UMSS

大学数学科学丛书 —35

实变函数论教程

杨力华 编著

科学出版社

大学数学科学丛书 35

实变函数论教程

杨力华　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书系统讲述实变函数的基本理论，包括集合论的基本概念、欧几里得空间的拓扑性质与连续函数的基本性质、点集的测度与可测函数、Lebesgue 积分理论以及微积分基本定理. 作为实变函数基本理论的延伸，本书还给出了 L^p 空间的基本理论和抽象测度论的一个简介，前者是泛函分析与调和分析的一个入门基础，后者可为概率论的学习提供一个初步的理论基础.

本书可作为大学数学与应用数学专业高年级本科生的教材和教学参考书，也可作为相近专业研究生的实分析教材. 本书强调实变函数理论基本思想的解析，可读性强，也适宜作为自学读本.

图书在版编目(CIP)数据

实变函数论教程/杨力华编著. —北京：科学出版社, 2017.5
(大学数学科学丛书; 35)
ISBN 978-7-03-052832-2

Ⅰ. ①实… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①实变函数论-高等学校-教材 Ⅳ. ①O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 107946 号

责任编辑：李静科 / 责任校对：彭 涛
责任印制：肖 兴 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

天津新科印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 5 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2017 年 5 月第一次印刷 印张：11
字数：212 000
定价：48.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

《大学数学科学丛书》序

按照恩格斯的说法，数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学．从恩格斯那时到现在，尽管数学的内涵已经大大拓展了，人们对现实世界中的数量关系和空间形式的认识和理解已今非昔比，数学科学已构成包括纯粹数学及应用数学内含的众多分支学科和许多新兴交叉学科的庞大的科学体系，但恩格斯的这一说法仍然是对数学的一个中肯而又相对来说易于为公众了解和接受的概括，科学地反映了数学这一学科的内涵．正由于忽略了物质的具体形态和属性、纯粹从数量关系和空间形式的角度来研究现实世界，数学表现出高度抽象性和应用广泛性的特点，具有特殊的公共基础地位，其重要性得到普遍的认同．

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的．作为一种先进的文化，数学不仅在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，而且是人类文明的一个重要的支柱．数学教育对于启迪心智、增进素质、提高全人类文明程度的必要性和重要性已得到空前普遍的重视．数学教育本质是一种素质教育；学习数学，不仅要学到许多重要的数学概念、方法和结论，更要着重领会数学的精神实质和思想方法．在大学学习高等数学的阶段，更应该自觉地去意识并努力体现这一点．

作为面向大学本科生和研究生以及有关教师的教材，教学参考书或课外读物的系列，本丛书将努力贯彻加强基础、面向前沿、突出思想、关注应用和方便阅读的原则，力求为各专业的大学本科生或研究生(包括硕士生及博士生)走近数学科学、理解数学科学以及应用数学科学提供必要的指引和有力的帮助，并欢迎其中相当一些能被广大学校选用为教材，相信并希望在各方面的支持及帮助下，本丛书将会愈出愈好．

李大潜

2003 年 12 月 27 日

前　言

现代工业文明起源于牛顿力学. 微积分是牛顿力学的基石. 1671 年牛顿出版了《流数法和无穷级数》从而创立了微积分. 与他同时期, 1684 年德国数学家莱布尼茨发表了题为《一种求极大极小和切线的新方法, 它也适用于分式和无理量, 以及这种新方法的奇妙类型的计算》的论文, 独立地创立了微积分. 1687 年牛顿出版了《自然哲学的数学原理》从而建立了经典力学的基础. 利用微积分, 事物非均匀变化的规律可以得到准确的描述: 速度是物体运动行程关于时间的导数; 速度的导数是加速度; 加速度与所受的力成正比. 漫长的人类发展史 (约 350 万—600 万年) 和文明史 (约 5000—7000 年) 孕育了微积分的诞生. 微积分的诞生迄今才 340 多年, 今天, 从自然科学到社会科学, 微积分是我们描述和认识复杂事物必不可少的工具. 没有微积分就没有现代工业和科技文明.

数学源于人们对于度量的需要. 度量导致了对数和形的认识与研究, 人们逐步认识了自然数、有理数、无理数以及正数、负数、复数; 对形的认识首先是直的 (正方形、矩形、三角形、多边形), 然后是曲的 (圆、椭圆、曲边形), 最后是一般的集合. 实变函数在高维欧几里得空间的一般点集上建立度量理论 (Lebesgue 测度) 和积分理论 (Lebesgue 积分), 发展了微积分, 奠定了分析数学的重要基础.

