有不少错误，恳请读者批评指正。

编　者

2016 年 12 月

目 录

第1章 绪 论

1.1 振动系统的基本问题

人类生活的时空及物质世界里，到处存在着各种形式的振动以及波动，如地震、月亮的圆缺、潮汐的涨落、人类自身器官的“振动”(心脏的搏动、脉搏的跳动、血液的循环、胃的蠕动、肺部的张缩呼吸及耳膜和声带的振动等)。与人类社会生活密切相关的工程系统中，振动也无处不在，如运载工具(车辆、飞行器、轮船等)以及各种机械设备、家用电器、乐器的振动等。人类社会经济生活中，如经济发展速度的增长与衰减、股市的升跌和振荡甚至国家朝代的兴衰更替等，都可归结为广义上的“振动”。

有意思的是，人类对振动的认识源于精神生活的追求。早在远古时期，人们就注意到振动这种物理现象，制作出利用振动发声的各种乐器。振动理论的起源可追溯到乐器的发明与制作。公元前几千年，古代中国和印度就有了鼓、长笛、弦乐器。与此同时，古埃及和希腊也探索了声音与振动的机理与应用，大约在公元前三千年，埃及就有了竖琴；古希腊哲学家、数学家、音乐家 Pythagoras(582B. C. –502B. C.，著名的毕达哥拉斯定理发现者)就对铁匠作坊激发的声音进行了实验，并探究其与音乐和物理之间的内在联系。中国在公元二世纪就发明了地动仪以检测和记录地震波。

现代振动理论的基础一般认为是由以下科学家的工作奠定的：虎克(Hooke，1635 – 1703)发现了虎克定律并对弦的振动进行了实验研究；牛顿(Newton，1642 – 1727)给我们带来了微积分和运动定律并用于振动的分析；伯努利(Bernoulli，1700 – 1782)和欧拉(Euler，1707 – 1783)研究了梁的振动(Bernoulli-Euler 梁)，也探索了动力学和流体力学；拉格朗日(Lagrange，1736 – 1813)研究了弦的振动并探究了建立动力学方程的能量方法；库仑(Coulomb，1736 – 1806)研究了扭转振动和摩擦；傅里叶(Fourier，1768 – 1830)提出了信号频率分析理论；泊松(Poisson，1781 – 1840)研究了薄膜及弹性体的振动(给出了泊松比的概念)。工业革命的兴起以及蒸汽机和各类旋转机械的开发应用，对振动问题的分析、设计、测量和控制提出了迫切需求,对现有的各种振动技术的发展推动可追溯到自工业革命以来的相关生产实践活动。

随后的一些科学家和工程师对振动理论发展也做出了贡献，比较杰出的代表如兰金(Rankine，1820 – 1872)研究了轴的临界转速；基尔霍夫(Kirchhoff，1824 – 1887)分析了板的振动；瑞利(Rayleigh，1842 – 1919)研究了声振理论并发展了固有振动的计算方法；拉瓦尔(Laval，1845 – 1913)研究了旋转圆盘的平衡问题；庞加莱(Poincaré，1854 –

1912）分析了非线性振动；斯托道拉（Stodola，1859－1943）研究了转子、轴承和连续系统的振动问题；杰出的工程师如铁木辛柯（Timoshenko）、哈尔托克（Den Hartog）、克拉夫（Clough）和克兰德尔（Crandall）等在振动专著出版和振动应用方面做出了重要贡献。

19 世纪后期，人们在制造动力机械、建造桥梁等工程实践中，遇到大量有害的振动问题及由此产生的噪声、疲劳问题。这些问题吸引了众多的力学家和工程师致力于工程振动问题的研究，发展了近似分析方法和实验方法。自 20 世纪 20 年代起，振动逐渐成为机械工程师、结构工程师必须了解的知识。

