"十二五"国家重点图书出版规划项目

信息与计算科学丛书——83

多维奇异积分的高精度算法

黄 晋 著

科学出版社

“十二五”国家重点图书出版规划项目

信息与计算科学丛书 83

多维奇异积分的高精度算法

黄 晋 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书是系统地介绍各类多维奇异积分的高精度算法的专著. 全书共5章: 第1章介绍面型与点型奇异积分(包括弱奇异、Cauchy 强奇异、Hadamard 超奇异积分)的概念与存在条件及一些基本性质, 并介绍各类奇异积分算子的定义和基本性质; 第2章简略介绍正常积分的数值方法和加速收敛方法; 第3章主要论述一维各类奇异积分与含参数的奇异积分的高精度算法以及各类奇异积分的加速收敛方法, 同时给出了外推的稳定性分析; 第4章主要论述各类多维奇异积分与含参的奇异积分的高精度算法以及各类奇异积分的加速收敛方法; 第3、4章是本书的核心内容; 第5章介绍奇异积分与奇异积分算子的渐近展开式. 本书取材新颖, 算例翔实, 所提供的算法具有计算复杂度低、精度高、并行度高和拥有后验误差估计等特点.

本书可作为计算数学和应用数学专业的博士生、硕士生和本科高年级学生的教材或参考书, 也可作为从事积分方程和工程边界元计算的科研工作者和工程技术人员的参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

多维奇异积分的高精度算法/黄晋著. —北京: 科学出版社, 2017.3
(信息与计算科学丛书; 83)
"十二五"国家重点图书出版规划项目
ISBN 978-7-03-051972-6
Ⅰ. ①多… Ⅱ. ①黄… Ⅲ. ①奇异积分算子 Ⅳ. ①O177.6
中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 045093 号

责任编辑: 王丽平 / 责任校对: 张凤琴
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京东华虎彩印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 3 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2017 年 3 月第一次印刷 印张: 35 1/4
字数: 700 000

定价: 198.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《信息与计算科学丛书》序

20 世纪 70 年代末，由已故著名数学家冯康先生任主编、科学出版社出版了一套《计算方法丛书》，至今已逾 30 册. 这套丛书以介绍计算数学的前沿方向和科研成果为主旨，学术水平高、社会影响大，对计算数学的发展、学术交流及人才培养起到了重要的作用.

1998 年教育部进行学科调整，将计算数学及其应用软件、信息科学、运筹控制等专业合并，定名为“信息与计算科学专业”. 为适应新形势下学科发展的需要，科学出版社将《计算方法丛书》更名为《信息与计算科学丛书》，组建了新的编委会，并于 2004 年 9 月在北京召开了第一次会议，讨论并确定了丛书的宗旨、定位及方向等问题.

新的《信息与计算科学丛书》的宗旨是面向高等学校信息与计算科学专业的高年级学生、研究生以及从事这一行业的科技工作者，针对当前的学科前沿、介绍国内外优秀的科研成果. 强调科学性、系统性及学科交叉性，体现新的研究方向. 内容力求深入浅出，简明扼要.

原《计算方法丛书》的编委和编辑人员以及多位数学家曾为丛书的出版做了大量工作，在学术界赢得了很好的声誉，在此表示衷心的感谢. 我们诚挚地希望大家一如既往地关心和支持新丛书的出版，以期为信息与计算科学在新世纪的发展起到积极的推动作用.

石钟慈

2005 年 7 月

前　言

所谓奇异积分是指被积函数在积分区域内部或曲面上包含有奇点的积分. 奇异积分按照奇性的强、弱分为弱奇异、强奇异 (Cauchy 奇异) 和超奇异 (Hadamard 奇异) 三类，下面以位势型积分为例进行解释，考虑积分

$$I(f(x))=\int_{\Omega}\frac{f(y)}{|x-y|^{\lambda}}dy,\quad x\in\Omega, \tag{0.1}$$

其中 Ω 是 $\Re^n$ 的有界或无界子域，或者 n 维流形, $f(y)$ 是 Ω 上的可测函数，$\lambda>0$，$|x-y|$ 是 x 和 y 的距离. 显然，x 是积分 (0.1) 的奇点. 如果 $\lambda<n$, 则称 (0.1) 为弱奇异积分；如果 $\lambda=n$，则称 (0.1) 为强奇异积分；如果 $\lambda>n$，则称 (0.1) 为超奇异积分. 弱奇异积分是收敛的，即积分具有有限值，而强奇异和超奇异积分是发散的，必须通过特殊方法定义积分的有限部分值.