为了在高维欧几里得空间的点集上建立度量和积分理论, 19 世纪后期, 以 Borel 为代表的法国数学家 (Borel, Bair, Lebesgue 等) 做出了杰出的贡献. 1901 年, 年仅 26 岁的 Lebesgue 发表了论文《论定积分的一种推广》. 在该文中, 他建立了现在被称为 Lebesgue 测度和 Lebesgue 积分的新理论. 他对欧几里得空间中非常一般的集合建立了体积度量, 并对定义在集合上的函数建立了积分理论. Lebesgue 测度和 Lebesgue 积分理论已成为泛函分析、调和分析、测度论、抽象分析等学科的基础, 是现代分析数学的基石. 不能想象没有 Lebesgue 积分的数学会是什么样子. 斗转星移, 百年间人类历史发生了巨变. 数学改变了世界, 而 Lebesgue 积分是数学发展的里程碑 (推荐读者阅读 Jean-Pierre Kahane 为纪念 Lebesgue 积分 100 周年而写的文章《Lebesgue 积分的产生及其影响》, 中译本发表于《数学进展》, Vol. 31, No. 2, 2002 年 4 月).

实变函数便是系统讲授 Lebesgue 测度和 Lebesgue 积分的专业课程, 从知识结构上说, 它与复变函数一起承接微积分的基本理论和方法. 复变函数论从复变量函数的解析性 (任意方向的可微性) 上延伸微积分; 而实变函数以扩充实函数的积分体系为主线, 在非常广泛的意义上拓广函数的概念, 建立了 Lebesgue 积分理论, 发

展出一套技巧精湛的分析方法. 在这门课程里, 分析数学的基本能力可以得到很好的训练. 实变函数课程从知识体系上主要包含如下内容:

$$\begin{cases} \text{Lebesgue 测度理论} \begin{cases} \text{集合的测度} \\ \text{函数的可测性} \end{cases} \\ \text{Lebesgue 积分理论} \\ \text{Lebesgue 积分与微分的关系} \end{cases}$$

这些内容有很强的逻辑关联性. 因为要建立函数的积分, 所以要将定义域按一定方式划分为若干不相交的集合, 并对这些集合给予合理的度量, 这就是集合的测度. 为了使集合的度量满足可加性, 测度的定义必须限制在一类较好的集合上, 即可测集. 当按照函数的取值范围来划分定义域时, 为了使划分所得的集合是可测集, 必须对函数加以适当的限制, 这就产生了可测函数的概念. 这些概念环环相扣, 十分精美.

实变函数是大学数学专业的一门主干课程, 也是公认的比较难的一门课程. 它的难主要表现在两个方面: 其一是理论抽象; 其二是习题思绪难寻. 前者缘于知识体系的较大跨度: 研究对象从区间上的连续函数 (微积分) 过渡到欧几里得空间一般集合上的可测函数, 抽象化程度大幅提升. 后者缘于学生对这种抽象知识的领悟与基本技能的掌握难于在短时间内达到课程要求的高度. 知识的理解需要悟, 技能的掌握需要练. 作者认为, 无论多么抽象和复杂的数学内容, 其核心思想常常是质朴的. 人类的认识总是基于已有的知识和经验, 不会凭空产生. 我们常有这样的梦境: 当你即将接近一个向往但未知的目标时, 会戛然而止. 或惊醒, 或凌乱, 但不会无中生有地清晰. 在这门课程中, 作者希望能帮助学生把抽象理论的外衣掀起, 从而窥探隐含在里面的朴实的思想内核. 对于学好一门课程而言, 教师启发和引导式的讲授是重要的. 然而, 讲授总是辅助性的, 学生的主动思考和反复练习才是决定性的. 后者的重要性远甚于前者.

第 7 章给出了测度论的一个初级介绍. 之所以这样, 是因为现代测度论的基本思想来源于 Lebesgue 测度论. 实际上, 细致考察可以发现, 测度论的基本构架中无须代数与拓扑结构, 也就是说, 我们可以在没有代数与拓扑结构的一般集合上建立测度论. 在第 7 章中读者会发现许多与 Lebesgue 测度几乎完全类似的理论与结果. 添加这一章的另一个目的是为本科生概率论学习提供一个有用的理论基础.

