



Bézier 曲线曲面的 造型设计理论研究

严兰兰 著



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

Bézier 曲线曲面的造型设计理论研究

严兰兰 著



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

Bézier 曲线曲面的造型设计理论研究/严兰兰著. —武汉: 武汉大学出版社, 2016. 11

ISBN 978-7-307-18816-7

I. B... II. 严... III. 计算机辅助设计—应用软件 IV. TP391.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 274933 号

责任编辑:郭芳 王小倩

责任校对:周卫思

装帧设计:张希玉

出版发行: 武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件:whu_publish@163.com 网址:www.stmpress.cn)

印刷:虎彩印艺股份有限公司

开本:720×1000 1/16 印张:11 字数:200千字

版次:2016年11月第1版 2016年11月第1次印刷

ISBN 978-7-307-18816-7 定价:60.00元

版权所有,不得翻印;凡购我社的图书,如有质量问题,请与当地图书销售部门联系调换。

前 言

计算机辅助几何设计(Computer Aided Geometric Design, 简称 CAGD)是计算机辅助设计(Computer Aided Design, 简称 CAD)、计算机辅助工程分析(Computer Aided Engineering, 简称 CAE)和计算机辅助制造(Computer Aided Manufacturing, 简称 CAM)的数学基础。作为工程设计中的几何知识, CAGD 在 CAD、CAE、CAM 中起着中心角色的作用。

CAGD 是一门迅速发展的新兴学科, 它的出现和发展既是现代工业发展的要求, 又对现代工业的发展起到了巨大的促进作用, 它使几何学从传统时代进入数字化定义的信息时代, 焕发出勃勃生机。

曲线曲面造型是 CAGD 中的主要研究内容, CAGD 中广泛采用的曲线曲面表达形式为参数多项式的数学形式。由于采用独特的 Bernstein 多项式作为基函数, Bézier 曲线曲面拥有了许多优良的性质, 这使得它在诸多形式的参数多项式曲线曲面中独树一帜, 一经问世, 就受到工业界和 CAGD 学术界的广泛重视。Bézier 方法在实践中表现出强大的生命力。

本书的主要研究对象就是 CAD、CAE、CAM 系统中广泛使用的 Bézier 方法, 主要研究内容有四个方面, 即曲线曲面的拼接、等距曲线曲面和广义偏距曲线、曲线曲面的自由变形以及基于 Bernstein 函数类的 Bézier 曲面类。本书旨在通过对以上四个方面的研究进一步完善和扩展 Bézier 曲线曲面在造型设计中的理论基础。

本书可供计算机辅助几何设计、计算机图形学(CG)等专业的科学研究人员、工程技术人员、研究生以及高等学校的教师和本

科生参考。

本书的研究工作主要得到国家自然科学基金项目(No. 11261003)、江西省自然科学基金项目(No. 20161BAB211028)、江西省教育厅基金项目(No. GJJ14493)的资助,同时要感谢东华理工大学科学计算与最优化科技创新团队的大力支持,以及著者的老师、同事、家人、朋友对著者的支持与帮助。

