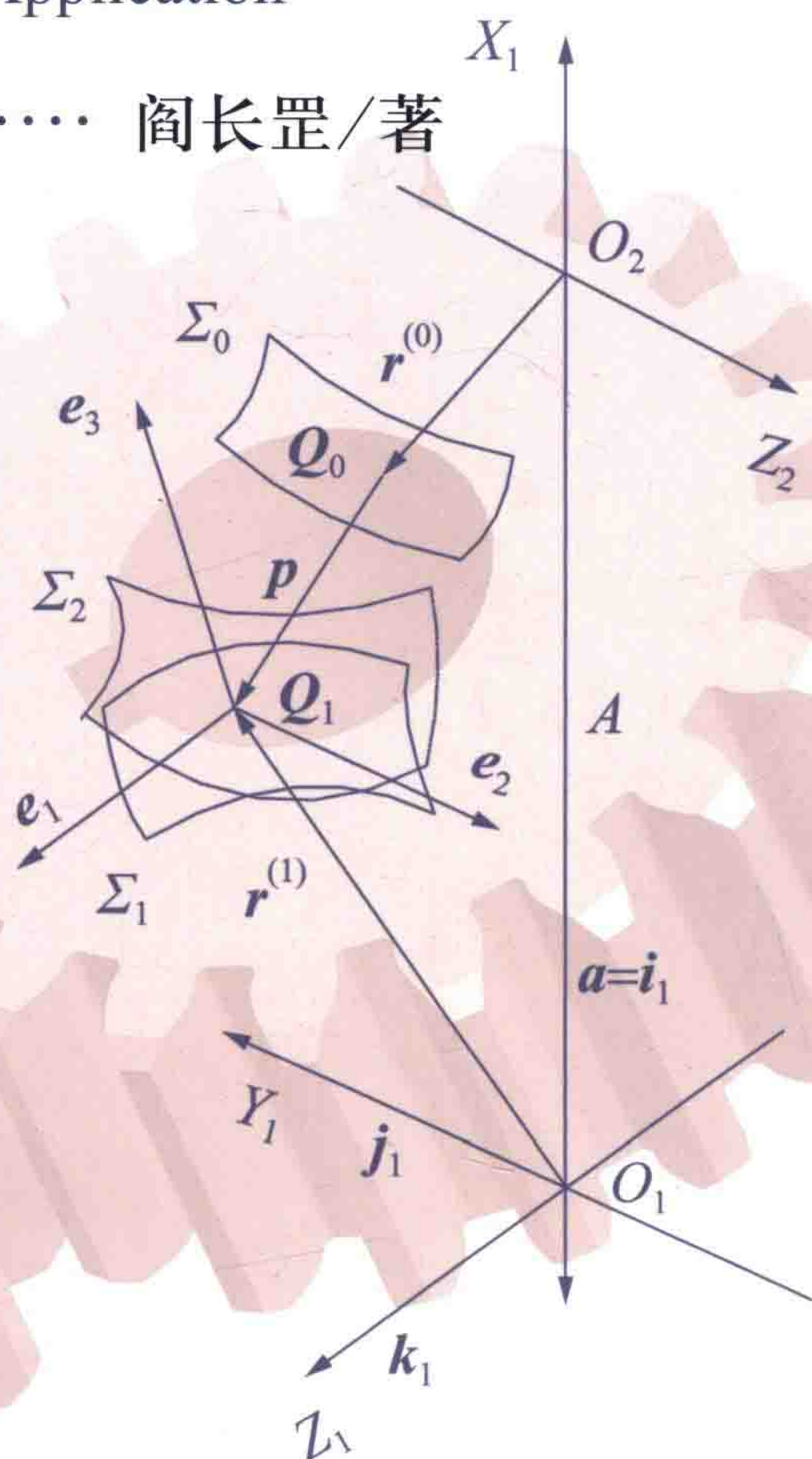


共轭曲面的数字 仿真原理及其工程应用

Theory of Numerical Simulation of Conjugate
Surface and Its Engineering Application

..... 阎长罡/著



科学出版社

共轭曲面的数字仿真 原理及其工程应用

阎长罡 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

共轭曲面原理是高副机构的理论基础,本书主要介绍基于数学规划研究共轭曲面原理的新方法——数字仿真方法以及该方法的一些应用实例。

本书内容共有9章,分为两部分:理论部分与应用部分。第1章为共轭曲面原理基础,第2章介绍共轭曲面的数字仿真原理,这两章属于理论部分。第3章~第9章为应用部分,其中,第3章介绍一种特殊原理的传动类型—— 0° 渐开线包络蜗杆传动;第4章为齿条加工齿轮的仿真过程;第5章为螺杆加工用指状铣刀廓形的计算;第6章为螺杆加工用盘铣刀廓形的计算;第7章为双圆弧齿轮滚刀铲磨砂轮的廓形计算;第8章为螺杆磨削砂轮廓形的计算;第9章介绍共轭曲面的数字仿真原理在数控侧铣加工中的应用。本书内容是根据作者多年的研究成果和工程实践撰写的,在强调理论严密性、科学性的基础上,更加注重方法的实用性和操作的便利性。