对于强奇异积分，定义 Cauchy 主值如下：令 $B_\varepsilon(x)=\{y\colon |x-y|\leqslant\varepsilon\}$ 是以 x 为心，ε 为半径的一个球，如果极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega\backslash B_\varepsilon(x)}\frac{f(y)}{|x-y|^{n}}dy \tag{0.2}$$

存在有限值，则称强奇异积分存在 Cauchy 主值，并且记为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega\backslash B_\varepsilon(x)}\frac{f(y)}{|x-y|^{n}}dy=p.v\int_{\Omega}\frac{f(y)}{|x-y|^{n}}dy. \tag{0.3}$$

当然，为了保证极限存在对于函数 $f(y)$ 必须受到限制，这些条件将在正文叙述.

对于 $\lambda>n$, 即超奇积分也可以定义 Hadamard 的有限部分值，为此假定积分，关于 ε 成立渐近展开

$$\int_{\Omega\backslash B_\varepsilon(x)}\frac{f(y)}{|x-y|^{\lambda}}dy=\sum_{k=0}^{K}\sum_{j=0}^{J}I_{k,j}(b)\varepsilon^{\alpha_k}\log^j\varepsilon+o(1), \tag{0.4}$$

则定义超奇积分的有限部分为

$$f.p\int_{\Omega}\frac{f(y)}{|x-y|^{\lambda}}dy=\begin{cases} I_{i,0}(b), & \alpha_i=0\ 且\ 0\leqslant i\leqslant K,\\ 0, & 其他.\end{cases} \tag{0.5}$$

超奇异积分的 Hadamard 的有限部分值的数学依据是广义函数和解析开拓. 为此，举简单例子加以解释：考虑积分

$$f(\mu)=\int_0^1 x^{\mu}dx, \tag{0.6}$$

显然当 $\mathrm{Re}\,\mu > -1$ 时，(0.6) 有意义, 且 $f(\mu) = 1/(1+\mu)$; 若 $\mathrm{Re}\,\mu < -1$, (0.6) 是超奇异积分. 然而，众所周知这个函数可以解析开拓为复变函数

$$F(\mu) = \frac{1}{1+\mu}, \quad \forall\mu \neq -1, \tag{0.7}$$

$F(\mu)$ 除 $\mu = -1$ 是极点外，在复平面其他点解析，因此超奇异积分 (0.6) 在 $\mu \neq -1$ 的值，可定义为 $1/(1+\mu)$. 这个定义与 (0.5) 的等价性，证明如下：假设 $\mathrm{Re}\,\mu < -1$, $\forall\varepsilon > 0$, 那么在 $(\varepsilon, 1)$ 区间上的积分为正常积分，并且

$$\int_\varepsilon^1 x^\mu dx = \frac{1}{1+\mu} - \frac{\varepsilon^{1+\mu}}{1+\mu}, \tag{0.8}$$

右边第一项是有限部分，第二项是发散部分. 所谓 Hadamard 意义下的发散积分的有限部分，便是在 (0.8) 中去掉发散项，这个结果与解析延拓 (0.7) 的结果相同，因此，两种定义是等价的.

从 19 世纪开始，数学、物理和工程技术中许多问题皆归结于各种类型的奇异积分、奇异积分算子和奇异积分方程. 1823 年阿贝尔研究在一垂直平面上，求一质点在垂直等加速条件下下落必经的路径，使得其下落时间总是等于下落距离的预定函数便导出著名的阿贝尔积分:

$$I(u(h)) = \int_0^h \frac{u(y)}{\sqrt{h-y}} dy, \tag{0.9}$$

即一个具有可变上限的关于 $u(y)$ 的奇异积分.

基于牛顿的万有引力定律和电磁力学的库仑定律，导出的位势型积分更是一类重要的奇异积分，例如地质学中的一个基本问题便是绘制地球内部的三维构造图, 以便勘探、预报地震. 这些问题的基础离不开位势型积分 [9,17,35,36,113,115,116,158]

$$V_E(\xi,\eta,\zeta) = \iiint_E \frac{\rho(x,y,z)dxdydz}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}. \tag{0.10}$$

位势型积分还出现在偏微分方程、调和分析、概率统计、理论物理、生物化学等诸多学科中. 特别是，借助单层位势与双层位势理论导出的边界积分方程与边界元方法 [142,143,199,202,226,270,271,274]，已经成为计算数学中继有限元方法和有限差分后的被广泛应用的计算方法.