由于著者水平有限,书中可能有很多不足甚至错误之处,恳请读者批评指正。

著 者

2016 年 10 月

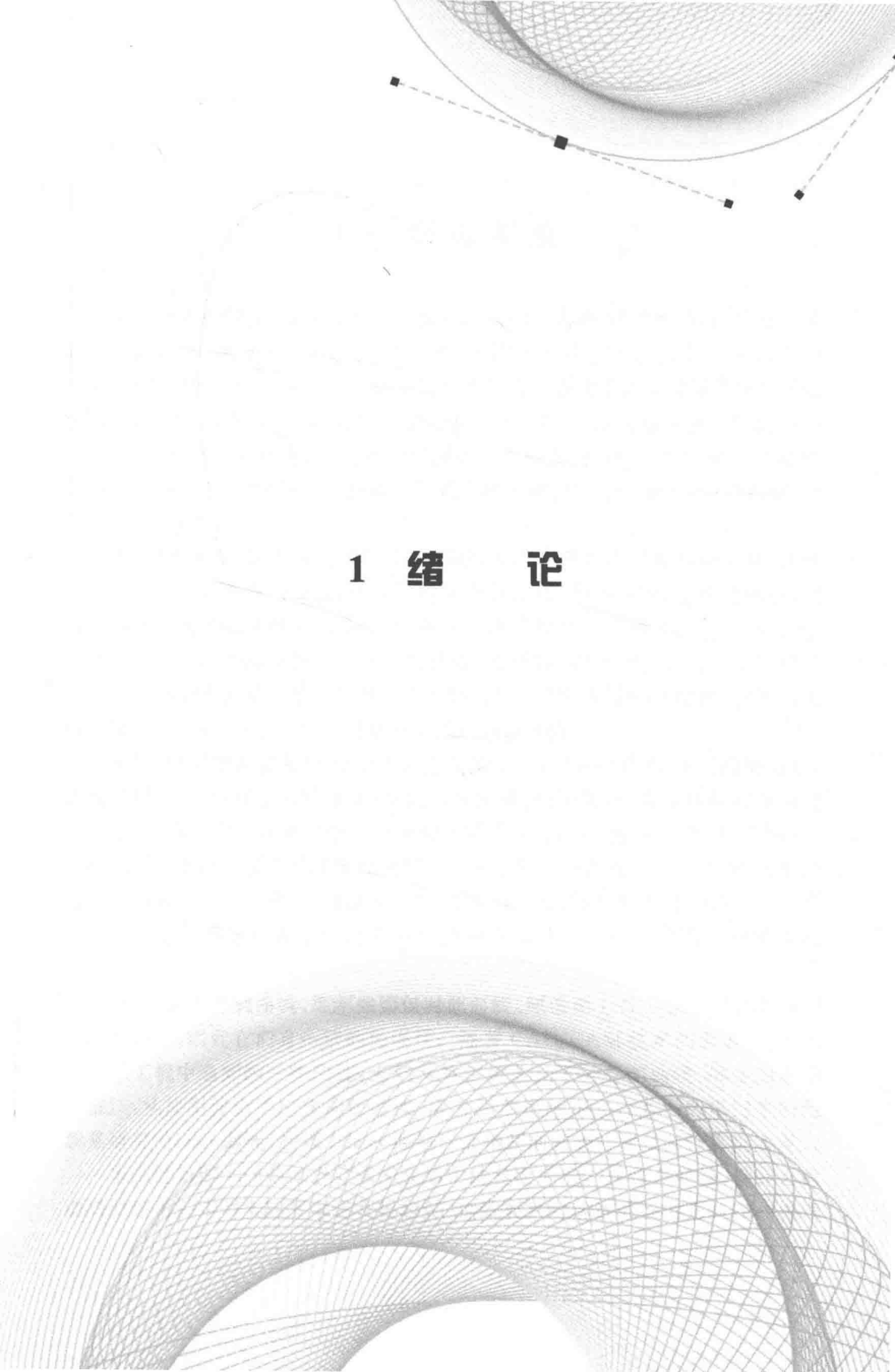
目 录

1 绪论	(1)
1.1 研究背景	(3)
1.2 预备知识	(4)
1.2.1 Bézier 曲线	(4)
1.2.2 有理 Bézier 曲线	(6)
1.2.3 Bézier 曲面	(7)
1.2.4 有理 Bézier 曲面	(10)
1.3 本书主要内容	(10)
2 有理 Bézier 曲线、曲面的拼接	(13)
2.1 引言	(15)
2.2 有理 Bézier 曲线的拼接	(15)
2.2.1 有理 Bézier 曲线的首、末顶点及其导矢	(15)
2.2.2 任意有理 Bézier 曲线的拼接	(16)
2.2.3 实用二次有理 Bézier 曲线的拼接	(19)
2.3 有理 Bézier 曲面的 G^1 光滑拼接	(20)
2.3.1 数学背景	(20)
2.3.2 双二次有理 Bézier 曲面的 G^1 光滑拼接	(22)
2.3.3 双三次有理 Bézier 曲面的 G^1 光滑拼接	(25)
2.4 有理 Bézier 曲面的 G^2 光滑拼接	(28)
2.4.1 数学背景	(28)
2.4.2 双三次有理 Bézier 曲面的 G^2 光滑拼接	(30)
2.5 小结	(36)
3 等距曲线	(37)
3.1 引言	(39)
3.2 一般等距曲线的概念	(39)

