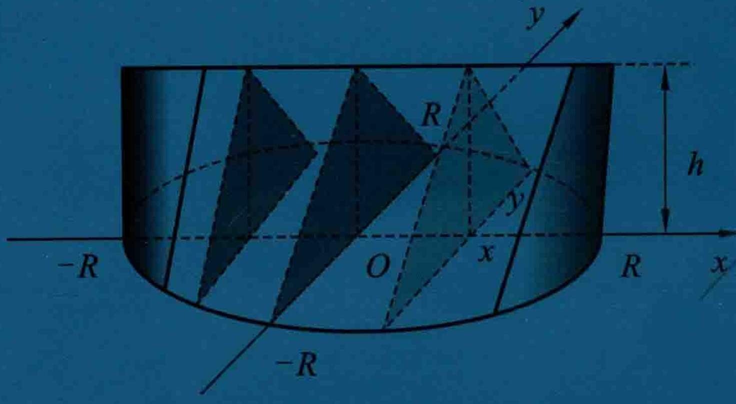
高等学校“十三五”规划教材

高等数学(I)

Gaodeng Shuxue

主编◎杨波　王安平



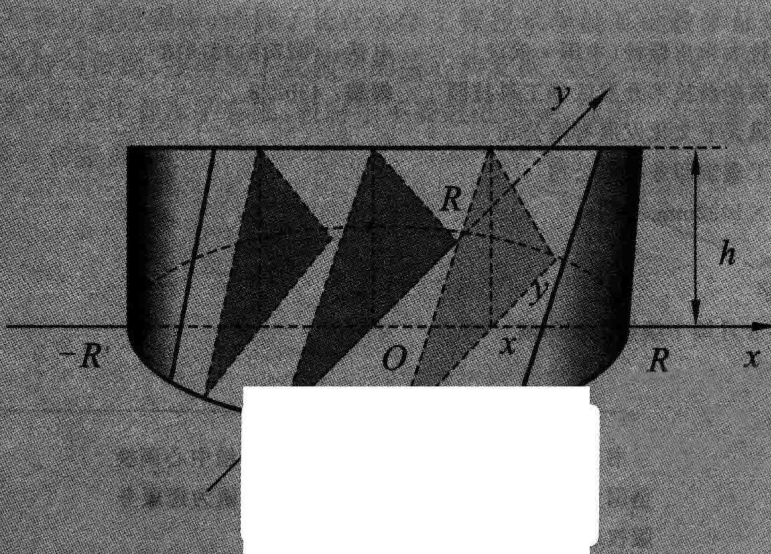
華中科技大学出版社
http://www.hustp.com

高等学校“十三五”规划教材

高等数学(I)

Gaodeng Shuxue

主　编◎杨　波　王安平
副主编◎张月梅　冉庆鹏　陈　帆　都俊杰
参　编◎梁　向　李琼琳　秦　川　范臣君　赵　伟



华中科技大学出版社
http://www.hustp.com
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. Ⅰ/杨波,王安平主编.—武汉:华中科技大学出版社,2017.8
ISBN 978-7-5680-2816-5

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①杨…　②王…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 105822 号

高等数学(Ⅰ)
Gaodeng Shuxue

杨　波　王安平　主编

策划编辑:袁　冲
责任编辑:段亚萍
封面设计:孢　子
责任监印:朱　玢
出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)　　电话:(027)81321913
武汉市东湖新技术开发区华工科技园　　邮编:430223
录　　排:武汉正风天下文化发展有限公司
印　　刷:武汉华工鑫宏印务有限公司
开　　本:787mm×1092mm　1/16
印　　张:17
字　　数:434 千字
版　　次:2017 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价:38.00 元

华中出版

前　　言

随着我国高等教育的不断发展，高等教育呈现了多层次的发展需要. 不同层次的高等院校需要有不同层次的教材. 本套教材是根据教育部最新制定的高等工科院校《高等数学课程教学基本要求》，并参考全国硕士研究生入学统考数学考试大纲，并结合我院教学的实际需要编写而成的.

