Mathematics Analysis Courses

俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

数学解析教程（下卷）2

[苏] 别尔曼特 著 张理京 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

数学解析教程（下卷）②

Mathematics Analysis Courses

[苏]别尔曼特 著

张理京 译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书共有三章,主要介绍了曲线积分及曲面积分,微分方程,三角级数等知识,书中配有相关例题以供读者学习理解.

本书适合大学师生及数学爱好者参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

数学解析教程. 下卷. 2/(苏)别尔曼特著;张理京译. ——哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2017.6

ISBN 978-7-5603-6583-1

Ⅰ.①数… Ⅱ.①别… ②张… Ⅲ.①数学分析-教材 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 088377 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 穆 青
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 15.25 字数 291 千字
版 次 2017 年 6 月第 1 版 2017 年 6 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-6583-1
定 价 48.00 元

◎ 原序

在这第六版中，本书经过相当多的修订，其首要目的是使本书能完全适合苏联高等教育部所颁布的高等工业学校新教学大纲(1950 年).

修订时著者面前摆着下列三项总的任务：

1)把属于哲学方法论上的以及属于历史性的知识放到教程里面去；

2)讲解一些为每个工程师所必需的知识，即关于近似计算法及实际计算以及关于帮助作那些计算所用的计算机；

3)从教学法方面来改进教本，并参照几年来的教学经验，克服教本上所发现的缺点.

著者在引论里面要简略讲到数学的起源问题，讲到数学的重要任务，讲到理论与实践间的相互关系，讲到俄罗斯伟大数学家(欧拉·罗马契夫斯基，切比雪夫)以及其他杰出学者与大工程教学家(如茹科夫斯基，恰普雷金，克雷洛夫)在科学与工程发展史上的地位.

在预篇里，特别有一节讲近似计算法中的初等问题. 本书后面处处尽可能讲到如何把理论应用到数值计算问题上. 因此关于微分概念、有限增量公式、泰勒公式与级数等，对于各种近似值计算法的应用就讲得相当多一些. 书中加了几小节关于普

通方程的近似解法，函数的图解微分与积分法以及微分方程的近似积分法等．此外，著者还设法让读者认识一些重要的自动计算机及计算仪器（迄今所知，这在教科书性质的文献上还是个创举），在预篇的 §3 中要叙述那些处理各个数据的计算机，并且在本书后面适当的地方还要讲那些处理连续数据的仪器（积分制图器，测面器，积分计，测长计，微分及谐量分析器）．

但在添加这些材料时，著者会避免把技术上的细节讲得太多，只能让读者去参考关于这方面的现有专门书籍以及每件仪器上通常都附有的说明书．著者只打算使读者对那些帮助作繁复运算的机械工具，了解一些大概．

现代科学与工程实践上的创造性工作都需要具有极高的数学知识，并且这不仅是指能够搬运公式，而主要的乃是需了解数学解析中各种概念与运算的本质．因此如何克服那个在数学中易陷入的以及在实际教学工作中易犯的“公式主义”，如何克服那随之而来的对数学解析的肤浅学习，乃是我们最重大与主要的问题．著者认为如果按下列程序来拟教材结构的话，就可能正确地解决这个问题，这个程序是：实践—解析的基本概念—这些概念的性质（理论）—计算方法—用法—实践．著者在这全部教程内一贯按这种程序来讲解，那样才可能指出数学与实践的联系．揭露其中一些基本概念的物质根源，并说明在解决具体的物理与技术问题时如何应用数学理论的明显原则．在所有这些要求下，著者当然有责任把本书中的每一部分弄得尽可能易于了解．

从讲解方面来改进本书的路线，是根据著者自身的经验以及用过本书的教授和教师们的许多意见得来的．首先，著者设法把长的以及繁复的一些讨论分成几段．其次，著者在内容方面重新做了各种穿插与编排，使教本的结构更有层次并且更加简单．

莫斯科航空学院高等数学教研组在总结对于本书初稿的讨论中，表明他们的希望，认为可以将有关定积分与不定积分的材料予以改编，以便毫无困难地按照任意次序进行这部分材料的讲授，先讲定积分后讲不定积分，或者颠倒来讲都行．有些工学院里讲这几章时宁愿先讲不定积分，著者考虑到他们的愿望，因此也就做了这种改编，最后，本书的全部材料都经重新仔细校阅过并且重写过．