本书可作为数学专业本科实变函数课程的教材, 亦可作为相关专业的研究生教材. 前四章是实变函数课程的基本内容. 后三章可根据学生程度酌情选用. 作者在中山大学为基地班学生讲授该课程时可以按一个学期十八周, 每周四课时讲授完前六章. 若学生的程度稍低或课时较少, 则可略去部分定理的证明或舍弃部分章节. 以下是建议取舍的内容.

- 可以只讲结果而不讲证明的内容

—— 第 1 章: 定理 1.1.8(Bernstein, 基数序关系的反对称性).

—— 第 2 章: 引理 2.1.2, 定理 2.3.5(乘积集合的可测性), 定理 2.4.1(不可测集的存在性).

—— 第 4 章: 定理 4.3.2(积分的基本性质) 可以只对可积函数情形给出证明; 定理 4.6.1(Tonelli 定理) 和定理 4.6.2(Fubini 定理)(相应地, 引理 4.6.1 可以略去).

—— 第 5 章: 定理 5.1.1(Lebesgue 微分定理), 定理 5.2.2(单调函数的可微性), 引理 5.4.1(导数非负蕴涵函数的递增性).

- 可以完全不讲的内容

—— 第 4 章: 定理 4.2.7(积分的分布函数表示), 定理 4.5.1 和定理 4.5.2(积分变量替换).

—— 第 5 章: 两种情形的 Vitali 覆盖定理 (引理 5.1.1 和定理 5.2.1), 引理 5.1.2(极大函数的分布函数的估计).

—— 第 6 章: 6.2 节 (L^p 空间中的一些重要事实).

—— 第 7 章: 全章可以不讲或介绍性地讲一次课. 对于程度好的学生, 这部分内容自学并不困难.

本书的习题主要来自于文献 [2], [4], [9], [10]. 在本书的定稿阶段, 中山大学颜立新教授和北京工业大学刘有明教授提出了非常具体和宝贵的意见. 杨利军博士和我院博士研究生吴良川同学曾担任作者的助教, 他们给作者提出了有价值的建议. 黄健峰博士和中山大学逸仙班本科生梁森伟、张伟俊同学仔细校对了原稿, 并帮作者补充了部分习题. 林武宏博士绘制了部分插图. 作者谨此向上述各位表示衷心的感谢.

杨力华

2017 年 5 月于中山大学

目　录

第 1 章　集合与 $\mathbb{R}^n$ 中点集

实变函数在 n 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中一般的点集上建立度量理论和积分理论. 因此, 我们从集合的概念出发来开始本课程. 本章我们给出集合的基本性质与运算, 主要讨论集合的基数和 $\mathbb{R}^n$ 中点集的拓扑性质, 并将数学分析中的区间上连续函数的定义与基本性质推广到 $\mathbb{R}^n$ 中点集 E 上的函数. 本章是第 2 章 Lebesgue 测度以及第 3 章 Lebesgue 可测函数理论的基础.

1.1　集合及其基数

集合的定义是数学的基础问题, 严格的定义超出了本书的范围. 这里我们只描述性地给出集合必须满足的基本条件:

(1) 集合是由元素构成的;

(2) 一个元素是否属于这个集合是明确的, 非此即彼的;

(3) 集合本身不能是自己的元素.

集合中如果有若干元素是相同的, 则视为一个元素. 在纯集合论的意义上, 集合的元素之间没有运算, 没有序关系, 没有比较关系, 没有位置关系. 设 A 是一个集合, a 是一个元素, 若 a 属于 A, 则记为 $a \in A$; 否则记为 $a \notin A$. 不含任何元素的集合称为空集, 记为 $\varnothing$.

集合与集合之间可以作运算. 设 A, B 是两个集合, 如果它们所含元素完全相同, 则称它们相等, 记为 $A = B$; 否则称为不等, 记为 $A \neq B$. 如果 A 中的元素恒为 B 中的元素, 则称 A 是 B 的子集, 或称 B 包含 A, 记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 包含与相等是集合的关系运算. 除此以外, 集合与集合之间可以作算术运算, 即交、并、差、补、极限, 其定义如下 (全书中, 符号 $\forall$ 表示 "对任意的", $\exists$ 表示 "存在"):

(1) 集合的并: $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma := \{x | x \in A_\gamma,\ \exists \gamma \in \Gamma\}$;

(2) 集合的交: $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma := \{x | x \in A_\gamma,\ \forall \gamma \in \Gamma\}$;

(3) 集合的差: $A \setminus B := \{x | x \in A 且 x \notin B\}$;