有关奇异积分、奇异积分方程和奇异积分变换, 已经有众多的论文和专著讨论. 例如, 一维 Hilbert 变换

$$Hg = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} p.v \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{t-z} dt$$

和 n 维的 Riesz 变换

$$R_j f = p.v \int_{R^n} f(x-t) \frac{t_j}{|t|^{n+1}} dt, \quad j = 1, \cdots, n$$

便涉及奇异积分计算. 在断裂力学、空气动力学和正则边界元方法的诸多问题，则涉及超奇积分和超奇异积分方程.

上述位势型积分不过是奇异积分常见一类，多维奇异积分的一般形式为

$$I(f) = \int_\Omega g_1^\eta(x_1, \cdots, x_s) h(x_1, \cdots, x_s) \ln^\beta g_2(x_1, \cdots, x_s) dx_1 \cdots dx_s, \tag{0.11}$$

这里 $g_j(x_1, \cdots, x_s) = r^\mu$, 且 $r = (\sum_{i=1}^s (x_i - t_i)^2)^{1/2}$，或者 $r = (\sum_{i=1}^s c_i(x_i - t_i)^\gamma)^\delta$ 且 $\mu = \gamma\delta$，$c_i > 0$, $\gamma > 0$, $j = 1$, 2, $(t_1, \cdots, t_s) \in \bar{\Omega}$, 即所谓点型奇异函数; 或者 $g_j(x_1, \cdots, x_s) = |x_1 - t_1|^{\gamma_1} \cdots |x_s - t_s|^{\gamma_s}$ 且 $\mu = \sum_i^s \gamma_i$, $i = 1, \cdots, s$，即 $g_j(x_1, \cdots, x_s)$ 是所谓面型奇异函数，奇点分布在 $x_i - t_i = 0$, $i = 1, \cdots, s$ 的平面上, $h(\mathbf{x}) = h(x_1, \cdots, x_s)$ 是 $[0, 1]^s$ 上的光滑函数，η, $\beta \geqslant 0$ 为整数. 注意，奇点可以在区域内部，也可以在边界上.

按照前面的分析，奇异积分 (0.11) 可分为三类: 第一类，当 $\mu > -s$, $\eta = 1$ 时, 称为弱奇异积分，特别是，当 $\eta = 1$, $\beta = 0$ 时，称 (0.11) 为代数型奇异积分，当 $\eta = 0$, $\beta = 1$ 时，称为对数弱奇异; 第二类，当 $\mu = -s$, $\eta = 0 = \beta$ 时, 称为 Cauchy 奇异积分, 这类积分必须在 Cauchy 主值意义下理解; 第三类，当 $\mu < -s$, $\eta = \beta = 0$ 时, 称为超奇异积分，其值必须在 Hadamard 有限部分意义下理解.

奇异 (包括弱奇异、强奇异和超奇异) 积分计算是当今计算数学的前沿领域，许多对于光滑函数行之有效的方法，在计算奇异积分失效，尤其是高维超奇积分的 Hadamard 的有限部分值的计算方法，作者尚未见到有相关工作的报道. 本书的核心内容，便是基于高维推广 Euler-Maclaurin 展开式，构造超奇积分的外推与分裂外推等加速收敛方法.

众所周知，如果被积函数足够光滑，基于 Euler-Maclaurin 展开式的外推方法，即所谓 Romberg 算法是一维积分的有效方法. 将 Romberg 算法推广到弱奇异积分，最早是 Navot[181] 使用 Fourier 级数展开得到弱奇异积分的推广 Euler-Maclaurin 展开式，其后 Ninhan 和 Lyness[125] 沿此思路得到更新的结果，但是这些结果仍然不能使用到强奇异和超奇异积分. 新的证明思路是 Elliott 和 Venturino[48−51] 提出，他们应用 Mellin 变换得到 Euler-Maclaurin 展开式的新证明，其后 Monegato 和 Lyness[175] 发现 Mellin 变换方法和复变函数的解析开拓相结合，Euler-Maclaurin 展开式能够推广到奇异和超奇异积分上，不同的是渐近展开具有步长的负指数，这意味着简单的中矩形公式使用到超奇积分是发散的，但是通过逐步的负指数外推消去发散项后，再经过正指数外推便得到超奇积分的 Hadamard 的有限部分值的高精度算法.