除了上面所讲的以外，本书在各章节上还有如下的一些最重要的改动：

第 2 章中，加上均匀连续性概念，并证明了基本初等函数的连续性．第 3 章中，把微分概念放在全部微分法之后再讲，并加上莱布尼兹公式．第 4 章几乎所有各部分都重编过，里面提出了近似多项式问题，讨论了切比雪夫线性近似式（以及与零相差最小的切比雪夫多项式），讲解了曲线的接触度问题，然后引出曲率概念．在第 6 章中，叙述了奥氏（奥斯特罗格拉德斯基 M. B. Остроградский）的有理分式积分法．第 7 章是新添的，讲直接应用于计算定积

分的积分方法，讲（数值计算的及图解的）近似积分法及旁义积分，并且关于后者的理论大为增加，这一章可以在依照第 5 章、第 6 章的次序讲完后再讲，也可以在依照第 6 章、第 5 章的次序讲完后再讲. 我们又把级数论（三角级数除外）作为第 9 章，其中添入级数的运算法则，扩充了关于幂级数应用问题的材料，补充了一些复数的四则运算法及复平面上的幂级数. 第 10 章中搜集了多变量函数的导数及微分概念以及偏微分法的材料，第 11 章讲微分学的下列应用：在对于所有关于函数的研究，在矢量解析及几何上的应用，其中最后几小节的材料增加得相当多. 第 13 章中把关于场论（势，流及环流）的问题合并成一大节，这可以算是矢量解析的积分部分. 而第 11 章 §2 中的材料则可作为矢量解析的微分部分（梯度，散度及旋度）. 在第 15 章中，我们导出了逐段光滑函数展开为傅里叶级数的充分条件，并叙述了具有有限个间断点及极值点的函数展开为这种级数的类似条件，此外又讲了克雷洛夫使级数收敛性加快的方法.

适用于这新订本的别尔曼特（А. Ф. Бермант）习题汇集也已修订（下略）.

◎ 目录

第13章 曲线积分及曲面积分

曲线积分及曲面积分这两个概念,特别是在与矢量解析上的概念结合起来时,是对物理及工程问题作理论研究时最重要的工具. 因此读者在本章中不但会找到曲线积分及曲面积分在理论方面的详细讲解,并且也会学到这两者在物理问题上的应用例子. 我们先讲对曲线长度的曲线积分(§1)——这是直接与普通积分有关的概念,然后讲对坐标的曲线积分概念(§2),同时要对这类积分在什么条件下才不取决于积分路线的问题加以充分注意.

在§3中要讲曲面积分. 在§4中讲各类积分之间的关系,这种关系是由具有重要意义的格林公式、斯托克斯公式及奥氏[①]公式所表达出来的.

最后在§5中要考虑场论初阶. 这里要引入矢量解析中的几个概念(势、流、环流). 以前所讲的那几个矢量解析概念(梯度、散度、旋度)具有"微分"性质,而本章要讲的这几个矢量解析概念则具有"积分"性质.

§1 对长度的曲线积分

200. 关于功的问题、对曲线长度的积分

到现在为止,我们所用的积分域或是数轴上的一段,或是平面域,或是空间域. 现在要用平面或空间的曲线来作为积分域.

先从功的问题讲起.

设点 P 在一曲线 $L(AB)$(为简便起见,把它算作平面曲线)

① 俄罗斯著名数学家奥斯特罗格拉德斯基,我们简称为奥氏.

上运动且有力 $\boldsymbol{A}(P)$ 施于该点上，而所施的力一般来说是沿路改变大小与方向的(图 62). 力的大小 $|\boldsymbol{A}(P)|$ 用 $\varphi(P)$ 来表示. 力 $\boldsymbol{A}(P)$ 与运动方向(切线 PT)之间的角度用 $\tau(P)$ 来表示.

现在要求力 $\boldsymbol{A}(P)$ 在全段路线 L 上所作的功. 求法与 n°95 中所讲的最简单情形完全相同.