振动是一把“双刃剑”，存在有害的一面，也存在有用的一面。振动会降低机器的动态精度和使用性能（如制造装备的振动会降低工件的加工精度，军械的振动将影响瞄准等）；由于振动，设备在使用中往往产生交变载荷，这将导致机器使用寿命的降低甚至酿成灾难性的破坏事故（如大桥因共振而毁坏，飞机因颤振而坠落等）。运载工具的振动会使乘客感到不舒适；环境噪声使人烦躁不安；地震使人民生命财产遭受巨大损失。对这些有害振动，科技人员已付出并正在付出极大的努力，以提出一些有效措施来限制以至完全消除这些有害振动。同时，合理地利用振动也能改善人类的生活质量，如拨动琴弦能奏出美妙动人的音乐；在医疗方面，利用超声波能够诊断和治疗疾病；在土建工程中，广泛采用振动沉桩、振动拔桩及混凝土灌注时的振动捣固等；在电子和通信工程方面，收音机、录音机、电视机、程控电话等诸多电子器件，以及电子计时装置和通信设备中使用的谐振器等都是由于振动才能有效地工作；在工程地质方面，利用振动进行检测和地质勘探；在原油开采上，利用振动提高原油产量；在海洋工程方面，海浪波动的能量可以用来发电；在许多工矿企业，利用振动设备可完成许多工艺过程，或者提高某些机器的工作效率。当然，振动并非“非黑即白”，不同的情境对振动的感受是可以变化的。振动的影响也如人类的行为，正如先哲周敦颐所言：“……，动而正，曰道。用而和，曰德。……。邪动，辱也；甚焉，害也。……。”无论如何，振动系统的研究对人类的生活、生产都具有重要的实际意义。

具体到机械振动，它是研究物质机械运动规律的力学学科的一个分支，指的是机械或结构系统在其平衡位置附近的往复运动，是一种特殊形式的机械运动。本质的任务是弄清振动的机理，揭示和了解振动的内在规律及其外部影响因素，进而最大限度地抑制有害振动，有效地利用有用的振动。因而振动系统研究的总目标，就是探究这些振动产生的原因和它的运动规律，分析振动对设备、自然及社会的影响，寻求控制和消除振动的方法，大致有如下几个方面：

① 确定系统的固有频率，预防共振的发生；

② 计算系统的动力响应，以确定机器受到的动载荷或振动的能量水平；

③ 研究平衡、隔振和消振方法，以消除振动的影响；

④ 研究自激振动及其他不稳定振动产生的原因，以便有效地控制；

⑤ 进行振动检测，分析事故原因及控制环境噪声；

⑥ 振动技术的利用，等等。

本书是机械振动分析的基础性入门教材，重点讨论上述的前两个问题①和②。在振动分析中，通常把所研究的对象（如飞机、舰船、装甲车辆以及其中的子系统等）称为一

个系统。把外界对系统的作用或设备运动产生的力称为激励或输入，如飞机受到的气动力、舰船受到的波浪冲击和装甲车辆受到的路面不平激励等是施加在系统上的输入，它们具有与时间相关的特征，通常称作动载荷。把机器或结构在激励作用下产生的动态行为称为输出或响应，如运载工具中乘客所感受到的颠簸振动就是系统的输出，常也称作动响应。振动分析就是研究系统、输入、输出这三者间的相互关系。若输出对输入有反作用的影响就称为反馈，这样的系统称为反馈系统。输入就是动载荷，可以是力、力矩等，也可以是运动量，或称为振动环境。输出就是响应，包括系统的位移、速度、加速度或内力、应力、应变等。从输入、输出与系统特性三者的关系来说，可以将所研究的振动问题归纳为三大类。

① 第一类问题：已知系统模型和外载荷来计算系统响应，称为振动响应计算或振动分析正问题。这是本教材的基本内容。对于比较简单的系统，可采用解析方法或近似计算方法求解振动响应。对于复杂系统，目前已发展了许多有效的数值计算方法，如计算一般结构振动的有限元方法、子结构方法和传递矩阵法等。求解振动分析正问题的目的是设法更好地实现振动控制。

