University Physics

大学物理学

主编 陈国庆 何跃娟 吴亚敏 张 薇

高等教育出版社

University Physics

大学物理学

主编 陈国庆 何跃娟 吴亚敏 张 薇

高等教育出版社·北京

内容简介

本书依据教育部高等学校物理学与天文学教学指导委员会编制的《理工科类大学物理课程教学基本要求》(2010年版),在涵盖核心内容的基础上,作了部分取舍,编写而成。本书从教学实际出发,简洁明了,通俗易学,便于教学。

本书可作为高等学校理工科非物理类各专业60~90学时的大学物理教材,也可作为专科及成人高校有关专业的物理教材。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理学 / 陈国庆等主编. -- 北京 : 高等教育出版社, 2017.2

ISBN 978-7-04-047005-5

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①物理学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O4

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第299725号

Daxue Wulixue

策划编辑 高 建 责任编辑 张海雁 封面设计 姜 磊 版式设计 马 云
插图绘制 杜晓丹 责任校对 陈旭颖 责任印制 刘思涵

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 山东临沂新华印刷物流集团
开 本 787 mm×1092 mm 1/16
印 张 20
字 数 480千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
http://www.hepmall.com
http://www.hepmall.cn
版 次 2017年2月第1版
印 次 2017年2月第1次印刷
定 价 37.90元

物 料 号 47005-00

前　言

物理学是研究物质的基本结构、基本运动形式及相互作用规律的自然科学。物理学的基本理论渗透在自然科学的各个学科，是自然科学的基础。物理学的基本规律应用于工程技术的许多领域，是工程技术的基础。

近年来，高等教育发展迅猛，已趋大众化，高等学校中物理课程的设置和基本要求也呈多样化，许多专业的大学物理课程学时较少。为适应新形势的要求，编者在多年大学物理教学实践的基础上，紧密结合教学实际和学生特点编写了这本大学物理教材。

本教材适用于高等学校本科各专业学生 60~90 学时的大学物理课程，是高等学校本科和专科及成人高等院校都可选用的大学物理教材。

本书的编写，以教育部高等学校物理学与天文学教学指导委员会编制的《理工科类大学物理课程教学基本要求》(2010 年版)为依据，内容上有所取舍，以适应不同专业对大学物理课程的需求。全书以适合大学物理课程教学、方便学生学习为目标，力求体系完整、条理清晰、简洁明了、通俗易懂。书中在相关物理学家的照片下加上了二维码，以方便读者由此可阅读物理学家的有关介绍。每章均编写了本章相关内容的应用案例，以培养学生理论联系实际的能力，拓展视野，并激发学习兴趣。每章后面配有精心设计的思考题和习题，以考查学生对物理知识的理解和掌握。

全书内容包括力学、气体动理论和热力学、电磁学、机械振动与机械波、光学、近代物理基础，共 11 章。其中第 1、2 章由张薇编写，第 3、4、8 章由何跃娟编写，第 5、6、7 章由吴亚敏编写，第 9、10 章由陈国庆编写，全书由陈国庆、何跃娟定稿。

本书在编写过程中，参考了国内外多种优秀物理教材并汲取了其中的优点。江南大学理学院物理系诸位教师对本书的编写

提出了许多很好的设想和建议，编者在此一并表示衷心的感谢。同时，感谢高等教育出版社高建、张海雁、缪可可、付晓杰为本书的顺利出版付出的辛勤劳动。

由于编者水平有限，书中难免有不妥甚至错误之处，敬请读者批评指正，我们将在此基础上不断完善。

编　者

2016 年 5 月于江南大学

目录

第1章 质点力学

质点是牛顿力学中一个极其重要的理想模型．质点力学包括质点运动学和动力学．本章在讨论质点运动学的基础上转入动力学的研究，由牛顿（I. Newton）第二定律导出质点动力学的三个基本定理（质点动量定理、质点角动量定理及质点动能定理），从不同的方面建立起动力学特征量与作用力累积效应之间的普遍联系．质点力学是研究质点系（包括刚体）运动规律的基础．

1－1 质点运动的描述

1－1－1 质点 参考系 运动方程

1. 质点

任何实际物体都具有一定的形状、大小和内部结构，物体运动时，其大小、形状一般会发生变化，故其内部各点的运动状态各不相同．若在我们研究的问题中，物体的线度、形变所起的作用可忽略不计，就可以把物体当成一个有质量的几何点来处理，这样抽象出的理想模型被称为**质点**．