首先要记得我们定义功时作为出发点的几个前提:

1) 在整段路程上所作的功，等于其各分段路程上所作功的和(可加性);

2) 力不变时，所作的功等于力与路线的乘积，并且作功的只是与运动方向相合的那一部分力(力的切线支量).

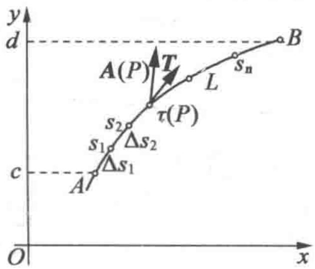

图 62

把曲线 L 分成 n 段(n 个子弧段) $s_1, s_2, \cdots, s_n$，其长度各用 $\Delta s_1, \Delta s_2, \cdots, \Delta s_n$ 表示.

取子弧段 s_i 并设力——矢量 $\boldsymbol{A}(P)$——在整个子弧段上保持不变，等于它在弧 s_i 上某点 P_i 处的值. $\boldsymbol{A}(P_i)$ 的切线支量等于 $\boldsymbol{A}(P_i)$ 在切线 P_iT_i 方向上的投影，即等于 $\varphi(P_i)\cos\tau(P_i)$. 这时在 s_i 这一段路线上的功显然是

$$\varphi(P_i)\cos\tau(P_i)\Delta s_i \text{ 或 } f(P_i)\Delta s_i$$

其中

$$\varphi(P_i)\cos\tau(P_i) = f(P_i)$$

如果把作用于所有子弧段上的力都简化成像 s_i 上的力那样，那么把对应于所有子弧段 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 的功都加起来之后，可得

$$A_n = f(P_1)\Delta s_1 + f(P_2)\Delta s_2 + \cdots + f(P_n)\Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i \qquad (*)$$

A_n 这个量我们当然只拿来作为所求功 A 的近似值，但我们从题中的条件可知，各子弧段 s_i 中的最大弧段越小时，这近似值就越加准确. 因此我们自然可把 A 定义为 $\max \Delta s_i \to 0$ 时 A_n 的极限

$$A = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} A_n$$

和式(*)叫作函数 $f(P)$ 在曲线 L 上对长度的第 n 积分和式. 这积分和式当最大子弧段的长度趋于零时的极限，叫作函数 $f(P)$ 在曲线 L 上对长度的曲线积分.

这可写作

$$I=\lim\sum_{i=1}^{n}f(P_i)\Delta s_i=\int_L f(P)\,\mathrm{d}s$$

如果要注明曲线 L 的始点及终点,可把积分写作

$$I=\int_{(A)}^{(B)}f(P)\,\mathrm{d}s$$

其中(A)及(B)是该始点及终点的某种记号.

曲线 $L(AB)$叫作积分路线或积分回线;积分路线上的变点 P 叫作积分变点;可变长度 s 叫作积分变量;函数$f(P)$叫作被积函数;而式子$f(P)\,\mathrm{d}s$ 叫作被积分式或积分元素. 在积分路线 L 是一段数轴的特殊情形下,我们便得到对直线长度的积分,这与 $n°185$ 中所给积分的一般定义完全相合.

所以,用了上述新的积分概念之后,我们便可以说:变力在某一路线上所作的功,可用该力在运动方向上的投影对路线长度的曲线积分来表示

$$A=\int_L\varphi(P)\cos\tau(P)\,\mathrm{d}s$$

这里重要的一点是,路线——曲线 L——在相当大的范围内是可以任意取的,同时它可以是开曲线也可以是闭曲线.

现在还要注意,本章所讲到的一切曲线总假定是"逐段光滑"的,也就是由有限个具有连续转动切线的连续弧段组成的. 以后我们不再特别指出这个条件.

当运动沿空间曲线而进行时,功的定义以及对长度的曲线积分概念的定义,与平面曲线时的情形完全相仿. 即

$$I=\int_L f(P)\,\mathrm{d}s=\lim_{\max\Delta s_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(P_i)\Delta s_i$$

这里 P_i 是子弧段 s_i 上的任意一点.