3.3	Bézier 曲线的等距曲线	(40)
3.3.1	正则 Bézier 曲线的等距曲线	(40)
3.3.2	Bézier 曲线及其等距曲线的实现	(41)
3.4	有理 Bézier 曲线的等距曲线	(42)
3.4.1	正则有理 Bézier 曲线的等距曲线	(42)
3.4.2	有理 Bézier 曲线及其等距曲线的实现	(42)
3.5	B 样条曲线的等距曲线	(43)
3.5.1	B 样条曲线	(44)
3.5.2	德布尔算法	(44)
3.5.3	正则 B 样条曲线的等距曲线	(45)
3.5.4	B 样条曲线及其等距曲线的实现	(45)
3.6	小结	(49)
4	等距曲面	(51)
4.1	引言	(53)
4.2	等距曲面的定义	(54)
4.3	Bézier 曲面的等距曲面	(54)
4.3.1	正则 Bézier 曲面的等距曲面	(54)
4.3.2	Bézier 曲面及其等距曲面的实现	(56)
4.4	有理 Bézier 曲面的等距曲面	(58)
4.4.1	正则有理 Bézier 曲面的等距曲面	(58)
4.4.2	有理 Bézier 曲面及其等距曲面的实现	(61)
4.5	可展曲面的等距曲面	(64)
4.5.1	直纹面和可展曲面	(64)
4.5.2	可展曲面等距曲面的性质	(65)
4.6	小结	(69)
5	广义偏距曲线	(71)
5.1	引言	(73)
5.2	广义偏距曲线的定义	(73)
5.3	Bézier 曲线的广义偏距曲线	(74)
5.3.1	正则 Bézier 曲线的广义偏距曲线	(74)

5.3.2 正则 Bézier 曲线的广义偏距曲线的实现	(75)
5.4 有理 Bézier 曲线的广义偏距曲线	(77)
5.4.1 正则有理 Bézier 曲线的广义偏距曲线	(77)
5.4.2 正则有理 Bézier 曲线的广义偏距曲线的实现	(78)
5.5 小结	(80)
6 参数曲线曲面自由变形	(81)
6.1 引言	(83)
6.2 缩放变换	(84)
6.3 参数曲线自由变形	(85)
6.3.1 基于缩放因子的参数曲线自由变形(一)	(85)
6.3.2 基于缩放因子的参数曲线自由变形(二)	(90)
6.3.3 基于缩放因子的参数曲线周期性变形	(98)
6.4 参数曲面自由变形	(109)
6.4.1 基于缩放因子的参数曲面自由变形(一)	(109)
6.4.2 基于缩放因子的参数曲面自由变形(二)	(115)
6.5 小结	(123)
7 基于 Bernstein 函数类的 Bézier 曲面类	(125)
7.1 引言	(127)
7.2 Bernstein 基函数和 Bézier 曲面	(127)
7.3 Bernstein 函数类及其性质	(128)
7.3.1 Bernstein 函数类	(128)
7.3.2 Bernstein 函数类的性质	(128)
7.4 Bézier 曲面类及其性质	(129)
7.4.1 Bézier 曲面类	(129)
7.4.2 Bézier 曲面类的性质	(130)
7.5 RB 函数及其性质	(130)
7.6 RB 曲面	(131)
7.6.1 RB 曲面的定义及表达式	(131)
7.6.2 不同参数 k 对应的 RB 曲面间的关系	(133)
7.6.3 RB 曲面与 Bézier 曲面的关系	(135)