质点是一个十分有用的物理模型，它的应用可以使研究的问题得到简化．但能否将研究的对象当成质点，要对研究的问题具体分析后再确定．把研究的物体抽象为质点来处理，在理论上和实际应用中都有着重要意义．例如，当不能把研究的物体整个看成一质点时，可以把它看成是由许多质点组成的，弄清楚各质点的运动，也就可以了解整个物体的运动规律．因此，研究质点的运动是研究一般物体运动的基础．

物理学中还有一些其他理想模型，以后还将陆续介绍，如刚体、理想气体、点电荷等．这种在一定条件下，把复杂的、具体的

物体抽象为一个简单的理想模型的方法，是自然科学中常用的研究方法，此方法称为理想模型法，它可以抓住事物的本质，突出主要矛盾，找出它所遵循的主要规律．

2. 参考系 坐标系 质点位置的确定方法

通常要描述一个质点的机械运动，首先应确定该物体每一瞬时在空间的位置，但物体的位置是相对的，总要选定其他物体作为参照物．为描述物体的运动而选的参照物叫做**参考系**．选取的参照物不同，对同一物体的运动描述也就不同，这就是运动描述的相对性，因此在讲述物体的运动时，一定要指明是对哪个参考系而言的．在运动学中参考系是可以任意选取的，主要依研究问题的性质和计算是否方便而定．

选择合适的参考系后，为了定量地描述质点的位置和其位置随时间的变化等问题，可在参照物上任选一个参考点 O，并在其上固连一适当的坐标系，这样就可把物体在各个时刻相对于参考系的位置用坐标表示出来．

质点位置的确定方法跟选用的坐标系有关，常用的坐标系有直角坐标系、自然坐标系和平面极坐标系等．

(1) 直角坐标表示

设某时刻质点在 P 处，在参考系中任意选定一点 O 作为参考点，以 O 点为原点，建立直角坐标系 $Oxyz$，如图 1-1 所示，这样质点的位置可以由坐标 x、y、z 来确定．

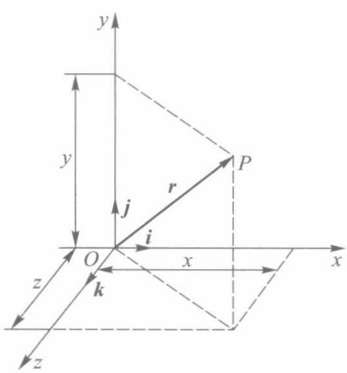

图 1-1 直角坐标表示

(2) 位置矢量表示

质点的位置可以用一个矢量来表示．在参考系中任意选定一点 O 作为参考点，从 O 点指向质点在某一时刻所处的位置 P 作一矢量 $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}$ 的大小和方向确定了质点相对参考系的位置，称为质点在该时刻的位置矢量，简称**位矢**．

如图 1-2 所示，以 O 点为原点，建立直角坐标系 $Oxyz$，坐标 x、y、z 就是 $\boldsymbol{r}$ 沿坐标轴的三个分量．如取 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别为沿 Ox、Oy、Oz 轴的单位矢量，那么位矢可写为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{1-1}$$

其大小为

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$\boldsymbol{r}$ 的方向可由方向余弦确定：

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\quad \cos\beta=\frac{y}{r},\quad \cos\gamma=\frac{z}{r}$$

其中 α、β、γ 是 $\boldsymbol{r}$ 与 Ox、Oy、Oz 轴之间的夹角．

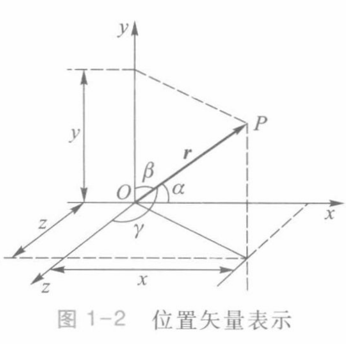

图 1-2 位置矢量表示

(3) 自然坐标表示

如已知质点在平面上运动的轨迹，那么可建立平面自然坐标

系(简称自然坐标)来表示质点的位置．首先在已知的运动轨迹上任意选定一点 O 作为坐标原点,而后规定从 O 点起沿轨迹的某一方向(如向右)为自然坐标的正方向,如图 1-3 所示．设在某一时刻质点位于 P 点,量取 P 点至 O 点的曲线长度 s,这样质点的位置就可以由 s 确定,图中 P 点在 O 点右侧,s 取正值,s 称为自然坐标．