(4) 集合的补: $A^c := X \setminus A$, 其中 X 表示全集, 依具体问题而指定或不指自明;

(5) 集合的卡氏 (Cartesian) 积: n 个集合 $A_1, \cdots, A_n$ 的卡氏积定义为

$$\prod_{i=1}^{n} A_i := A_1 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, \cdots a_n) | a_i \in A_i, i = 1, \cdots, n\},$$

其中, 两个元素 $(a_1,\cdots,a_n)$ 和 $(b_1,\cdots,b_n)$ 相等定义为其对应的元素相等, 即 $a_i=b_i,\ \forall i=1,\cdots,n$. 特别地, n 个相同的集合的卡氏积 $\Pi_{i=1}^{n}A$ 记为 A^n. 类似地定义一列集合 $A_1,A_2,\cdots$ 的卡氏积 $\Pi_{i=1}^{\infty}A_i$, 并记 $\Pi_{i=1}^{\infty}A$ 为 A^{∞}.

(6) 集合列 $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ($\mathbb{N}$ 表示自然数集) 的极限:

$$\begin{cases}\text{上极限}: & \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\ A_k:=\{x|\text{存在无穷多个 } k\in\mathbb{N}, \text{使得: } x\in A_k\};\\ \text{下极限}: & \underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\ A_k:=\{x|\text{存在 } N\in\mathbb{N}, \text{使得: 当 } k>N \text{ 时, 有 } x\in A_k\}.\end{cases}$$

若 $\overline{\lim}_{k\to\infty}A_k=\underline{\lim}_{k\to\infty}A_k$, 则称 $\{A_k\}$ 的极限存在, 并将 $\overline{\lim}_{k\to\infty}A_k$ 记为 $\lim_{k\to\infty}A_k$. 否则称 $\{A_k\}$ 的极限不存在.

集合极限的概念对于初学者会有些困难, 我们给予稍微多一些的解释. 首先, 集合列 $\{A_k\}$ 的上极限与下极限仍然是集合, 是由集合列 $\{A_k\}$ 所确定的集合. 下极限 $\underline{\lim}_{k\to\infty}A_k$ 由这样的元素 x 构成: 除去有限个集合外, 均有 $x\in A_k$. 例如, 考虑集合列

$$A_k:=[(-1)^k,k],\quad k=1,2,\cdots,$$

那么 A_k 是一个区间, 它的左端点不断地交替取值 -1 和 1, 而其右端点为 k, 随着 k 的增大而趋于无穷 (图 1.1). 那么, 显然, 当 $x<1$ 时, 所有偶数下标的集合 A_k 均不包含 x, 所以 $x\notin\underline{\lim}_{k\to\infty}A_k$; 而当 $x\geqslant 1$ 时, 只要 $k>x$, 就有 $x\in A_k$. 即最多有有限个 A_k 不包含 x. 所以 $x\in\underline{\lim}_{k\to\infty}A_k$. 因此, $\underline{\lim}_{k\to\infty}A_k=[1,\infty)$.

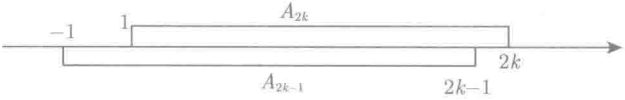

图 1.1　集合 $A_k:=[(-1)^k,k],\ k=1,2,\cdots$

类似地, 集合 $\overline{\lim}_{k\to\infty}A_k$ 由这样的点 x 构成: 存在无穷多个 k, 使得 $x\in A_k$. 在上面的例子中, 易见 $\forall x\geqslant -1$, 对足够大的奇数 k 时, 有 $x\in A_k$, 而显然 $x<-1$ 不属于任何集合 A_k. 所以 $\overline{\lim}_{k\to\infty}A_k=[-1,\infty)$.

直观上看, 下极限是由属于几乎所有集合 A_k(除去有限个) 的点构成的集合, 而上极限是由属于无穷多个集合 A_k 的点构成的集合. 由此可见, 下极限是上极限的子集, 而且上极限和下极限都与该集合列的有限个集合无关, 也就是说, 去掉其中的有限个集合, 不会影响其上下极限. 这一点与数列极限是一致的.

根据集合列的极限定义容易证明如下定理.