7.7 附权 RB 曲面	(136)
7.7.1 附权 RB 曲面的定义及表达式	(136)
7.7.2 附权 RB 曲面与 Bézier 曲面及 RB 曲面的关系	(137)
7.8 几种 RB 曲面和附权 RB 曲面的表达式	(138)
7.9 小结	(139)
附录 程序代码	(141)
程序 1	(143)
程序 2	(144)
程序 3	(146)
程序 4	(148)
程序 5	(149)
程序 6	(151)
程序 7	(157)
参考文献	(165)



1 绪 论

1.1 研究背景

曲线曲面造型(curves and surfaces modeling)起源于飞机、船舶的外形放样工艺,由 Coons、Bézier 等于 20 世纪 60 年代奠定理论基础。经过 50 多年的发展,现在它已形成了以 Bézier 和 B 样条方法为代表的参数化特征和隐式代数曲面这两类方法为主体,以插值(interpolation)、拟合(fitting)、逼近(approximation)这三种手段为骨架的几何理论体系。曲线曲面造型是 CG 和 CAGD 中的一项重要内容,主要研究在计算机图象系统的环境下对曲线、曲面的表示、设计、显示和分析。

在 CAD/CAGD 中,由于单一的曲线段、曲面片无法表示复杂的形状,因此为了满足实际工程中的需求,往往要构造组合曲线、曲面,即对复杂的曲线、曲面在满足一定的光滑拼接的条件下,采用分段或分片拟合的方式来进行描述,以满足实际工作的需要。在构造组合曲线、曲面时,首先要解决的关键问题就是怎样实现光滑拼接。本书的第一个问题就是研究有理 Bézier 曲线、曲面的光滑拼接条件,这为复杂形状的造型设计提供理论基础。

另外,从研究领域来看,曲线曲面造型技术已从传统的研究曲线曲面表示、求交和拼接,扩充到了曲线曲面变形、曲面重建、曲面简化、曲面转换和曲面位差(offset)等领域。本书的第二个问题就是研究 Bézier 曲线曲面、有理 Bézier 曲线曲面位差的计算及其计算机实现。位差也称为等距性,它在 CG 以及数控加工中有着广泛的应用,因而成为 CAD/CAGD 中的热门研究课题之一。曲线曲面的等距性还与机械学中的形位公差理论以及区间曲线曲面有着密切的关系。

同时,由于等距曲线、等距曲面仅对原曲线、原曲面上每一点在法向上取定长进行研究,因此它们有一定的局限性。随着 CAD/CAM 技术的发展,为了解决实际工程中遇到的一些问题,人们又将传统意义下的等距曲线、等距曲面作了推广,从而引伸出了广义偏距曲线、斜等距曲面的定义。本书的第三个问题就是研究 Bézier 曲线、有理 Bézier 曲线广义偏距曲线的计算及其计算机实现。

本书的第四个问题是研究曲面变形中的自由变形。在很多时候,设计出的曲线曲面不一定与实际要求吻合得较好,这就要求对曲线曲面的形状作一些调

整。传统的非均匀有理 B 样条(NURBS)曲面模型仅仅允许通过调整控制顶点或者权因子的方式来局部改变曲面形状,至多利用层次细化模型在曲面特定点进行直接操作。一些简单的基于参数曲线的曲面设计方法,如扫掠法(sweeping)、蒙皮法(skinning)、旋转法和拉伸法,也仅允许通过调整生成曲线的方式来改变曲面形状。计算机动画业和实体造型业迫切需要发展与曲面表示方式无关的变形方法或形状调配方法,于是产生了自由变形法(FFD)、基于弹性形变或热弹性力学等物理模型的变形方法、基于求解约束的变形方法、基于几何约束的变形方法等曲面变形技术,以及基于多面体对应关系或基于图像形态中 Minkowski 和操作的曲面调配技术。因此,作为众多变形方法中的一种,自由变形方法有着广泛的应用前景。