② 第二类问题：已知输入和输出来求系统特性，称为系统识别或参数识别，又称为振动分析的第一类逆问题。表达系统特性的方式是多种多样的，如系统的质量、刚度和阻尼，系统的频响函数、脉冲响应函数等都可以反映系统特性，其中频响函数等特性可用测量方法得到。问题是如何从实测数据中精确地估计出所需要的描述系统特性的参数。若求出的是系统的频率、阻尼和振型等模态参数，则称为模态参数识别。若求出的是系统在物理坐标下的质量、刚度和阻尼，则称为物理参数识别。求解系统识别问题的目的之一是检验用分析方法所建立的系统模型是否正确和精确。与系统识别、特别是物理参数识别相关的一个问题是系统动态设计，即根据输入和输出设计系统特性。

③ 第三类问题：已知系统特性和响应来求载荷，称为载荷识别，又称为振动分析的第二类逆问题。确定系统在实际工况下的振源及其数学描述是振动工程中较为困难的问题，一般需要具体问题具体分析。要使这一类问题取得精确的结果，必须与第一类逆问题紧密结合起来。

对于具有特定输入、输出的特定系统，从计算分析的观点出发，知道其中二者就可得第三者。从这个意义上说，工程振动分析所要解决的问题又可归纳为下列几类：

① 响应分析：在已知系统参数的情况下求系统响应的问题，包括位移、速度、加速度等响应。这为计算机器或结构的强度、刚度、允许的振动能量水平提供了根据；

② 系统设计：在已知系统激励的情况下设计合理的系统参数，以满足对动态响应或其他输出的要求。对于一个良好的机器设计，这个问题更为重要，然而它也有赖于前一问题的解决。在实际工作中，这两个问题是交替进行分析的；

③ 系统识别：在已知输入及输出的情况下求系统的参数，以便了解系统的特性。在目前现代化测试手段已十分完善的情况下，这一研究十分有效；

④ 环境预测：这是在已知系统的输出及系统参数的情况下确定系统的输入，以判别系统的环境特性。

与其他工程应用学科一样，解决振动分析问题的途径，不外乎是理论分析和试验研

究两个方面，随着计算工具的日益发展和普及，振动问题的数值计算可以解决规模很大(自由度数较大)的问题并可达到很高的精度。同时由于测试仪器的发展和完善，振动的试验已发展成为一种独立的解决问题的手段。理论分析和试验研究互为补充并相互促进，为解决复杂的工程振动分析问题创造了条件。

1.2 振动分析的力学模型

从振动分析观点看，即使是一台简单的设备，其系统也是很复杂的。一般所使用的分析方法是质点动力学方法。一个简单的设备元件也具有无限多的质点，因而振动分析的第一步，也是关键的一步，就是把所研究的对象以及外界对它的作用简化为一个力学模型。这个力学模型不仅要简单，而且在动态特性方面应与原本的对象等效。

一台设备或结构之所以会产生振动是因为它本身具有质量和弹性，阻尼则使振动受到抑制。从能量关系看，质量可储存动能，弹性可储存势能，而阻尼则消耗能量。当外界对系统做功时，系统质量就吸收动能进而就具有运动速度，弹簧就储存变形能进而就具有使质量恢复原来状态的能力。这样，能量不断地变换就导致系统质量的反复运动。如果没有外界源源不断地输入能量，那么由于阻尼的消耗，振动现象将逐渐停息。由此可见，质量、弹性和阻尼是振动系统力学模型的三要素。此外，质量离开平衡位置时具有位能(在重力场中)，因此也具有恢复力，可以把这种情况看作为具有等效弹簧的系统。

实际设备或结构元件的质量是分布的，弹性也是如此。这种分布参数系统(或称为连续系统)的振动分析工具是偏微分方程，而偏微分方程只有几种特殊情况才能得到闭合解。因此能按解析法求分布参数系统问题的例子不多，本教材中用一章来处理这类问题，在其他各章讨论的一般为离散系统。所谓离散系统，就是将实际上是分布参数的系统经过简化，把它简化成具有若干集中质量并由相应的弹簧和阻尼器联结在一起的系统。根据所研究系统的特点及所研究问题的要求，离散系统所具有的质量个数是不同的。若实际的设备或结构可以简化为由一个质量和一个弹簧及一个阻尼器组成，而且质量在空间的位置可以用一个坐标就可以完全地描述，就把这样的系统称为单自由度系统。若系统的质量在空间的位置必须由多个独立的坐标才能完全地描述，则是多自由度系统。质量的个数一般等于或少于系统的自由度数，因为一个质点如无约束，在空间具有三个独立的运动，而一个刚体在空间则有六个独立的运动。没有阻尼器的系统称为无阻尼系统。