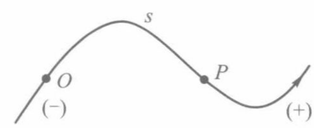

图 1-3 自然坐标表示

(4) 平面极坐标表示

若质点在如图 1-4 所示的 Oxy 平面内运动,某时刻位于点 P,质点的位置可由(r,θ)确定．r 为 P 到 O 的长度,称为 P 点的极径;θ 是 r 与 Ox 轴的夹角,称为极角．通常规定从 Ox 轴沿逆时针方向量得的 θ 为正,反之为负．这种以(r,θ)为坐标的坐标系称为平面极坐标系．P 点在两种坐标系中坐标的变换关系为

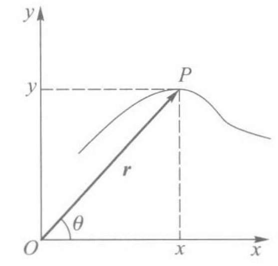

图 1-4 平面极坐标表示

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

3. 质点运动方程

当质点运动时,在不同时刻将占据空间的不同位置．描述质点的运动,在数学上就是要给出质点位置随时间变化的函数式,即 $\boldsymbol{r}$ 是 t 的函数,可表示为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k} \qquad (1-2a)$$

我们把上式称为质点的运动方程．

在直角坐标系中,质点的运动方程可写为如下分量式:

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t) \qquad (1-2b)$$

如果知道了质点的运动方程,则质点在任意时刻的位置知道了,因而也就掌握了质点的运动情况．质点经历的路径,称为质点运动的轨道．从质点的运动方程式(1-2b)中消去时间 t,便可求得质点的轨道方程．

在自然坐标系中,质点的运动方程可写为

$$s=s(t) \qquad (1-2c)$$

应当指出,根据具体条件确定质点的运动方程,是运动学的重要任务之一．

1-1-2 质点的位移 速度 加速度

1. 位移

在给定的参考系中,质点按规律 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 沿一条轨道运动,在时刻 t 到达 P 点,其位矢为 $\boldsymbol{r}_P$,经过时间 Δt 后,在时刻 $t+\Delta t$,质点到达 Q 点,位矢为 $\boldsymbol{r}_Q$. 如图 1-5 所示,在时间 Δt 内,质点位置的

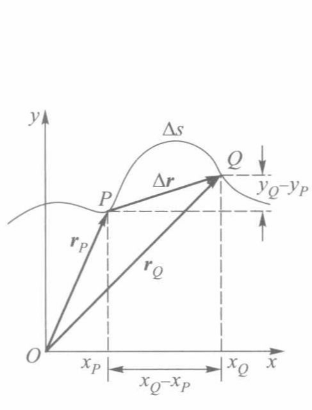

图 1-5 位移

变化可以用由点 P 到点 Q 的有向线段 $\overrightarrow{PQ}$ 来表示，记作 $\Delta\boldsymbol{r}=\overrightarrow{PQ}$，按矢量相加（减）的三角形法则，它就是位矢 $\boldsymbol{r}_Q$ 与 $\boldsymbol{r}_P$ 之差，即位矢的增量：

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_Q-\boldsymbol{r}_P=(x_Q-x_P)\boldsymbol{i}+(y_Q-y_P)\boldsymbol{j}=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}$$

$\Delta\boldsymbol{r}$ 称为质点在 Δt 内由 P 到 Q 的**位移**．显然位移是矢量，它既表示质点位置变化的大小，又表示这种变化的方向．

若质点做一般空间运动，则位移的正交分解式为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k} \tag{1-3}$$