定理 1.1.1 (集合列极限的交、并表示)　对集合列 $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, 有

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\ A_k=\bigcap_{j\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geqslant j}A_k,\qquad \underline{\lim_{k\to\infty}}\ A_k=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\bigcap_{k\geqslant j}A_k.$$

证 根据定义, $x\in\overline{\lim}_{k\to\infty}A_k$ 是指: 存在无穷多个 $k\in\mathbb{N}$, 使得 $x\in A_k$. 即 $\forall n\in\mathbb{N}$, 总存在 $k\geqslant n$ 使得 $x\in A_k$. 也就是 $\forall n\in\mathbb{N}$, 有 $x\in\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$, 即 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$. 故第一式成立. 类似可证第二式. ■

注 读者可将此结论与实数列的上下极限作比较. 实数列 $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的上下极限定义为

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\ c_k=\inf_{j\in\mathbb{N}}\sup_{k\geqslant j}c_k,\quad \underline{\lim_{k\to\infty}}\ c_k=\sup_{j\in\mathbb{N}}\inf_{k\geqslant j}c_k.$$

利用集合列极限的定义或定理 1.1.1, 容易求得如下两种特殊情况下的极限 (证明留作练习):

(i) (渐张集列) 若 $A_1\subset A_2\subset\cdots$, 则 $\lim_{k\to\infty}A_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$;

(ii) (渐缩集列) 若 $A_1\supset A_2\supset\cdots$, 则 $\lim_{k\to\infty}A_k=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$.

根据集合的定义容易证明如下 De Morgan 法则成立:

$$\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\right)^c=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma^c,\quad \left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\right)^c=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma^c.$$

利用 De Morgan 法则和定理 1.1.1 可知

$$\left(\overline{\lim_{k\to\infty}}\ A_k\right)^c=\underline{\lim_{k\to\infty}}\ A_k^c,\quad \left(\underline{\lim_{k\to\infty}}\ A_k\right)^c=\overline{\lim_{k\to\infty}}\ A_k^c.$$

本节的重点是研究集合的基数. 基数是集合所含元素个数的一个度量. 对于有限集, 其基数定义为该集合所含元素的个数 (空集可看作所含元素个数为 0 的有限集), 对于无限集, 元素 "个数" 的概念十分复杂. 例如, $\mathbb{N}$(自然数集), $\mathbb{Z}$ (整数集), $\mathbb{Q}$(有理数集), 以及 $\mathbb{R}$(实数集) 都是无限集, 但其所含元素个数相差甚远. 显然, 我们无法用某个数来度量无限集所含元素的多少. 然而, 通过一一映射我们却可以将无限集进行分类, 也就是将彼此能建立一一映射的两个集合归入一类, 认为它们的元素个数在同一个无限的量级上. 我们称这样的两个集合具有相同的基数.

定义 1.1.1 (集合的基数) *设 A,B 是两个非空集合,*

(i) *如果存在映 A 到 B 的双射(既为单射, 也为满射), 那么称 A 与 B 是对等的, 记为 $A\sim B$. 或称它们有相同的基数, 记为 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$. 否则, 记为 $\overline{\overline{A}}\neq\overline{\overline{B}}$.*

(ii) *如果集合 A 与 B 的一个子集对等, 则记为 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$; 如果 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$ 且 $\overline{\overline{A}}\neq\overline{\overline{B}}$, 则记为 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$.*

易见, 集合对等 "$\sim$" 是一个等价关系, 即满足自反性 ($A\sim A$)、对称性 ($A\sim B$ 蕴涵 $B\sim A$) 和传递性 ($A\sim B$ 且 $B\sim C$ 蕴涵 $A\sim C$).

例 1.1.1 $(0,1)\sim\mathbb{R}$, $(0,1)^n\sim\mathbb{R}^n$.

证 因 $f(x)=\cot(\pi x):(0,1)\to\mathbb{R}$ 是双射, 所以 $\mathbb{R}\sim(0,1)$. 余者类似可证. ■

无限集中, 一个最典型的集合是自然数集 $\mathbb{N}$. 这就产生了如下可列集的概念.

定义 1.1.2 (可列集、可数集)　与自然数集 $\mathbb{N}$ 对等的集合称为可列集; 有限集和可列集统称为可数集①. 非可数的集合称为不可数集.

显然, 集合 A 可列当且仅当存在双射 $f:\mathbb{N}\to A$, 于是 $A=\{f(1),f(2),\cdots\}$. 也就是说, 集合 A 可列当且仅当 A 中的元素可以排列成一个序列. 此即 "可列集" 名称的由来.