当被积函数$f(P)$为已给时,不管曲线 L 上的两个端点中取哪一点作为始点,哪一点作为终点,也就是说不管曲线长度依照哪一个方向计算,在对长度的曲线积分的情形下,这是没有区别的.

我们要知道,当$f(P)\equiv 1$ 时,曲线积分

$$I=\int_{(A)}^{(B)}\mathrm{d}s$$

只表示曲线 $L(AB)$的全长 l. 曲线长度的这种表示法,我们已在 $n°131$ 及 $n°181$ 的记号写法中用过.

201. 对长度的曲线积分的属性、计算法及用法

我们可以看出,$n°185$ 中对于积分的一般定义完全适用于对长度的曲线积分. 就这种积分的情形来说,一般定义中的积分域 W 是曲线 L,子域的量度 Δw_i

是子弧段的长度 Δs_i. 曲线积分中的积分元素 $f(P)\mathrm{d}s$ 则由积分域 L 上变点 P 处的函数值与积分变量的微分(或元素)$\mathrm{d}s$ 相乘而得.

根据上面所讲,可知普通积分所具的属性自然仍为对长度的曲线积分所具有. 特别是当积分路线——曲线 L——分成 n 段弧 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 时,在全部曲线 L 上的积分等于在各弧段上的积分的和

$$\int_L f(P)\mathrm{d}s = \int_{s_1} f(P)\mathrm{d}s + \int_{s_2} f(P)\mathrm{d}s + \cdots + \int_{s_n} f(P)\mathrm{d}s$$

(建议读者把这种曲线积分的主要属性列举出来并加以证明).

现在讲对长度的曲线积分的计算方法. 我们要指出这种曲线积分可以化为普通(直线)积分.

当曲线 $L(AB)$ 上的变点 P 从始点 A 向终点 B 移动时,$\overset{\frown}{AP}$的长度 s 从 0 不断增大到曲线 AB 的全长 l. 这时点 P 的每一位置对应着一个 s 值,反过来说,在其变化区间内的每个 s 值对应着一定的点 P——使$\overset{\frown}{AP}$具有长度 s 的那一点. 于是$f(P)$可以看作是 s 的函数:$\varphi(s)$. 若函数$f(P)$用点 P 的坐标所定的表达式 $f(x,y)$ 给出,那么把这表达式中的 x 及 y 各换成 $x(s)$ 及 $y(s)$ 之后(这里

$$x = x(s) \text{ 及 } y = y(s)$$

是曲线 L 的自然方程),即得单变量——参数 s——的函数

$$f(P) = f(x(s), y(s)) = \varphi(s)$$

于是

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} \varphi(s_i)\Delta s_i$$

上式右边乃是以 s 为变量的普通积分和式. 取极限,即得 I 的式子,其形式如同普通积分

$$I = \int_0^l \varphi(s)\mathrm{d}l \qquad (**)$$

但通常用参数方程

$$x = x(t), y = y(t)$$

给出曲线 L 时,其中的参数 t 不是弧长 s. 现在我们与以往一样假定点 $P(x,y)$ 在 L 上沿一个方向移动时,参数 t 作对应的单调变化:从 t_1 变到 t_2. 于是我们可以把 s 看作是 t 的函数

$$s = s(t)$$

并且假定它是连续可微分的(即具有连续导函数). 因此如果在积分($**$)中作置换 $s = s(t)$,便得

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

其中

$$\psi(t)=\varphi(s(t))=f(x(t),y(t))$$

又由于

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}$$

故可写出

$$\int_L f(P)\,\mathrm{d}s=\int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

根号前面取(+)或是取(-)的问题,要看 t 的增大对应于 s 的增大还是减小而决定.

所以,若曲线的参数式为

$$x=x(t),y=y(t)$$

(其中 $x=x(t)$ 及 $y=y(t)$ 是具有连续导函数的单值函数),则要把对长度的曲线积分化为直线(普通)积分时,只需把积分元素中的 x,y 及 $\mathrm{d}s$ 换成用 t 及 $\mathrm{d}t$ 表示的式子,然后在对应于积分路线的、t 轴的区间上取积分(假设点 P 在积分路线上移动时,t 的变化是单调的).