本书的第五个问题是将 Bézier 曲面作推广。在目前主流的 CAD 系统中,Bézier 曲面作为生成曲面的方法之一具有重要的地位,因为它能方便地生成逼近于所给定控制多边形网格的曲面,真正起到“辅助设计”的作用。由于 Bézier 方法自身的独特优势,Bézier 曲线曲面理论长期在曲线曲面造型技术领域中扮演着重要的角色。在国内外学者的共同努力下,其理论研究已经逐步走向成熟,但这并不表明该理论已经十分完美了。例如,常用的有理 Bézier 曲面的算法一般比较复杂,而且权因子的选择也没有统一的规则可以遵循,另外,关于曲面的重新参数化方法的论述还不够完善。为了进一步丰富 Bézier 曲面的理论,以及克服原有 Bézier 曲面理论中的一些不足,本书在梁锡坤提出的 Bernstein 函数类的基础上,对基于该类函数的 Bézier 曲面类的生成方法进行了研究。

1.2 预备知识

1.2.1 Bézier 曲线

1.2.1.1 Bézier 曲线的表达式

传统 n 次 Bézier 曲线的表达式为:

$$P(u) = \sum_{i=0}^n B_{n,i}(u) V_i, \quad u \in [0,1] \quad (1.2.1)$$

其中, $V_i (i=0,1,\dots,n)$ 为特征多边形的顶点,通常称为控制顶点或者 Bézier 点,

$B_{n,i}(u) (i=0,1,\dots,n)$ 为 Bernstein 多项式, 且 $B_{n,i}(u) = \frac{n!}{(n-i)! i!} (1-u)^{n-i} u^i$ 。

1.2.1.2 Bézier 曲线的首、末顶点及其导矢

Bézier 曲线以特征多边形的首、末顶点为起、止点, 也就是说, Bézier 曲线自首顶点 V_0 开始, 至末顶点 V_n 结束, 即:

$$\begin{cases} P(0) = V_0 \\ P(1) = V_n \end{cases} \quad (1.2.2)$$

Bézier 曲线和特征多边形的首、末边相切, 且曲线在起、止点处切矢的模长分别等于特征多边形首、末边边长的 n 倍, 即:

$$\begin{cases} P'(0) = n(V_1 - V_0) \\ P'(1) = n(V_n - V_{n-1}) \end{cases} \quad (1.2.3)$$

Bézier 曲线在首、末顶点处的 r 阶导矢分别为:

$$\begin{cases} P^r(0) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} C_r^i V_i \\ P^r(1) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^r (-1)^i C_r^i V_{n-i} \end{cases} \quad (1.2.4)$$

在式(1.2.3)和式(1.2.4)中, n 表示 Bézier 曲线的次数。

1.2.1.3 Bézier 曲线的递归分割算法

应用几何作图法, 可以便捷地确定 Bézier 曲线上与某给定参数值相对应的点。几何作图法的原理如图 1-1 所示。

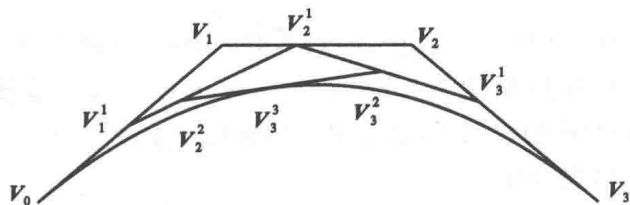


图 1-1 Bézier 曲线的几何作图法

根据给定的参数值 u , 在特征多边形的每一条边上确定某一分割点, 使分割后的两线段之比为 $u : (1-u)$ 。由此, 可得分割点的点矢为:

$$V_i^1 = (1-u)V_i + uV_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

式中的上标 1 表示第一次分割。第一次分割后, 得到 n 个分割点, 由其组成一

个新的多边形,其边数为 $(n-1)$ 。

用相同的方法再对新组成的多边形的各条边进行分割,可以得到 $(n-1)$ 个分割点 $V_i^2 (i=0,1,\dots,n-2)$,它们形成另一个新的多边形。