对于高维积分，由林群、吕涛提供的分裂外推是克服维数效应的有效方法，这个方法的基础是证明误差具有多步长的多参数渐近展开. 但是要把这个方法应用到多维超奇积分的 Hadamard 有限部分值计算需要克服许多困难. 为此，本书先从弱奇异积分的 Duffy 变换着手，把点型的奇点转换到一维面型超奇积分上，再使用解析开拓方法推广到多维超奇积分，从而得到使用多步长的多维中矩形求积公式计算多维超奇积分的 Hadamard 有限部分值，具有步长的多参数渐近展开，不过展开中包含步长的负指数，这意味着多维中矩形公式用到超奇积分是发散的，但是通过逐步的负指数分裂外推消去发散项后，再经过正指数分裂外推便得到多维超奇积分的 Hadamard 的有限部分值的高精度算法. 本书的诸多算例的数值结果说明这个方法是有效的.

本书核心内容是国家自然科学基金资助项目 (项目编号: 10871034, 11371079) 的创新性研究成果, 参加这一项目的有马燕影、李虎、曾光、程攀、罗兴、江乐、陈冲、潘玉斌、彭江艳.

本书得到四川大学吕涛教授的指导和帮助, 在此表示衷心感谢；感谢四川大学朱瑞老师的帮助. 科学出版社王丽平编辑在本书出版的各个阶段给予极大的支持, 在此谨表谢忱.

黄　晋

2016 年 4 月 25 日于电子科技大学清水河畔

符号便览

$\Re$	实数集合
$\Re^s$	s维空间
$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_s)$	$\Re^s$中的一个点
$\lvert\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\rvert=[(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_s-y_s)^2]^{1/2}$	$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{y}$的 Euclid 距离
$f(\boldsymbol{x})$	函数$f(x_1,\cdots,x_s)$的缩写
D_i	$\dfrac{\partial}{\partial x_i}$的缩写
$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$	多指标
$\lvert\alpha\rvert$	$\alpha_1+\cdots+\alpha_s$
$\alpha!$	$\alpha_1!\cdots\alpha_s!$
D^α	$D_1^{\alpha_1}\cdots D_s^{\alpha_s}$
Ω	$\Re^s$中的区域
$\bar{\Omega}$	Ω的闭包
Ω^c	Ω的补集
X,Y	Banach 空间
X^*	X的共轭空间
$A:X\to Y$	映X到Y的算子
A^*	A的共轭算子
$D(A)$	A的定义域
$\Re(A)$	A的值域
$N(A)$	A的零点集合
$\pounds(X,Y)$	映X到Y的全体有界算子空间
$\lvert\lvert A\rvert\rvert_{Y,X}$	$A\in\pounds(X,Y)$的算子范数
$x_n\to x$	x_n收敛于x
$C(\Omega)$	Ω上的连续函数
$C^m(\Omega)$	Ω上直到m阶导数连续的函数空间
$C^{m,\alpha}(\Omega)$	Hölder 空间，$0<\alpha\leqslant 1$
$L_p(\Omega)$	Ω上p次方可积函数空间
$L_\infty(\Omega)$	Ω上真性有界函数空间
$C_0^\infty(\Omega)$	支集包含于Ω内的无限可微函数空间

$W_p^m(\Omega)$	Sobolev 空间
$H^m(\Omega)$	$W_2^m(\Omega)$的缩写
S_α^0	局部可积函数$A(\xi)$且满足$\lvert A(\xi)\rvert \leqslant C(1+\lvert\xi\rvert)^\alpha$的函数类
$F(f(x)), \hat{f}(x)$	$f(x)$的 Fourier 变换
$h=(h_1,\cdots,h_s)$	多参数步长
h_0	$\max\limits_{1\leqslant j\leqslant s} h_j$
$\dfrac{h}{2^\alpha}$	$\left(\dfrac{h_1}{2^{\alpha_1}},\cdots,\dfrac{h_s}{2^{\alpha_s}}\right)$
h^α	$h_1^{\alpha_1}\cdots h_s^{\alpha_s}$