依据上述命题及普通积分的存在定理,就不难建立对长度的曲线积分的存在定理:如果取连续函数在(具有连续转动切线的)曲线 L 上的第 n 积分和式,则当 $n\to\infty$ 及最大子弧段的长度趋于零时,不管曲线 L 是用什么方式分成子弧段的,也不管这些子弧段上的哪些点作为点 P,所取积分和式具有极限.

如果积分路线上不同部分的参数方程各不相同,则应把积分路线分成几部分,并把整个积分当作各部分上的积分的和来计算.

就空间曲线

$$x=x(t),y=y(t),z=z(t)$$

上对长度的曲线积分来说,同样可得

$$\int_L f(P)\,\mathrm{d}s=\int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

根据上述把对长度的曲线积分化为直线积分的一般法则,可以得出在 $t=x$ 或 $t=y$ 时的特殊情形下,把那种曲线积分化为直线积分的法则. 例如当曲线 AB(图63)上的积分用对 x 的直线积分来计算时,需把曲线 AB 分作 AC,CD,DB 三段. 这样每段曲线就具有形如 $y=y(x)$——其中 $y(x)$ 为单值函数——的方程,于是 AB 上的积分可用三个普通积分的和来表示.

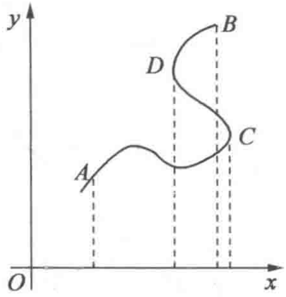

图 63

对长度的曲线积分这个概念的用意,可从下面所讲的事看出来:求对应于曲线 L 的某个量(例如力在路线 L 上所作的功)的值时,若用普通积分概念来做,就必须把整个量分成对应于该曲线上个别弧段的几个普通积分才能算出,但若用曲线积分概念来做,却只要取全部曲线上的一个曲线积分就可以算出,而且其中重要的一点是:这种曲线积分仍具有普通积分所具有的一切主要属性.

上述这类积分用在具体问题上的方法与普通积分一样,这便是先定出所求量的微分式子,然后把它在已给曲线的长度上"加起来". 除了在 $n°200$ 中所讲关于功的问题以外,本教程中讲过的其他问题如关于旋转曲面的面积、关于曲线形物质的质量、关于曲线的矩等,也可用这种曲线积分来解. 这时所得的解答是对长度的曲线积分,而这我们已在讲那些问题的地方分别指出过. 同时我们现在可以看出,以上所推出的一些公式不仅适用于以方程

$$y = y(x) \text{ 或 } x = x(y)$$

(其中 $y(x)$ 或 $x(y)$ 与以前一样都假定是单值函数)给出的曲线,而且也适用于任何其他的曲线.

我们还要讲一个问题,它用对长度的曲线积分来解时特别简单. 设已给柱面 G 以 xOy 平面上的曲线 L 为其导线而其母线垂直于 xOy 平面. 现在要计算介于曲线 L 及该柱面上某一曲线 L_1 之间的一部分柱面面积(图 64).

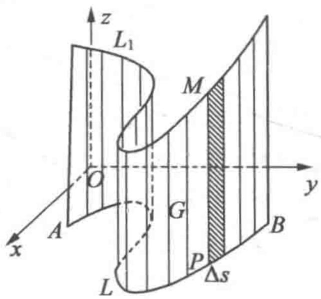

图 64

导线 L 上点 P 所对应的柱面"高度"(也就是曲线 L_1 上点 M 的竖坐标)乃是曲线 L 上点 P 的函数

$$z=f(P)=f(x,y)$$

在导线上任一点 P 处取无穷小弧元素 $\mathrm{d}s$. 它对应着曲面面积 Δq,而 Δq 中与 $\mathrm{d}s$ 成正比的主部,乃是以 $\mathrm{d}s$ 为底而以点 P 处的柱面高度为高的矩形面积. 故所求量的微分 $\mathrm{d}q$ 等于

$$\mathrm{d}q=f(P)\,\mathrm{d}s$$

把这面积"元素"在曲线 L 上加起来,得

$$Q=\int_L f(P)\,\mathrm{d}s$$

这个问题同时也表明:在平面曲线的情形下,对长度的曲线积分在几何上应怎样解释. 如果把积分路线看作是柱面在 xOy 平面上的导线,把被积函数的值看作是柱面的高(柱面的母线平行于 Oz 轴),那么在平面曲线的情形下,我们可以把对长度的曲线积分看作是上述那样一个柱面的面积(面积 Q 当然也可用 $n°195$ 中所推出的一般曲面面积公式来算).