位移的大小为

$$|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$$

必须指出，位矢是表示某一确定时刻 t 质点位置的，是瞬时量；而位移是表示某一确定时间间隔 Δt 内质点位置的变化，是过程量．

质点在 Δt 时间内沿轨道运动所经历的实际行程的长度，称为路程，即图 1-5 中曲线 PQ 的长度，写作 Δs，它是一个正的标量．显然，一般情况下，路程 Δs 与位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 是不同的，$|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta s$．例如，小球沿半径为 R 的圆周运动一圈，其位移大小 $|\Delta\boldsymbol{r}|=0$，而路程 $\Delta s=2\pi R$．只有在质点做单向直线运动时，位移的大小才等于路程．当 $\Delta t\to 0$ 时，可认为 $|\Delta\boldsymbol{r}|=\Delta s$．

位移和路程的单位相同，在国际单位制中为米，符号为 m．

2．速度

为了描述质点运动位置变化的快慢和方向，需要引入速度的概念．

（1）平均速度

如图 1-5 所示，质点在 Δt 时间内的位移为 $\Delta\boldsymbol{r}$，我们把位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 与所经时间 Δt 之比，称为在这段时间内的平均速度，即

$$\overline{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

平均速度是矢量，其方向与位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向相同，大小等于 $\frac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{\Delta t}$．一般情况下，平均速度的大小和方向与所取时间 Δt 的长短有关．它反映的是在某一段时间内质点运动的平均快慢，故不能反映质点在某一瞬时的运动快慢．

（2）瞬时速度（简称速度）

为了精确地描述质点的运动，可将时间间隔 Δt 无限减小，当 Δt 趋近于零时，平均速度的极限值就反映了质点在时刻 t 的真实运动，叫做质点在时刻 t 的**瞬时速度**，简称**速度**，用 $\boldsymbol{v}$ 表示．

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-4a}$$

质点的瞬时速度等于位置矢量对时间的变化率．速度是矢量，具有大小和方向．从速度的定义式可看出：t 时刻速度的方向就是 Δt 趋近于零时平均速度的极限方向．如图 1-6 所示，当 $\Delta t\to 0$ 时，$\boldsymbol{v}$ 趋于和轨道上 P 点处的切线重合，所以当质点做曲线运动时，质点在某点的速度方向沿轨道在该点处曲线的切线方向并指向质点运动的一方．

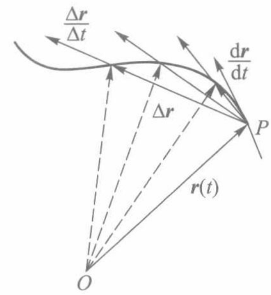

图 1-6 瞬时速度

在国际单位制中，速度的单位是米每秒，符号为 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

在直角坐标系中，可将速度用分量式表示：

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k} \tag{1-4b}$$

其中，$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，$v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$. v_x、v_y 和 v_z 是速度 $\boldsymbol{v}$ 在 Ox、Oy 和 Oz 轴上的分量大小．

速度的大小和方向余弦可以用下式表示：

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

$$\cos\alpha=\frac{v_x}{v},\quad \cos\beta=\frac{v_y}{v},\quad \cos\gamma=\frac{v_z}{v}$$

式中 α、β、γ 分别为速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 与 Ox、Oy、Oz 轴之间的夹角．

在自然坐标系中，质点运动方程为 $s=s(t)$. 设在 Δt 时间内，质点由 P 点运动到 Q 点，其位移为 $\Delta\boldsymbol{r}$，路程为 Δs，如图 1-7 所示．当 $\Delta t\to 0$ 时，$\Delta s\to 0$，有 $|\Delta \boldsymbol{r}|=\Delta s$，所以

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right|=1$$

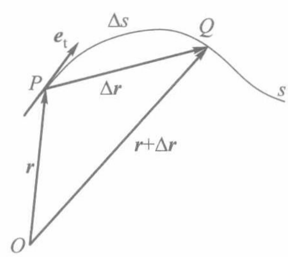

图 1-7 速度的计算

由于 $\Delta\boldsymbol{r}$ 是矢量，其极限方向沿轨道的切线，因而$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$是沿轨道切线的单位矢量，其指向沿自然坐标的正向，即 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\boldsymbol{e}_t$，或 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}s\cdot\boldsymbol{e}_t$. 所以速度也可表示为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{e}_t \tag{1-4c}$$

速度的大小 $v=|\boldsymbol{v}|=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，称为速率，它是一个标量，反映了质点运动的快慢程度．

3. 加速度

质点运动时，其速度大小和方向都可能随时改变，为了描述每一时刻质点速度变化情况，需要引入加速度的概念．加速度的

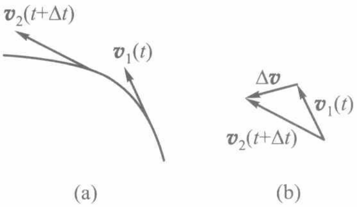

图 1-8 加速度的计算

引入是力学发展中的大事，它为动力学的发展准备了条件，并且是联系运动学和动力学的桥梁.