目　　录

第 1 章　奇异积分与奇异积分算子

积分分为正常积分和反常积分两种类型. 正常积分的被积函数没有奇点能够按照普通积分定义来计算; 反常积分的被积函数含有奇点，积分值可能收敛，也可能发散. 发散积分并非全无研究价值，恰恰相反，某些发散积分可以在 Cauchy 主值意义下定义积分的有限值；某些发散积分必须在 Hadamard 有限部分意义下定义积分的有限值. 发散积分的有限值研究和计算在数学物理和工程计算中具有重要意义，例如量子电动力学中的所谓重整化理论，便归结于计算发散积分的有限值，这个理论的数学基础构成广义函数这一学科的主要内容. 本章介绍各类奇异积分：无穷限的广义积分、弱奇异积分、Cauchy 主值意义下的奇异积分和 Hadamard 的有限部分意义下奇异积分的定义、性质及奇异积分算子的定义、性质，以及 Fourier 变换、Mellin 变换和 Laplace 变换的概念和性质.

1.1　奇 异 积 分

奇异积分在数学应用和工程问题中时常遇到，尤其是在工程边界元中，奇异积分的计算必不可少. 本节给出弱奇异积分、Cauchy 主值积分、Hadamard 有限部分积分的概念、性质及运算规律.

1.1.1　无穷限广义积分

1. 无穷限广义积分的概念及收敛性条件

定义 1.1.1　设函数 $f(x)$ 对于任意的 A $(A > a)$ 在区间 $[a, A]$ 上可积，当有限的极限 $\lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)dx$ 存在时，称这极限为 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上的广义积分，记

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = I = \lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)dx, \tag{1.1.1}$$

此时也称该积分收敛. 若 (1.1.1) 不存在，称该积分发散.

类似可定义广义积分 $\int_{\infty}^{b} f(x)dx$ 和 $\int_{\infty}^{\infty} f(x)dx$. 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则

$$\int_a^A f(x)dx = F(A) - F(a) \tag{1.1.2}$$

成立. 因此 $\int_a^\infty f(x)dx$ 收敛，相当于 $\lim_{A\to\infty} F(A) = F(+\infty)$ 存在，从而

$$\int_a^\infty f(x)dx = F(+\infty) - F(a). \tag{1.1.3}$$

同样有

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = F(b) - F(-\infty) \text{ 和} \int_{-\infty}^\infty f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty). \tag{1.1.4}$$

无穷限广义积分的分部积分公式

$$\int_a^\infty udv = uv|_a^\infty - \int_a^\infty vdu.$$

无穷限广义积分收敛的充要条件 (Cauchy 条件), 即积分 $\int_a^\infty f(x)dx$ 收敛的充分必要条件是: 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 A_0 $(A_0 \geqslant a)$, 当 A, $A' \geqslant A_0$ 时，

$$|I(A') - I(A)| = \left|\int_a^{A'} f(x)dx - \int_a^A f(x)dx\right| = \left|\int_A^{A'} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

成立.

若当 $x \geqslant a$ 时，$f(x) \geqslant 0$, 那么 $\int_a^A f(x)dx$ 是 A 的上升函数，只要 $\int_a^A f(x)dx$ 有界，就可以得到 $\int_a^\infty f(x)dx$ 收敛.

2. 无穷限广义积分收敛的判别法

(1) 比较判别法: 设从某一值 $a_0 \geqslant a$ 起，有 $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$, 而积分 $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ 收敛，那么积分 $\int_a^\infty f(x)dx$ 绝对收敛；又若 $|f(x)| \geqslant \varphi(x) \geqslant 0$, 而积分 $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ 发散，那么积分 $\int_a^\infty |f(x)|dx$ 发散.

比较判别法的极限形式：若$\lim_{x\to\infty} \dfrac{|f(x)|}{\varphi(x)} = l$, 当 $0 \leqslant l < \infty$, 且 $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ 收敛，则积分 $\int_a^\infty f(x)dx$ 绝对收敛；若 $0 < l \leqslant \infty$, 且 $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ 发散，则积分 $\int_a^\infty |f(x)|dx$ 发散.

证明　若 $\lim_{x\to\infty} \dfrac{|f(x)|}{\varphi(x)} = l \neq 0$, 则对于 ε, $l - \varepsilon > 0$, 必然存在 x_0, 当 $x \geqslant x_0$ 时，

$$0 < l - \varepsilon < \frac{|f(x)|}{\varphi(x)} < l + \varepsilon, \text{即}(l-\varepsilon)\varphi(x) < |f(x)| < (l+\varepsilon)\varphi(x)$$