本套教材分Ⅰ、Ⅱ两册，其中Ⅰ册共七章，依次为第一章函数，第二章极限与连续，第三章导数与微分，第四章微分中值定理与导数的应用，第五章不定积分，第六章定积分及其应用，第七章常微分方程. 为了满足读者阶段复习的需要，每章末安排有自测题. 本套教材遵循高等教育的规律，坚持"淡化抽象理论的推导，注重思想渗透和应用"思路.

本教材是在使用了多年的讲义基础上修改而成的，在选材和叙述上尽量联系实际背景，注重数学思想的介绍，力图将概念写得通俗易懂，便于理解. 在体系安排上，力求从易到难，以便读者学习、理解、掌握和应用. 在例题和习题的配置上，注重贴近实际，尽量做到具有启发性和应用性.

Ⅰ册由杨波、王安平老师全面负责筹划、统稿和整理. 其中第一章由梁向老师编写，第二章由杨波老师编写，第三章由陈帆老师编写，第四章由张月梅老师编写，第五章由都俊杰老师编写，第六章由王安平老师编写，第七章由冉庆鹏老师编写.

本教材在编写过程中，参考了教材后所列参考文献，我们对这些参考书的作者表示感谢. 编写完成后，荆州理工职业学院的梁树生副教授审阅了全书，并提出了许多宝贵的修改意见，在此表示衷心的感谢!

本教材在编写和出版过程中，得到了长江大学工程技术学院基础教学部数学教研室全体数学教师的大力支持与帮助，并得到了院领导的关心和支持，在此一并表示由衷的感谢!

由于时间仓促，加之作者水平有限，教材中不妥之处难免，恳请广大专家、教师和读者提出宝贵意见，以便修订和完善.

编　者

2017 年 6 月

目　录

第一章　函　　数

函数是数学中最重要的基本概念之一，也是高等数学的主要研究对象. 本章我们将在中学数学的基础上，对集合、函数的概念以及函数的简单性质作归纳总结和加深，为后面学习高等数学知识打基础。

1.1　函　　数

1.1.1　集合与区间

1. 集合的概念

我们在初等数学中学过集合的概念. 我们把具有某种特定性质的事物的全体称为**集合**（简称**集**）；组成这个集合的事物称为**元素**. 我们常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合中的元素. 如果 a 是集 A 的元素，则称 a 属于 A，记作 $a\in A$；反之就称 a 不属于 A，记作 $a\notin A$. 集合中的元素具有**确定性**，**互异性**，**无序性**. 如果集 A 的元素只有有限个，则称 A 为有限集；不含任何元素的集称为空集，记作 $\varnothing$；一个非空集，如果不是有限集，就称为无限集.

可以用列举集合中元素的办法来表示集合，例如由元素 a,b,c 构成的集合可表示为 $\{a,b,c\}$. 也可以用描述集合中元素的特征性质来表示集合. 例如集合 $\{0,1,2,3\}$ 可以表示为 $\{n\,|\,n$ 是整数，$0\leqslant n\leqslant 3\}$. 数学中常见的一些集合及其记号如下：

全体自然数组成的集合 $\{0,1,2,3,\cdots\}$ 称为自然数集，记作 $\mathbf{N}$；

全体整数组成的集合 $\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots\}$ 称为整数集，记作 $\mathbf{Z}$；

全体有理数组成的集合 $\{p/q\,|\,p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}$，且 $q\neq0\}$ 称为有理数集，记作 $\mathbf{Q}$；

全体实数组成的集合称为实数集，记作 $\mathbf{R}$. 本书研究的范围为实数.

如果集 A 中的元素都是集 B 中的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$，读作 B 包含 A 或 A 包含于 B. 如果集 A 与集 B 中的元素相同，即 $A\supset B$ 且 $B\supset A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

2. 区间与邻域

设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，我们把集合 $\{x\,|\,a<x<b\}$ 称为以 a,b 为端点的开区间，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\},$$

把集合 $\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为以 a,b 为端点的闭区间，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}.$$

在图 1-1-1 中，开区间 (a,b) 的端点不包括在内，把端点画成空点；闭区间 $[a,b]$ 的端点包

括在内,把端点画成实点.