定理 1.1.2 (可列集的并)　可数个可列集的并是可列集.

证　设 $A_1,A_2,\cdots$ 为可列个可列集, 我们设法将 $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}A_k$ 的元素排成一个序列.

记 $A_k=\{a_{k1},a_{k2},\cdots\}$, $k=1,2,\cdots$. 显然, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}A_k$ 的元素一定出现在如下的方阵中:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

我们从左上角开始按斜对角的方式对此方阵的元素排序:

$$a_{11},a_{12},a_{21},a_{13},a_{22},a_{31},a_{14},a_{23},a_{32},\cdots.$$

由于 $A_1,A_2,\cdots$ 可能含相同的元素, 所以方阵中也可能有相同的元素. 如果出现已经排列过的元素, 则弃之, 那么 $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}A_k$ 的全部元素被排成了一个序列, 因而是可列集.

对有限个可列集 $A_1,\cdots,A_N$ 的情形, 令 $A_k=A_N(k>N)$, 那么 $A_1,A_2,\cdots$ 为可列个可列集, 其并集不变. 如上所证, 其并集为可列集. ■

例 1.1.2　$\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}\sim\mathbb{Q}$.

证　因为 $\mathbb{Z}=\{0,1,-1,2,-2,\cdots\}$, 所以 $\mathbb{Z}$ 是可列集. 又因为

$$A_k=\{0,1/k,-1/k,2/k,-2/k,\cdots\},\quad k=1,2,\cdots$$

是一列可列集, 所以 $\mathbb{Q}=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}A_k$ 也是可列集. ■

例 1.1.3　设 $A\sim\mathbb{N}$, n 是一自然数, 则 $A^n:=\{(x_1,\cdots,x_n)|x_k\in A,k=1,\cdots,n\}$ 为可列集.

证　对 n 作归纳法. 当 $n=1$ 时结论显然成立. 对自然数 $n>1$, 假设 A^{n-1} 为可列集, 则 $\forall a\in A$, 有 $a\times A^{n-1}:=\{(a,b)|b\in A^{n-1}\}\sim A^{n-1}$ 是可列集. 由定理 1.1.2 可知

$$A^n=A\times A^{n-1}=\bigcup_{a\in A}(a\times A^{n-1})$$

①有的书上将可列集与可数集当作同一个概念, 即把与自然数集对等的集合称为可列集, 也称为可数集. 请注意在本书中此两个概念是不同的.

是可列集. 据归纳法, 对任意自然数 n, A^n 可列. ■

自然数集、整数集、有理数集都是可列集, 那么是不是所有的无限集都是可列的呢? 下面的定理表明, 不可数的集合是存在的.

定理 1.1.3 (不可数集合) *$[0,1]$ 是不可数集合.*

证 为了证明不存在 $[0,1]$ 到 $\mathbb{N}$ 的双射, 我们采用反证法. 设 $[0,1]$ 可列, 则 $[0,1]=\{x_1,x_2,\cdots\}$. 为了导出矛盾, 我们构造 $[0,1]$ 的非空子集 A, 使其不含任何 $x_k, k\in\mathbb{N}$. 一旦 A 被构造出来, 那么 A 中的点不是任何一个 x_k, 因而不在 $[0,1]$ 中, 与 $A\subset[0,1]$ 矛盾, 即获证.

下面我们构造这样的集合 A. 其思想是从 $[0,1]$ 中依次剔除每一个 x_k.

将 $[0,1]$ 三等分, 那么必存在其中一个区间不含 x_1, 记该区间为 I_1. 又将 I_1 三等分, 那么必存在其中之一不含 x_2, 记此区间为 I_2, 如此下去, 得到闭区间列 $\{I_k\}$, 满足

$$I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots,\quad |I_k|=3^{-k}\to 0\ (k\to\infty),$$

且 $x_k\notin I_k$ $(k=1,2,\cdots)$. 作集合 $A:=\bigcap_{k=1}^{\infty}I_k$, 显然每一个 x_k 都不在 A 中. 根据闭区间套定理, A 非空. ■

请读者思考, 在上面的证明中为什么要对区间进行三等分划分, 二等分行吗? 四等分呢?

如下定理表明, 任一无限集必含有可列的子集, 因而可列集是具有最小基数的无限集.