例 设有半段椭圆柱面$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$,其上部被平面 $z=y$ 所截(图 65),求其侧面积 Q.

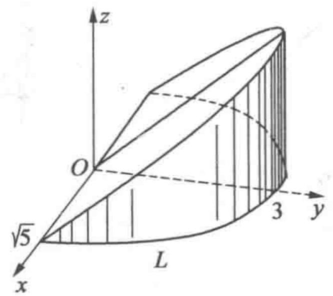

图 65

这时可得

$$Q=\int_L z\,\mathrm{d}s=\int_L y\,\mathrm{d}s$$

其中 L 是椭圆$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 的一半.

现在来计算积分. 从积分路线的参数方程

$$x=\sqrt{5}\cos t,\ y=3\sin t$$

可得

$$Q=\int_0^{\pi}3\sin t\ \sqrt{9\cos^2 t+5\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=3\int_0^{\pi}\sin t\ \sqrt{4\cos^2 t+5}\,\mathrm{d}t$$

设 $\cos t=\alpha$,得

$$Q=6\int_0^1\sqrt{4\alpha^2+5}\,\mathrm{d}\alpha=12\left[\frac{\alpha}{2}\sqrt{\alpha^2+\frac{5}{4}}+\frac{5}{8}\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+\frac{5}{4}}\right)\right]\Bigg|_0^1$$

$$=9+\frac{15}{9}\ln 5$$

值得注意的是,如果这同一柱面被平行于底面的平面 $z=c$ 所截时,侧面积便不可能用有限形式准确算出,因那时公式所给出的是个不能用初等函数表示的椭圆积分(见 n°121).

§2 对坐标的曲线积分

202. 对坐标的曲线积分的定义、属性及计算法

对曲线上点的某个坐标的曲线积分,比对长度的曲线积分要用得多一些.这种曲线积分与对长度的曲线积分两者间的差别只是:在作出积分的过程中,与曲线上点 P 处函数值相乘的,不是曲线的长度元素 $\mathrm{d}s$,而是坐标轴上对应于该曲线元素的区间元素($\mathrm{d}x$ 或 $\mathrm{d}y$)(图 66).

于是积分和式的形式为

$$I_n=\sum_{i=1}^{n}f(P_i)\Delta x_i$$

当

$$\max|\Delta x_i|\to 0$$

时,其极限

$$I=\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(P_i)\Delta x_i$$

可写作

$$I=\int_L f(P)\,\mathrm{d}x=\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}x \qquad (*)$$

同样有

$$I=\lim_{\max|\Delta y_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(P_i)\Delta y_i=\int_L f(P)\,\mathrm{d}y=\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}y \qquad (**)$$

这种积分里所用的术语仍与以前一样,不过这时的积分变量不是弧长 s 而是坐标 x 或 y.

动点在曲线 L 上移动的方向,对长度的曲线积分来说固然没有关系,但对坐标的曲线积分来说,它却有极重要的意义.

在每条曲线上可以选取两种相反的方向(两种指向),例如曲线 L(图 66)的指向可以定作 x 从点 A 向点 B,或相反地定作 x 从点 B 向点 A 的方向.当我

们定出已给函数对坐标的曲线积分时,我们不仅需要指出积分域(L),而且还要规定它的曲线指向——也就是取积分的方向.

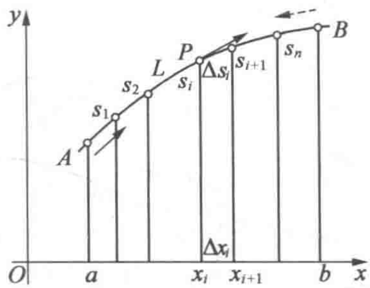

图 66

如果积分方向改变,那么对坐标的曲线积分要变号.