1. 弹簧

弹簧是表示力与位移关系的弹性元件。在力学模型中，它一般被抽象为无质量并具有线性弹性的元件。若元件的一端受作用力 F_S，则它的另一端必产生大小与 F_S 相等，方向与之相反的力，力的大小与弹簧两端点的相对位移成正比：

$$F_S = k(x_2 - x_1) = kx \tag{1.2.1}$$

式中 k 为弹簧刚度；x_1、x_2 是弹簧两端点处的位移，$x = x_2 - x_1$。式(1.2.1)表示的是直线位移的弹簧，它相应于质量的直线位移。在设备传动机构的扭转振动系统中，质量作扭

转运动，这种情况下采用扭转弹簧。扭转弹簧刚度用符号 k_t 表示。扭转弹簧产生的广义力是扭矩 M_t，位移是角度 θ，如此类似式(1.2.1)得 $M_t=k_t\theta$。对单一弹性元件的刚度计算是比较容易的，但在实际中经常是若干个弹性元件组合使用。

对于非线性弹簧，弹性恢复力的反力 $F(x)$ 一般是位移 x 的非线性函数，弹簧刚度 $k(x)$ 可定义为 $F(x)$ 对 x 的一阶导数，即 $k(x)\overset{\text{def}}{=\!=}F'(x)\overset{\text{def}}{=\!=}\dfrac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$。

2. 阻尼器

阻尼器是表示力与速度关系的元件。在力学模型中它被抽象为无质量而且具有线性阻尼系数的元件，若它的一端受 F_d 力的作用，则它的另一端必产生大小相等方向相反的力。该力称为阻尼力，其大小与阻尼器两端的相对速度成正比：

$$F_d=c(\dot{x}_2-\dot{x}_1) \tag{1.2.2}$$

式中：c 为阻尼系数；$\dot{x}_2$、$\dot{x}_1$ 分别为阻尼器两端的速度。根据式(1.2.2)，阻尼力 F_d 与相对速度的一次方成正比，此时系数 c 又称为黏性阻尼系数。以后将会看到，由于引用了这种线性阻尼，在振动分析中带来了极大的方便。

3. 质量

质量是表示力和加速度关系的元件。在力学模型中它被抽象为绝对不变形的刚体。若对质量施加一作用力 F_m，质量就会产生一个与 F_m 相同方向的加速度 $\ddot{x}$，对于直线的平移运动，力与加速度的关系为

$$F_m=m\ddot{x} \tag{1.2.3}$$

式中 m 是刚体所具有的惯性的一种度量，称为刚体的质量。对于扭转振动系统，广义力为扭矩 M_t，广义加速度为角加速度 $\ddot{\theta}$，相应于式(1.2.3)的比例常数为刚体绕其旋转中心线的转动惯量，通常以 J 标记。如此类似式(1.2.3)得 $M_t=J\ddot{\theta}$。对于连续振动系统，则体现为分布质量特性。

图1.2.1表示有阻尼的单自由度平移系统的力学模型，它表示了力学模型中三个元件的最通用的画法。图1.2.2(a)是有阻尼单自由度扭转系统力学模型的典型画法；图1.2.2(b)是无阻尼多自由度扭转系统力学模型的画法。本教材中扭转系统中的转动惯量用圆盘表示；扭转弹簧用细轴表示。在力学模型中应标上表示质量在空间位置的独立坐标。如有外激励也应标上，并画出规定正方向的箭头。