按照相同的方法反复分割 $(n-1)$ 次以后,只剩下两个顶点 V_0^{n-1} 和 V_1^{n-1} 。对线段 $V_0^{n-1}V_1^{n-1}$ 再分割一次,得到点 V_0^n ,即为 Bézier 曲线上与参数 u 相对应的点, $V_0^{n-1}V_1^{n-1}$ 为曲线在点 V_0^n 处的切线。

de Casteljau 建立如下的递归公式表示上述 Bézier 曲线的几何构造过程:

$$\begin{cases} V_i^r(u) = (1-u)V_i^{r-1} + uV_{i+1}^{r-1}, & r=1,2,\dots,n; i=0,1,\dots,n-r \\ V_i^0(u) = V_i, & i=0,1,\dots,n \end{cases} \quad (1.2.5)$$

式(1.2.5)提供了用几何作图方式直观确定 Bézier 曲线上与任意指定参数相对应的点的方法,同时给出了利用编程软件绘制 Bézier 曲线的简单、稳定的递归算法。

1.2.2 有理 Bézier 曲线

1.2.2.1 有理 Bézier 曲线的定义

设给定控制顶点 $V_0, V_1, V_2, \dots, V_n \in \mathbb{R}^3$, 以及非负实数 $W_0, W_1, W_2, \dots, W_n$, 于是可得一条 n 次有理 Bézier 曲线:

$$P(u) = \frac{\sum_{i=0}^n B_{n,i}(u)W_iV_i}{\sum_{i=0}^n B_{n,i}(u)W_i}, \quad u \in [0,1] \quad (1.2.6)$$

在式(1.2.6)中, $B_{n,i}(u) (i=0,1,\dots,n)$ 表示 Bernstein 基函数; $V_i (i=0,1,\dots,n)$ 表示特征多边形的控制顶点; $W_i (i=0,1,\dots,n)$ 表示分别与控制顶点 $V_i (i=0,1,\dots,n)$ 对应的权因子,这里要求所有权因子 $W_i > 0 (i=0,1,\dots,n)$, 是为了防止曲线上出现奇异点。

1.2.2.2 有理 Bézier 曲线的递归分割算法

与非有理 Bézier 曲线类似,有理 Bézier 曲线亦具有递归分割性质。1983 年, Farin 提出并证明了有理 Bézier 曲线的递归分割原理。人们至今仍然沿用其算法。下面阐述该算法的原理。

用 V_i^r 表示第 r 次分割得到的第 i 个点,用 W_i^r 表示对应于点 V_i^r 的权因子。首先,定义:

$$\begin{cases} W_i^0 = W_i \\ W_i^r(u) = \sum_{j=0}^r W_{i+j}^{r-1} B_{r,j}(u) \end{cases} \quad (1.2.7)$$

则可以证明:

$$W_i^r(u) = (1-u)W_i^{r-1}(u) + uW_{i+1}^{r-1}(u) \quad (1.2.8)$$

其中 $r=1, 2, \dots, n; i=0, 1, \dots, n-r$ 。

根据给定的参数值 u , 在特征多边形的每一条边上确定某一分割点, 使分割后的两线段之比为 $u : (1-u)$ 。由此, 可得分割点的点矢为:

$$\mathbf{V}_i^1 = (1-u) \frac{W_i \mathbf{V}_i}{W_i^1} + u \frac{W_{i+1} \mathbf{V}_{i+1}}{W_{i+1}^1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (1.2.9)$$

在式(1.2.9)中, 上标 1 表示第一次分割。第一次分割以后, 得到 n 个分割点, 由其组成一个新的多边形, 其边数为 $(n-1)$ 。

用相同的方法再对该新多边形的各条边进行分割, 可以得到 $(n-1)$ 个分割点 $\mathbf{V}_i^2 (i=0, 1, \dots, n-2)$, 形成另一个新的多边形。

按相同的方法分割 $(n-1)$ 次以后, 仅剩两个顶点 $\mathbf{V}_0^{n-1}$ 和 $\mathbf{V}_1^{n-1}$ 。对线段 $\mathbf{V}_0^{n-1} \mathbf{V}_1^{n-1}$ 再分割一次, 得到点 $\mathbf{V}_0^n$, 即为有理 Bézier 曲线上与参数 u 相对应的点, $\mathbf{V}_0^{n-1} \mathbf{V}_1^{n-1}$ 为曲线在 $\mathbf{V}_0^n$ 处的切线。