如图 1-8(a) 所示，质点在平面内做一般曲线运动，在 t 时刻的速度为 $\boldsymbol{v}_1(t)$，经 Δt 时间后速度变为 $\boldsymbol{v}_2(t+\Delta t)$，其速度增量为 $\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_2(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}_1(t)$，我们把 $\Delta\boldsymbol{v}$ 与 Δt 之比，称为这段时间内质点的平均加速度：

$$\overline{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

当 $\Delta t\to 0$ 时，平均加速度的极限值称为**瞬时加速度**，简称**加速度**，用 $\boldsymbol{a}$ 表示.

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{1-5a}$$

即质点的瞬时加速度等于速度矢量对时间的变化率. 又因 $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，所以 $\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$.

$\boldsymbol{a}$ 的方向是 $\Delta t\to 0$ 时 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的极限方向，一般不同于速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向，即一般不沿曲线的切线方向，如图 1-8(b) 所示. 从 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的极限方向看出，加速度总是指向运动轨道凹的一侧.

在直角坐标系下 $\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$，故可将加速度写成

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{1-5b}$$

a_x、a_y、a_z 是加速度在 Ox、Oy、Oz 三个轴上的投影式.

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t},\quad a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t},\quad a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}$$

加速度的大小和方向余弦可以用下式表示：

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{a},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{a},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{a}$$

式中 α、β、γ 分别为加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 Ox、Oy、Oz 轴之间的夹角.

在用自然坐标研究质点一般平面曲线运动的加速度时，常用它在轨道的切线和法线方向的投影来表示.

在自然坐标系中，速度表示为

$$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{e}_t$$

将上式对时间 t 求导，得到加速度为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{e}_t+v\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}t}$$

上式中等号右边第一项 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{e}_t$ 表示加速度在切向的分量. 现在

分析第二项的意义，首先求矢量导数$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}$，由图 1-9(b) 可知，当 $\Delta t \to 0$ 时，$\Delta\theta$ 亦趋于零，有 $|\Delta \boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}| = |\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}| \cdot \Delta\theta = \Delta\theta$，因此

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta \boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{\rho}v$$

其中，$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}$为轨道曲线在 P 点处的曲率，或为此处曲率半径 ρ 的倒数$\frac{1}{\rho}$，$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v$. $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}$的方向应与 $\Delta\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$ 的极限方向相同，由图可看出 $\Delta\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$ 与 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$ 的夹角为$\frac{\pi}{2}-\frac{\Delta\theta}{2}$，并指向轨道内凹的一侧．当 $\Delta\theta$ 趋于零，$\Delta\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$ 与 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$ 的夹角趋于$\frac{\pi}{2}$，所以得出 $\Delta\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$ 的极限方向垂直于 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$，即沿 P 处的法线方向并指向曲率中心．选用 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$ 表示法线方向的单位矢量，那么

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{\rho}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$$

因此

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} + v\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} + \frac{v^2}{\rho}\cdot\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} \tag{1-5c}$$

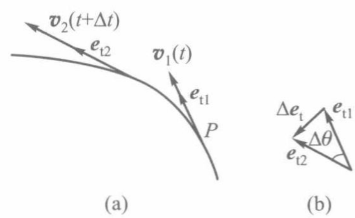

图 1-9 自然坐标系下瞬时速度

由此可见，加速度有两个分量：一个是切向分量 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}$，它是由速度大小变化产生的；另一个是法向分量 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}$，它是由速度方向变化产生的．加速度 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{\mathrm{n}} = a_{\mathrm{t}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} + a_{\mathrm{n}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$（图 1-10），显然，$a_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$，$a_{\mathrm{n}} = \frac{v^2}{\rho}$.