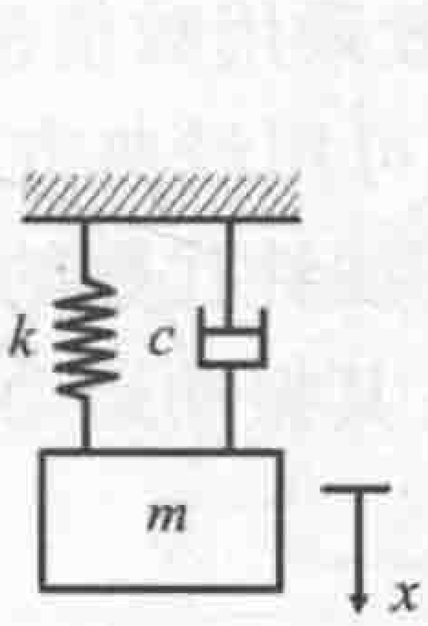

图1.2.1 阻尼单自由度平移系统力学模型

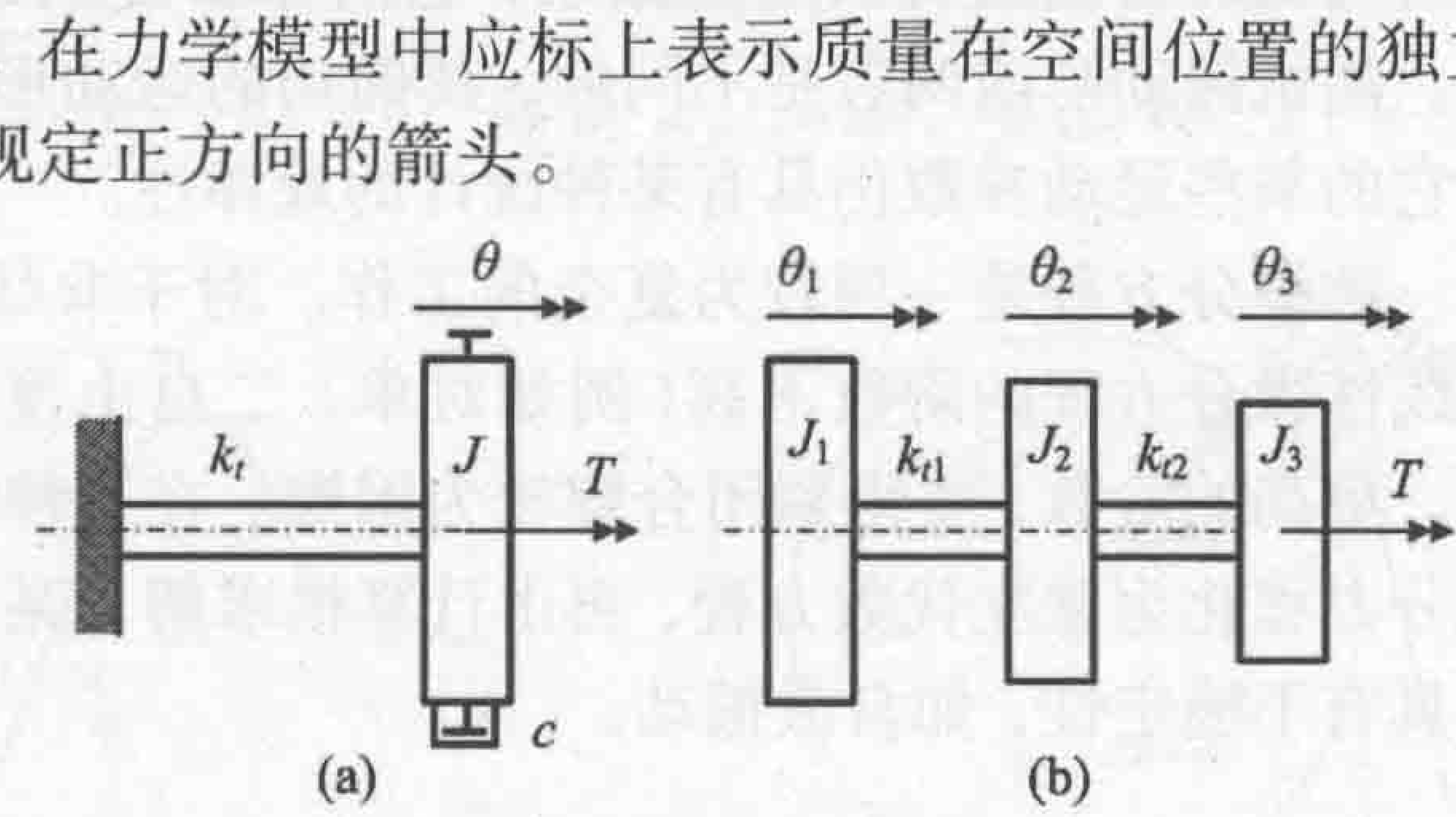

图1.2.2 扭转系统力学模型

平移系统和扭转系统在力学上是等效的，本教材第2章将涉及等效的问题。需要强调的是，要从实际的设备中抽象出力学模型是一项复杂的工作，它要求对所研究的

对象及所分析的问题本身有比较透彻的了解。本教材随后的内容会涉及较多的实际例子。

最后还有一点需要说明，就是前面讲的力学模型主要包含弹簧、阻尼器和质量三个要素。但对于某些设备和结构，为了更清楚地说明系统运动特性，常引入若干辅助的元件，如无质量的刚杆系和滑轮等。

1.3 系统微分方程与振动分类

力学模型确定之后就要建立系统参数、激励及响应这三者关系的运动微分方程式。可以应用牛顿第二定律、能量法、拉格朗日方程等来建立运动微分方程。对于离散系统，振动运动微分方程一般用二阶微分方程表示，若系统是多自由度的，那么运动方程将是二阶联立微分方程组。

微分方程是系统振动行为的数学描述，因此从振动运动微分方程便可清楚地了解振动运动的类型。若运动方程是偏微分方程，那么系统一定是分布参数系统(连续系统)；反之若运动方程是常微分方程，那一定是集中质量系统(离散系统)。若微分方程是齐次的，那一定是自由振动，也就是在初始作用后靠系统恢复力维持的振动；若微分方程是非齐次的，那一定是强迫振动，即系统是在外激励作用下的振动；若方程是联立的，那必定是多自由度系统，反之，系统就是单自由度系统；若微分方程是线性的，那么系统一定是线性的，反之系统就是非线性的。