因当动点在曲线 L 上的移动方向改变时,积分和式中的一切元素 $\Delta x(\Delta y)$ 要变号,因此,与直线积分的对应属性相仿,可得

$$\int_L f(P)\,\mathrm{d}x = -\int_{-L} f(P)\,\mathrm{d}x$$

及

$$\int_L f(P)\,\mathrm{d}y = -\int_{-L} f(P)\,\mathrm{d}y$$

其中 L 及 $-L$ 表示具有两种相反指向的曲线 L.

当曲线为平面闭曲线时,反时针的移动方向(在右手坐标系中)叫作正方向. 当点依正方向在曲线上移动时,被曲线所围的域总在点的左边. 我们要知道,这方向与正的半段 Ox 轴循最短路线转到正 Oy 轴上时的转动方向相同.

普通(直线)积分乃是对坐标的曲线积分当其积分路线为坐标轴的一段区间时的特殊情形.

对坐标的曲线积分与对长度的曲线积分(对同一积分路线来说)之间有密切关系.

这就是,由于

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\alpha(P), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\alpha(P)$$

其中 $\alpha(P)$ 是点 P 处的有向曲线 L 与 Ox 轴所成的角,故有

$$\int_L f(P)\,\mathrm{d}x = \int_L f(P)\cos\alpha(P)\,\mathrm{d}s$$

及

$$\int_L f(P)\,\mathrm{d}y = \int_L f(P)\sin\alpha(P)\,\mathrm{d}s = \int_L f(P)\cos\beta(P)\,\mathrm{d}s$$

这里

$$\beta(P)=\frac{\pi}{2}-\alpha(P)$$

是点 P 处的曲线 L 与 Oy 轴所成的角.

反过来有

$$\int_L f(P)\,\mathrm{d}s=\int_L f(P)\frac{1}{\cos\alpha(P)}\mathrm{d}x$$

$$\int_L f(P)\,\mathrm{d}s=\int_L f(P)\frac{1}{\cos\beta(P)}\mathrm{d}y$$

对坐标的曲线积分当然具有直线积分的一切主要属性.

现在要讲对坐标的曲线积分的一个特殊属性:

若把闭曲线 L 所围的域 D 分成 D_1 及 D_2 两部分,则在整个曲线 L 上的曲线积分,可以表示为在域 D_1 及 D_2 的围线 L_1 及 L_2 上、以同一方向(例如正方向)所取的两个积分的和,这里我们假定被积函数在整个域 D 上有定义且连续.

例如

$$\int_L f(P)\,\mathrm{d}x=\int_{L_1} f(P)\,\mathrm{d}x+\int_{L_2} f(P)\,\mathrm{d}x$$

其中 L 是闭曲线 $AECBA$,L_1 是闭曲线 $AECA$,L_2 是闭曲线 $ACBA$(图 67). 因

$$\int_{L_1} f(P)\,\mathrm{d}x=\int_{AEC} f(P)\,\mathrm{d}x+\int_{CA} f(P)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{L_2} f(P)\,\mathrm{d}x=\int_{AC} f(P)\,\mathrm{d}x+\int_{CBA} f(P)\,\mathrm{d}x$$

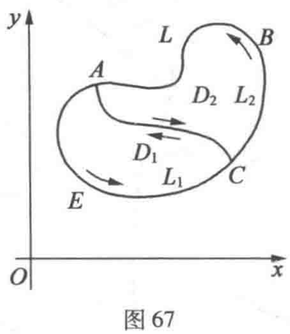

图 67

而在 CA 及 AC 上的两个积分是在同一曲线上以相反方向取的,因此它们的和等于零. 于是我们知道所要证明的关系式的右边等于在 AEC 及 CBA 上的积分的和,也就是等于在整个曲线 L 上的积分.

当域 D 分割成任意个域时,这定理显然成立

$$\int_L f(P)\,\mathrm{d}x=\int_{L_1} f(P)\,\mathrm{d}x+\int_{L_2} f(P)\,\mathrm{d}x+\cdots+\int_{L_n} f(P)\,\mathrm{d}x$$