图 1-1-1

类似地有左开右闭区间

$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\},$$

和左闭右开区间

$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\},$$

上述四种区间统称为有限区间,此外还有五种无限区间:

$$\begin{aligned}(-\infty,a)&=\{x|-\infty<x<a\},\\(-\infty,a]&=\{x|-\infty<x\leqslant a\},\\(a,+\infty)&=\{x|a<x<+\infty\},\\[a,+\infty)&=\{x|a\leqslant x<+\infty\},\\(-\infty,+\infty)&=\{x|-\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R}.\end{aligned}$$

这里“$-\infty$”和“$+\infty$”只是一个记号,分别读作负无穷大和正无穷大.

通常我们用字母 I 来表示某个给定的区间.

设 $a,\delta\in\mathbf{R}$,且 $\delta>0$,我们把开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为以 a 为中心、以 δ 为半径的邻域,记作 $U(a,\delta)$. 即

$$\begin{aligned}U(a,\delta)&=(a-\delta,a+\delta)\\&=\{x||x-a|<\delta\}.\end{aligned}$$

称集合 $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$ 为以 a 为中心、以 δ 为半径的去心邻域,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\begin{aligned}\mathring{U}(a,\delta)&=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)\\&=\{x|0<|x-a|<\delta\}.\end{aligned}$$

这里邻域的半径 δ 虽然没有规定其大小,但在使用中一般总是取为很小的正数. 有些情况下不一定要指明 δ 的大小,这时我们往往把 a 的邻域和 a 的去心邻域分别简化为 $U(a)$ 和 $\mathring{U}(a)$.

1.1.2 平面直角坐标系

过平面上点 O 作两条互相垂直的数轴,分别置于水平位置与竖直位置,取向右和向上的方向为两条数轴的正方向,水平方向的数轴叫做 x 轴或横轴,竖直方向的数轴叫做 y 轴或纵轴,这样构成平面直角坐标系,简称为直角坐标系,x 轴和 y 轴称为坐标轴,点 O 称为直角坐标系的原点.

建立了直角坐标系的平面叫做坐标平面,两坐标轴把坐标平面分成四个部分,x 轴和 y 轴正向所夹部分叫做第一象限,其他三个部分按逆时针方向依次叫做第二象限、第三象限和第四象限. 象限以数轴为界,坐标轴上的点不属于任何象限. 一般情况下,x 轴和 y 轴的长度单位相同.

建立了平面直角坐标系后,对坐标平面内任一点 C,过点 C 分别作 x 轴、y 轴的垂线,垂足

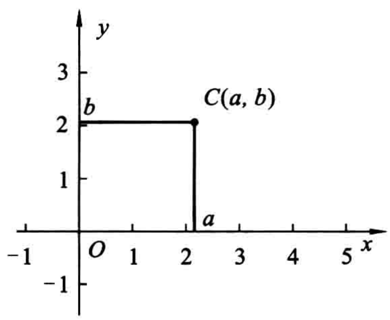


图 1-1-2

在 x 轴、y 轴上的坐标分别为 a，b，这样由点 C 确定了一个有序数对 (a,b)；反过来，对于任何有序数对 (a,b)，同样我们可以确定坐标平面内一个点 C，于是点 C 和有序数对 (a,b) 之间建立了一一对应关系，所以我们把有序数对 (a,b) 叫做点 C 的坐标，记作 $C(a,b)$，其中 a，b 分别叫做点 C 的横坐标、纵坐标(如图 1-1-2 所示).

1.1.3　函数的概念

定义 1　设 x、y 是两个变量，D 是一个给定的数集，若对于 D 中每一个 x，按照一定的对应法则 f，总有唯一确定的 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 数集 D 称为这个函数的**定义域**，数集 $M=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$ 称为函数的**值域**. x 称为**自变量**，y 称为**因变量**.

注意：

(1) 确定了定义域和对应法则，一个函数也就随之确定，所以函数的定义域和对应法则是确定函数的**两个要素**；

(2) 在高等数学的范围内，我们研究的函数是单值函数.