定理 1.1.4 (可列集是具有最小基数的无限集) *任一无限集 A 必含可列的子集, 因而 $\overline{\overline{\mathbb{N}}}\leqslant\overline{\overline{A}}$.*

证 设 A 为一无限集, 取 $x_1\in A$, 则 $A\setminus\{x_1\}$ 仍为一无限集, 于是可取 $x_2\in A\setminus\{x_1\}$, 同理可取 $x_3\in A\setminus\{x_1,x_2\}$, 不断进行下去, 得到可列集

$$A_1=\{x_1,x_2,\cdots\}\subset A.$$ ■

该定理对我们了解可数集对集合基数的作用非常重要. 因为无限集包含可列子集, 而可列集再添加可数的子集不改变其可列性, 所以, 无限集添加一个可数集后基数并不改变. 我们将此整理成如下定理.

定理 1.1.5 (无限集的基数对可数增减的不变性) *设 A 为一无限集, B 为一可数集, 则 $A\bigcup B\sim A$. 进一步, 若 $A\setminus B$ 也是无限集, 则 $A\setminus B\sim A$.*

分析 证明的基本思想是从 A 中抽取一个可列集 A_1, 利用

$$A\bigcup B=(A\setminus A_1)\bigcup A_1\bigcup(B\setminus A),\quad A_1\bigcup(B\setminus A)\sim A_1$$

构造双射.

证 因 A 为一无限集, 故存在一可列的子集 A_1. 因 $B\setminus A$ 是可数集, 所以 $A_1\bigcup(B\setminus A)$ 是一可列集, 于是存在双射 $f: A_1\to A_1\bigcup(B\setminus A)$. 定义映射

$g: A \to A \bigcup B$ 如下:

$$g:\ x \mapsto \begin{cases} f(x), & x \in A_1, \\ x, & x \in A \setminus A_1. \end{cases}$$

易见 g 是一个双射. 所以 $A \bigcup B \sim A$.

若 $A \setminus B$ 也是无限集, 因 $A \bigcap B$ 为可数集, 如上所证, 有

$$A = (A \setminus B) \bigcup (A \bigcap B) \sim A \setminus B. \qquad \blacksquare$$

例 1.1.4　$(0,1) \sim [0,1] \sim \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

证　根据定理 1.1.5, 有 $[0,1] = (0,1) \bigcup \{0,1\} \sim (0,1)$. 同理, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \sim \mathbb{R}$. $\blacksquare$

称可列集的基数为 $\aleph_0$(阿列夫零), 称实数集 $\mathbb{R}$ 的基数为 $\aleph$(阿列夫). 因为 $[0,1]$ 是不可列的, 所以 $\aleph_0 < \aleph$.

上面已证明, 实数集的基数 $\aleph$ 大于可列集的基数 $\aleph_0$, 那么有没有比 $\aleph$ 更大的基数呢? 下面我们讨论这个问题. 先引入幂集的概念.

定义 1.1.3 (幂集)　*设 A 是一个集合, 称集合 $\mathscr{P}(A) := \{B | B \subset A\}$ 为 A 的幂集*①.

显然对任意的集合 A, 有 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{\mathscr{P}(A)}}$. 下面我们证明 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\mathscr{P}(A)}}$.

定理 1.1.6 (幂集的基数)　*设 A 是一个集合, 则 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\mathscr{P}(A)}}$.*

证　因 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{\mathscr{P}(A)}}$, 只需证明 A 与 $\mathscr{P}(A)$ 不对等. 若则存在双射 $f: A \to \mathscr{P}(A)$, 作

$$B = \{x \in A | x \notin f(x)\},$$

因 $B \in \mathscr{P}(A)$, 故存在 $y \in A$ 使得 $f(y) = B$.

现在我们考虑 y 是否属于 B. 若 $y \in B$, 则有 $y \notin f(y) = B$, 矛盾; 若 $y \notin B$, 则有 $y \in f(y) = B$, 也产生矛盾. 所以 A 不能与其幂集 $\mathscr{P}(A)$ 对等. $\blacksquare$

由此定理可知, 任何一个集合, 它的幂集的基数比它本身的基数更大. 因此最大基数是不存在的. 远在古希腊时期, 人们认为没有一个无限集比另一个无限集大, 这一观点持续了两千多年, 直到 1891 年, G. Cantor 证明了集合的幂集的基数比本身的基数大, 人们才对无限集的大小有了新的认识.