此外，从微分方程的自由项函数的形式可以判断振动运动的形式。若自由项是简谐函数，那稳态响应也一定是简谐振动；若自由项是任意周期函数，那稳态响应也一定是任意周期振动；若自由项是脉冲函数，那系统一定是瞬态振动；若自由项是随机函数，那系统一定是随机振动。

本课程研究的线性振动系统，其参数是不随时间而变化的，因此微分方程是常系数的，这样的系统通常称为时不变系统。

周期运动是振动运动的最常见形式，下一节将详细讨论。瞬态振动是由于系统受到短时间的冲击激励所引起的振动，它的振动形式类似于周期运动，但它的振幅逐渐减小。随机振动与前两者是不同的，其确切的运动形式不能用确定的数学公式加以描述，但它的某些运动参数仍具有某种统计的规律性。

解微分方程是一项较为复杂的工作。对于非线性方程，一般采用数值法或图解法。若线性微分方程的阶数不高(例如对单、二自由度系统)，一般可用经典方法得到闭合解。更高的阶数，要得到闭合解较为困难。在这种情况下可应用线性代数的方法把联立微分方程化为联立代数方程，再由计算机求解。某些振动系统，其振动运动微分方程的解具有不稳定性，如自激振动。

1.4　简谐运动的表示方法

1. 简谐运动及其导数

周期运动的特点是，经过相同的时间后不断重复过去的运动。若以 $x(t)$ 表示随时间变化的运动，则周期运动满足如下关系：

$$x(t)=x(t+nT),\ n=1,2,3,\cdots \tag{1.4.1}$$

式中 T 称为运动周期。

最简单的周期运动是以正弦或余弦的时间函数表示的运动，这种运动称为简谐运动。如用正弦时间函数表示，则有

$$x(t)=A\sin\omega t=A\sin\omega\left(t+\frac{2\pi n}{\omega}\right),\ n=1,2,3,\cdots$$