称平面点集 $\{(x,y) \mid y=f(x), x\in D\}$ 为函数 $y=f(x)$ 的图像.

函数的表示法：解析法，图像法，列表法. 用得最多的是解析法.

例 1　求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{x-1}$；　　(2) $f(x)=\lg(1-x)+\sqrt{x+2}$.

解　(1) 要使函数有意义，必须

$$4-x^2\geqslant 0 \text{ 且 } x-1\neq 0,$$

解得定义域为 $D=[-2,1)\cup(1,2]$；

(2) 要使函数有意义，必须

$$1-x>0 \text{ 且 } x+2\geqslant 0,$$

解得定义域为 $D=[-2,1)$.

注：函数的定义域是集合，故应写成集合或区间的形式.

例 2　函数 $f(x)=x$ 与函数 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 是否相同，为什么？

解　$g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$ 与 $f(x)=x$ 的定义域相同，但对应法则不同，故不是同一个函数.

例 3　设 $f(x+3)=\dfrac{x+1}{x+2}$，求 $f(x)$.

解　由

$$f(x+3)=\frac{x+1}{x+2}=\frac{(x+3)-2}{(x+3)-1}$$

可得

$$f(x)=\frac{x-2}{x-1}.$$

注：也可用换元法解，令 $x+3=t$，得 $x=t-3$，代入原式即可.

几种特殊的函数

(1) **分段函数**　在实际应用上有些函数要用几个式子表示，这种在自变量的不同变化范

围内,对应法则用不同式子来表示的函数,通常称为分段函数.

例如:

$$y=f(x)=\begin{cases}1-x, & -1\leqslant x<0\\ 1+x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

是一个分段函数.它的定义域为

$$D=[-1,0)\cup[0,+\infty)=[-1,+\infty),$$

当 $x\in[-1,0)$ 时,对应的函数值 $f(x)=1-x$;

当 $x\in[0,+\infty)$ 时,对应的函数值 $f(x)=1+x$.函数的图像如图 1-1-3 所示.

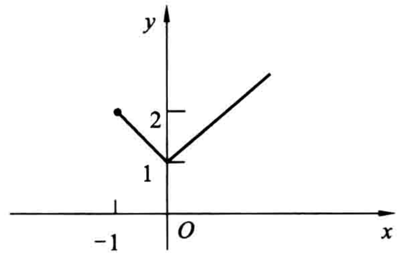


图 1-1-3

例 4　设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x, & 0\leqslant x<1\\ x, & 1\leqslant x<2,\\ x^2-6x+\dfrac{19}{2}, & 2\leqslant x<4\end{cases}$

求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$,$f(1)$ 及 $f(3)$。

解

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4};\quad f(1)=1;$$

$$f(3)=3^2-6\times3+\frac{19}{2}=\frac{1}{2}.$$

(2) **符号函数**

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=\{-1,0,1\}$.如图 1-1-4 所示.

对于任何实数 x,有

$$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|.$$

(3) **取整函数**　$y=[x]$,$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=\mathbf{Z}$.例如 $[2.9]=2$,$[0]=0$,$[2]=2$,$[-2.9]=-3$,$[-1.3]=-2$.如图 1-1-5 所示.

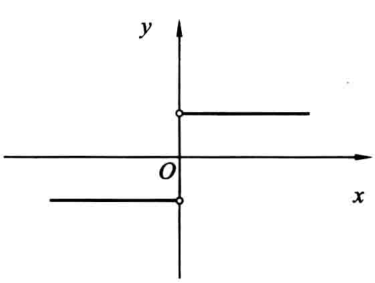


图 1-1-4

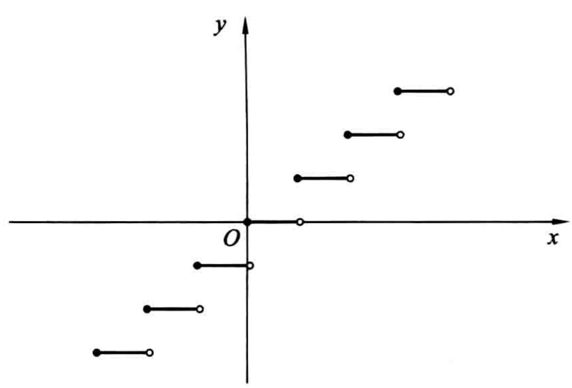


图 1-1-5

(4) **绝对值函数**

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=[0,+\infty)$. 如图 1-1-6 所示.