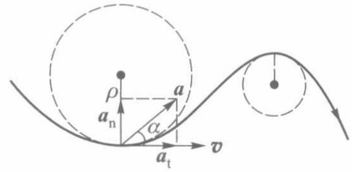

图 1-10 自然坐标系下加速度的计算

由此可以求得加速度的大小和方向（用 a 与 v 所成的角 α 表示），即

$$a = \sqrt{a_{\mathrm{n}}^2 + a_{\mathrm{t}}^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

$$\tan\alpha = \frac{a_{\mathrm{n}}}{a_{\mathrm{t}}}$$

加速度的方向总是指向运动轨道凹的一侧．

例 1-1

已知物体的运动方程为 $\boldsymbol{r}=5\sin 2\pi t\boldsymbol{i}+4\cos 2\pi t\boldsymbol{j}$，求：

（1）物体在 0.25～1 s 内的位移；

（2）物体在 1 s 末的速度；

（3）物体在 1 s 末的加速度；

（4）物体运动的轨道方程．式中 r 的单位为 m，t 的单位为 s，速度的单位为 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$．

解：由题意可知

$$x=5\sin 2\pi t,\quad y=4\cos 2\pi t$$

所以在任意时刻 t，速度分量为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=10\pi\cos 2\pi t,\quad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-8\pi\sin 2\pi t$$

加速度分量为

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=-20\pi^2\sin 2\pi t,\quad a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=-16\pi^2\cos 2\pi t$$

a_x、a_y 的单位为 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$．

（1）质点在 $t=0.25$ s 时的位矢为

$$\boldsymbol{r}_1=5\sin 2\pi t\boldsymbol{i}+4\cos 2\pi t\boldsymbol{j}\Big|_{t=0.25\ \mathrm{s}}=5\boldsymbol{i}\ \mathrm{m}$$

物体在 $t=1$ s 时的位矢为

$$\boldsymbol{r}_2=5\sin 2\pi t\boldsymbol{i}+4\cos 2\pi t\boldsymbol{j}\Big|_{t=1\ \mathrm{s}}=4\boldsymbol{j}\ \mathrm{m}$$

在 0.25～1 s 这段时间内物体的位移为

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}\\&=[(0-5)\boldsymbol{i}+(4-0)\boldsymbol{j}]\ \mathrm{m}\\&=(-5\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j})\ \mathrm{m}\end{aligned}$$

（2）物体在 $t=1$ s 时的速度为

$$\boldsymbol{v}_1=(v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j})\Big|_{t=1\ \mathrm{s}}=10\pi\boldsymbol{i}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

（3）物体在 $t=1$ s 时的加速度为

$$\boldsymbol{a}_1=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j})\Big|_{t=1\ \mathrm{s}}=-16\pi^2\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

（4）运动方程的分量式为

$$x=5\sin 2\pi t,\quad y=4\cos 2\pi t$$

从上式中消去时间 t，得轨道方程为

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$$

所以，在 Oxy 坐标系中，质点运动的轨道是一椭圆曲线．

例 1-2

潜水艇在下沉力不大的情况下，自静止开始以加速度 $a=A\beta e^{-\beta t}$ 竖直下沉（A、β 为常量），求任一时刻 t 的速度和运动方程．

解：以潜水艇开始运动处为坐标原点 O，作竖直向下的坐标轴 Ox，如图 1-11 所示，因其向下做直线运动，故只需写出 x 方向分量式，由加速度定义式，有

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

分离变量，有

$$\mathrm{d}v=a\mathrm{d}t \tag{1}$$

按题意，潜水艇运动的初始条件是：当 $t=0$ 时，$x=0$，$v=0$.

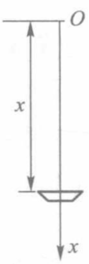

图 1-11 例 1-2 图

将 $a=A\beta e^{-\beta t}$ 代入式(1)，根据初始条件确定相应的积分上、下限，有

$$\int_0^v \mathrm{d}v=\int_0^t A\beta e^{-\beta t}\mathrm{d}t$$

解得任一时刻 t 潜水艇速度大小为

$$v=A(1-e^{-\beta t}) \tag{2}$$

再由 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，将上式写作

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(1-e^{-\beta t})$$

分离变量，有

$$\mathrm{d}x=A(1-e^{-\beta t})\mathrm{d}t$$