因此，简谐运动的周期

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=1/f \tag{1.4.2}$$

式中：f 是运动的频率，它定义为单位时间内振动运动的循环次数，在 SI 单位制中 f 的单位是每秒循环数，叫作“赫兹”，以 Hz 标记；ω 是系统振动的圆频率，它的单位是弧度每秒(rad/s)(具有角速度量纲)，它常常也简称为频率。ω 与 f 之间有如下关系：

$$\omega=2\pi f \tag{1.4.3}$$

简谐运动可用图解法予以清楚地表示。图 1.4.1(b)表示一正弦时间函数曲线，横坐标是时间，纵坐标是函数值 $x(t)$。图 1.4.1(a)表示一旋转的矢量 A，它的模为 A，A 与横坐标的夹角为 $\omega t+\varphi$ 并以 ω 的角速度沿逆时针方向旋转，当 $t=0$ 时它具有初始角 φ。从图可见任意瞬间的函数值 $A\sin(\omega t+\varphi)$ 就是矢量 A 在纵坐标轴上的投影。当矢量旋转一周(2π)，运动经历一个周期。这里 ω 代表矢量的旋转速度，这就是圆频率这个名称的由来。

简谐运动也可以用复数表示。如图 1.4.2 所示。复数 $z=a+ib$ 在复平面上是一个点，这个点与坐标原点的连线可看作是复平面上的一个复矢量，其在实轴上的投影为 a，在虚轴上的投影为 b，则其模为 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=A$，幅角 $\arg z=\omega t$，实部 $\mathrm{Re}[z]=a=A\cos\omega t$，虚部 $\mathrm{Im}[z]=b=A\sin\omega t$。