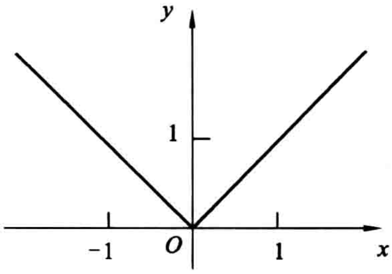


图 1-1-6

1.1.4　函数的简单性态

1. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果对于区间 (a,b) 内的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**单调增加**；当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**单调减少**. 区间 (a,b) 称为函数 $f(x)$ 的**单调区间**.

例 5　证明：函数 $y=x+\ln x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

证明　任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，不妨设 $x_1<x_2$，由于 $0<x_1<x_2$，故

$$\frac{x_2}{x_1}>1,\quad \ln\frac{x_2}{x_1}>0,$$

所以

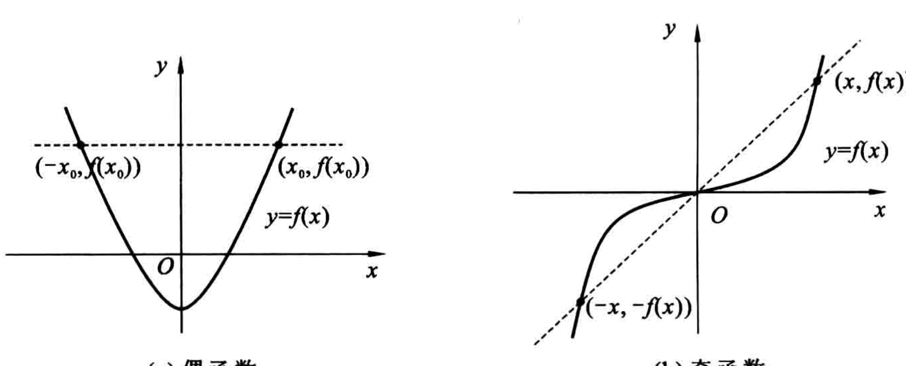
$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=(x_2+\ln x_2)-(x_1+\ln x_1)\\&=(x_2-x_1)+\ln\frac{x_2}{x_1}>0,\end{aligned}$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$，因此函数 $y=x+\ln x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

2. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任意 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是 D 上的**偶函数**，如图 1-1-7(a) 所示；如果对于任意 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是 D 上的**奇函数**，如图 1-1-7(b) 所示.

偶函数的图形关于 y 轴对称；奇函数的图形关于原点对称.



(a) 偶函数　　　　(b) 奇函数

图 1-1-7

例 6 判断函数 $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$ 奇偶性.

解 显然,函数的定义域为$(-1,1)$,对于任意的 $x\in(-1,1)$,因为

$$f(-x)=\ln\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\ln\frac{1+x}{1-x}$$
$$=-\ln\frac{1-x}{1+x}=-f(x),$$

所以 $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$ 为奇函数.

3. 有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,若存在常数 M,使得对于任意 $x\in I$,都有

$$f(x)\leqslant M(f(x)\geqslant M)$$

成立,则称 $f(x)$ 在区间 I 上有**上(下)界**,其中常数 M 称为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个**上(下)界**;若存在常数 $M(>0)$,使得对于任意 $x\in I$,都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立,则称 $f(x)$ 在区间 I 上**有界**,其中常数 M 称为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个**界**;否则称 $f(x)$ 在区间 I 上**无界**.