既然 $\overline{\overline{\mathbb{N}}} < \overline{\overline{\mathbb{R}}}$, $\overline{\overline{\mathbb{N}}} < \overline{\overline{\mathscr{P}(\mathbb{N})}}$, 那么 $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$ 与 $\overline{\overline{\mathscr{P}(\mathbb{N})}}$ 有什么关系呢? 为了研究此问题, 我们对 $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ 中元素给出方便讨论的表示. $\forall A \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$, 有 $A \subset \mathbb{N}$. 我们把 A 看作是从 $\mathbb{N}$ 中挑选部分元素所成的集合, 并且在自然数集对应的位置将被挑出者标记 1, 未被挑出者标记 0. 这样, 我们得到一个 0,1 序列 I_A. 例如, 当 $A = \{2,3,6\}$ 时, 这

①有的书上也将 A 的幂集记为 2^A.

个过程可以描述为

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &= \{1,2,3,4,5,6,7,\cdots\},\\ A &= \{\quad 2,3,\qquad 6\qquad\quad\},\\ I_A &= 0,1,1,0,0,1,0,\cdots.\end{aligned}$$

一般地, $\forall A\subset\mathbb{N}$, 我们按上述方法可以唯一地确定一个 $0,1$ 序列 $I_A=a_1a_2\cdots$, 其中

$$a_k=\begin{cases}1, & k\in A,\\ 0, & k\notin A.\end{cases}$$

而且, 一个 $0,1$ 序列反过来也确定一个集合 $A\subset\mathbb{N}$. 所以 A 与一个 $0,1$ 序列 $a_1a_2\cdots$ 是一一对应的. 利用 p-进制表数法我们将证明, 二进制序列的全体所成集合与 $[0,1]$ 是对等的. 这样, 我们便可以证明 $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ 与 $\mathbb{R}$ 的对等性.

在证明之前, 我们简单地介绍数的 p-进制表示, 它对于分析某些集合的基数是一个十分有用的工具.

设 $p\in\mathbb{N}$, $p\geqslant 2$, $\forall x\in[0,1)$, 那么, x 可以写成如下的 p-进制表示:

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{p^k}=(0.a_1a_2\cdots)_p, \tag{1.1.1}$$

其中 $a_k\in\{0,1,\cdots,p-1\}$, $\forall k\in\mathbb{N}$. 我们称其通项 a_k 属于 $\{0,1,\cdots,p-1\}$ 的数列 $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为一个 p-进制序列. 两个 p-进制序列称为相等是指其对应的元素都相等. 记全体 p-进制序列所成集合为 $\mathcal{S}_p$. 我们将证明 $\mathcal{S}_p\sim[0,1)$.

自然地, 我们考虑 $[0,1)$ 中元素 x 按照 (1.1.1) 与 $\mathcal{S}_p$ 中元素 $\{a_k\}$ 之间的对应: $x\mapsto\{a_k\}$. 然而, 这根本就不是一个映射, 因为 $[0,1)$ 中部分数有两种表示, 例如, $p=2$ 时, 0.5 按二进制表示既可以写成 $(0.1000\cdots)_2$, 也可以写成 $(0.0111\cdots)_2$. 为使得 $x\mapsto\{a_k\}$ 是一个双射, 我们从 $\mathcal{S}_p$ 中剔除那些从某项后恒为 $p-1$ 的序列 $\{a_k\}$, 剩余者记为 $\tilde{\mathcal{S}}_p$. 显然

$$f:[0,1)\to\tilde{\mathcal{S}}_p,\quad x\longmapsto\{a_k\}$$

是一个双射, 所以 $[0,1)\sim\tilde{\mathcal{S}}_p$. 称 $f(x)$ 为 x 的 p-进制规范表示.

对任意的 $k\in\mathbb{N}$, 记自第 k 项开始各项均等于 $p-1$ 的 p-进制序列所成集合为 $\mathcal{S}_p(k)$. 易见 $\mathcal{S}_p(k)$ 是有限集, 从而 $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{S}_p(k)$ 是可数集, 且 $\tilde{\mathcal{S}}_p=\mathcal{S}_p\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{S}_p(k)$. 所以, $\mathcal{S}_p\sim\tilde{\mathcal{S}}_p\sim[0,1)\sim\mathbb{R}$. 由此, 我们得到如下的结果.

定理 1.1.7 (p-进制序列的基数) $\mathcal{S}_p\sim\mathbb{R}$.

p-进制序列是研究很多集合的基数的有力工具, 其作用可在下面几个重要集合的基数的计算中得到充分表现.

例 1.1.5 (可列集的幂集的基数) $\mathscr{P}(\mathbb{N})\sim\mathbb{R}$.