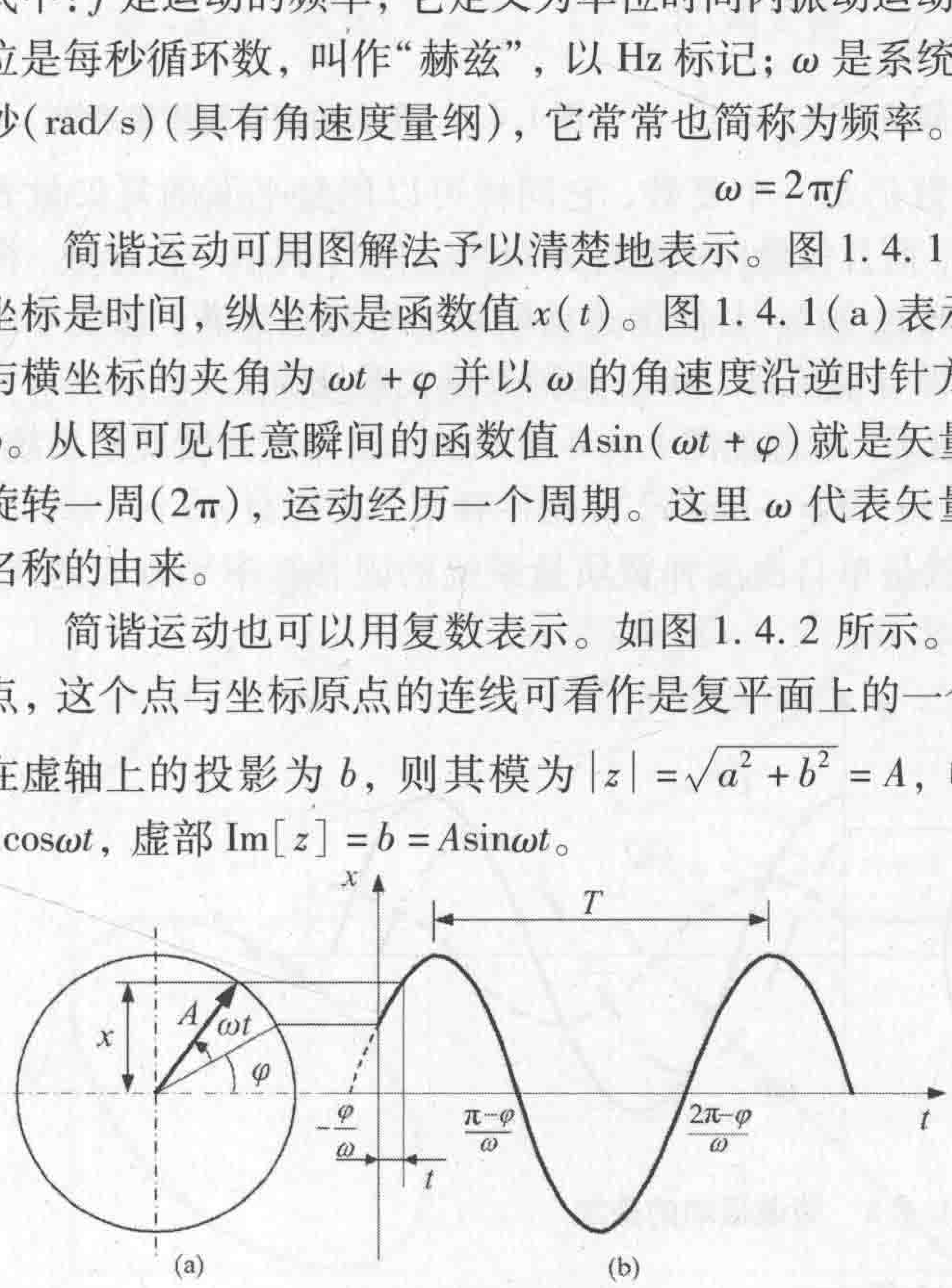

图 1.4.1　简谐运动的矢量表示

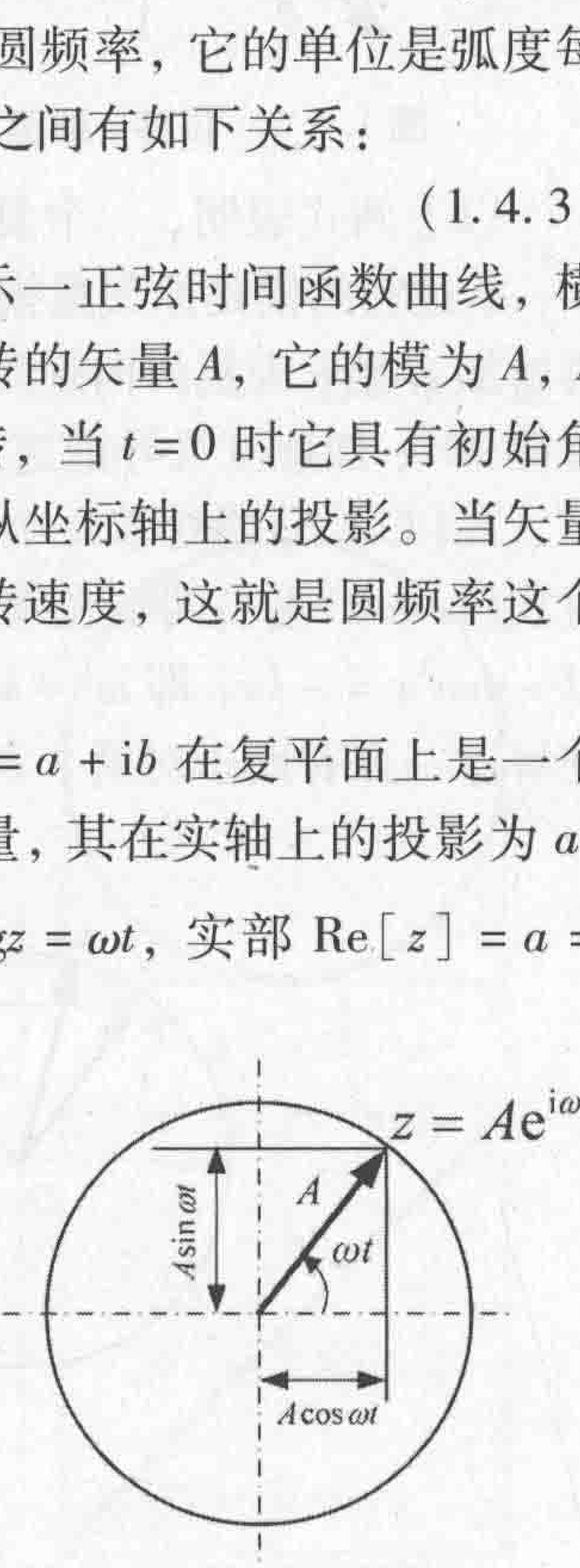

图 1.4.2　简谐运动的复数表示