上述有理 Bézier 曲线的几何构造过程可用 Farin 建立的递归公式表示:

$$\begin{cases} \mathbf{V}_i^r(u) = (1-u) \frac{W_i^{r-1}(u)}{W_i^r(u)} \mathbf{V}_i^{r-1}(u) + u \frac{W_{i+1}^{r-1}(u)}{W_{i+1}^r(u)} \mathbf{V}_{i+1}^{r-1}(u), \\ r = 1, 2, \dots, n; i = 0, 1, \dots, n-r \\ \mathbf{V}_i^0(u) = \mathbf{V}_i, \quad i = 0, 1, \dots, n \end{cases} \quad (1.2.10)$$

式(1.2.10)的地位和作用与式(1.2.5)相同, 不仅提供了用作图方式直观确定有理 Bézier 曲线上与任意指定参数相对应的点的方法, 还给出了利用编程软件绘制有理 Bézier 曲线的简单、稳定的递归算法。

1.2.3 Bézier 曲面

Bézier 曲面是 Bézier 曲线向曲面的直接拓展。为了让读者理解 Bézier 曲面的形成原理, 这里先来阐述双三次 Bézier 曲面的形成过程, 再将其推广到一般 Bézier 曲面。

1.2.3.1 双三次 Bézier 曲面

定义一张双三次 Bézier 曲面需要 $(3+1) \times (3+1) = 16$ 个控制顶点,如图 1-2 所示,该顶点集可以用式(1.2.11)所示的矩阵来表示:

$$P_3 = \begin{bmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & P_{0,2} & P_{0,3} \\ P_{1,0} & P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3} \\ P_{2,0} & P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} \\ P_{3,0} & P_{3,1} & P_{3,2} & P_{3,3} \end{bmatrix} \tag{1.2.11}$$

其中,将 P_3 称为定义双三次 Bézier 曲面的特征多边形网格。

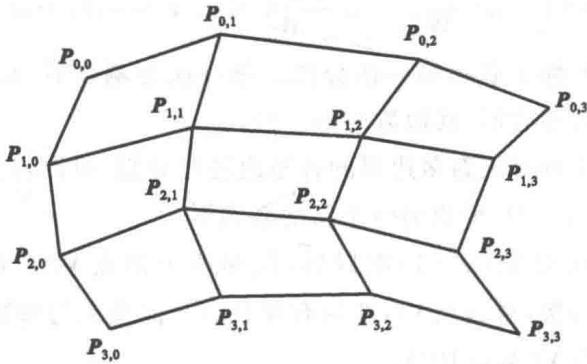


图 1-2 双三次 Bézier 曲面的特征多边形网格

双三次 Bézier 曲面的形成过程如下:

(1) 由式(1.2.11)中的四个列阵生成四条三次 Bézier 曲线,记作 $S_0(u)$, $S_1(u)$, $S_2(u)$ 和 $S_3(u)$,表示为:

$$\begin{aligned} & [S_0(u) \quad S_1(u) \quad S_2(u) \quad S_3(u)] \\ &= [(1-u)^3 \quad 3(1-u)^2u \quad 3(1-u)u^2 \quad u^3]P_3 \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

其中参数 $u \in [0,1]$ 。

(2) 任意给定一个 u 值,设 $u=u_1 \in [0,1]$,则可在上述四条曲线上分别得到四个点 $S_0(u_1)$, $S_1(u_1)$, $S_2(u_1)$ 和 $S_3(u_1)$,它们构成了一个新的多边形。该多边形在 v 向定义了一条新的三次 Bézier 曲线 $r(u_1, v)$:

$$r(u_1, v) = [S_0(u_1) \quad S_1(u_1) \quad S_2(u_1) \quad S_3(u_1)] \begin{bmatrix} (1-v)^3 \\ 3(1-v)^2v \\ 3(1-v)v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} \tag{1.2.13}$$