例如,函数 $y=\sin x$ 是有界函数.因为在其定义域$(-\infty,+\infty)$内,都有$|\sin x|\leqslant 1$,同时也是有上界和下界的;而函数 $y=x^2+1$ 在其定义域$(-\infty,+\infty)$内有下界 1,但无上界,所以是无界函数.

又如,函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间$(\delta,1)(0<\delta<1)$上有界,而在区间$(0,1)$上无界.

定理 $f(x)$ 在区间 I 上有界当且仅当 $f(x)$ 在区间 I 上既有上界也有下界.

4. 周期性

设函数 $y=f(x)$ 在数集 D 上有定义,若存在一正数 T,使得对于任何 $x\in D$,$x+T\in D$,都有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称函数 $y=f(x)$ 是**周期函数**,T 称为**周期**.若周期函数存在最小正周期,则称此最小正周期为**基本周期**,简称**周期**.

例如,$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的周期是 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$,$y=A\tan(\omega x+\varphi)$ 的周期 $T=\frac{\pi}{|\omega|}$.

习 题 1.1

1. 一列火车以初速度 v_0,等加速度 a 出站,当速度达到 v_1 后,火车按等速运动前进;从出站经过 T 时间后,又以等减速度 $2a$ 进站,直至停止.(1) 写出火车速度 v 与时间 t 的函数关系式;(2) 作出函数 $v=v(t)$ 的图形.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;　　(2) $y=\frac{1}{x}+\sqrt{1-x^2}$;

(3) $y=-2\sqrt{\arccos x}$；　(4) $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

3. 判断下列各组函数是否相同,并说明理由.

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}, y=x+1$；　(2) $y=\ln\dfrac{x+1}{x-1}, y=\ln(x+1)-\ln(x-1)$；

(3) $y=\sqrt[3]{x^4-x^3}, y=x\sqrt[3]{x-1}$；　(4) $y=\sqrt{1-\sin^2 x}, y=\cos x$.

4. 判断下列函数在指定区间内的单调性.

(1) $y=\dfrac{x}{1-x}, x\in(-\infty,1)$；　(2) $y=2x+\ln x, x\in(0,+\infty)$.

5. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=\tan x-\sin x-1$；　(2) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；

(3) $y=5x^6-2x^2+3$；　(4) $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$；

(5) $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$；　(6) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

6. 证明函数 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的.

1.2　初等函数

1.2.1　基本初等函数与函数的运算

1. 基本初等函数

(1) **幂函数** $y=x^\mu$(μ 为实数).定义域与值域随 μ 的不同而不同,但不论 μ 取什么值,函数在 $(0,+\infty)$ 内总有定义(如图 1-2-1 所示).

(2) **指数函数** $y=a^x(a>0,a\neq 1)$.定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $(0,+\infty)$.若 $a>1$,则 $y=a^x$ 单调增加;若 $0<a<1$,则 $y=a^x$ 单调减少(如图 1-2-2 所示).

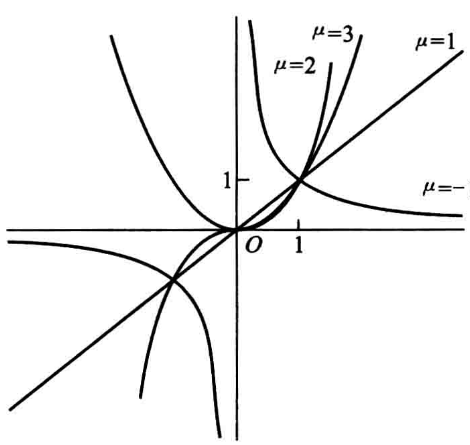


图 1-2-1

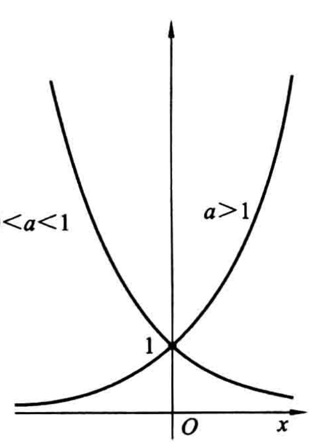


图 1-2-2