本书可供机械工程专业的研究生与科研人员以及机械传动、复杂曲面的设计与加工等领域的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

共轭曲面的数字仿真原理及其工程应用/阎长罡著. —北京:科学出版社, 2017.6

ISBN 978-7-03-053033-2

I. ①共… II. ①阎… III. ①铣削-数字仿真 IV. ①TG54-39

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第117831号

责任编辑:张 震 杨慎欣 / 责任校对:彭 涛

责任印制:吴兆东 / 封面设计:无极书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京厚诚则铭印刷科技有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017年6月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2017年6月第一次印刷 印张:11 1/2

字数:226 000

定价:78.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

共轭曲面原理是一门以几何图形和共轭运动为研究对象的学科。作为最基本的应用指导性理论，共轭曲面原理在机械传动设计、曲面加工制造等领域发挥着重要的作用。经过国内外专家学者长期不懈的努力，传统的共轭曲面原理研究已经发展到了相当成熟的阶段。

但是，“相当成熟”并不意味着没有问题，更并不意味着没有发展的空间。例如，共轭曲面原理典型的应用主要是在齿轮传动的设计以及齿轮零件的加工方面。目前，关于齿轮的书籍并不少见，有的堪称经典，每年发表的相关学术论文更是数不胜数。归纳起来，这些文献可以分为两种类型：应用型及理论型。应用型文献对于解决对应的实际问题是行之有效的，但其缺点是适用范围有所限制。理论型文献强调数学推理的科学性和严密性，为描述共轭过程以及深层次的共轭规律，半个多世纪以来，各种数学方法和手段纷纷登上共轭曲面原理的舞台，如矢量旋转、张量、矩阵、活动标架法、群论及微分形式等。但这些方法在理解及转化为实际应用上具有相当的难度。

几十年来，生产应用中不断涌现出一些难以解决的问题，对传统的共轭曲面理论与方法提出了严峻的挑战。例如，弧齿锥齿轮的接触域分析；在大弹性变形下的谐波齿轮传动；各类误差引起的共轭过程的畸变以及对传动加工的影响；以离散点集描述曲面时数字化曲面的共轭问题；复杂曲面数控加工中的精度分析与控制等。这些问题有的已超出了传统理论的刚体假定、规范性假定及连续性假定的范围，有的解决过程迂回、不够直接。这就催生了共轭曲面原理内涵的扩展与研究方法的多样化问题。

共轭曲面的数字仿真原理与方法就是在此背景下产生的。

数字仿真方法是通过离散数学的数字计算手段，直接描述共轭过程的一种方法，本质上是将共轭过程的理论模型改变为数学规划模型。因此，这种方法具有模型简单、便于解算等优点，尤其在解决误差、变形、干涉、奇异以及非连续可

微等复杂条件下的共轭曲面问题时，更能表现出特殊功效，具有传统理论与方法不可比拟的优越性。

本书内容分为两部分：理论部分与应用部分。第 1 章和第 2 章属于理论部分，其中，第 1 章介绍传统的共轭曲面原理的基本知识；第 2 章为本书的核心，描述共轭曲面数字仿真原理的相关内容。第 1 章与第 2 章既相互联系又相互独立。第 3 章～第 9 章为应用部分，除第 4 章齿条加工齿轮的例子来源于刘健教授当年“微分几何”课程的授课内容外，其余均为作者理论研究的对象或为企业解决实际问题的应用实例。其中，第 6 章盘铣刀部分稍有特殊，最初盘铣刀是与指状铣刀（第 5 章）一起为同一个螺杆零件设计的，但该螺杆零件具有“肚大口小”的特点，经过仿真计算后发现采用盘铣刀加工必将存在干涉，因而第 6 章的计算实例改为已有文献上的螺杆零件。书中各实例的全部计算程序均由作者本人独自编写完成，编程语言采用的是 C（早期）或 C#。

在多年的实践中，作者在处理一些实际的共轭曲面问题时，深深感到数字仿真方法所带来的便利性和优越性。限于精力和能力，显然作者不可能用仿真方法针对各种各样的共轭问题一一涉猎。在本书中，作者只就自身接触的有限的几个工程实例对共轭曲面数字仿真原理的工程应用做一个挂一漏万式的介绍，相信读者会从这几个实例中了解到数字仿真方法的精髓，为更好地解决各自遇到的共轭曲面问题提供有益的帮助。共轭曲面领域在理论方面具有深刻的内涵，可谓博大精深，实践方面的内容更是丰富多彩。同时，随着社会的发展、科技的进步，在共轭曲面领域不断地涌现出新的思路和新的问题，共轭曲面的数字仿真方法将具有更广阔的施展空间。

本书成稿之初，作者向恩师刘健教授进行了汇报与请教，就书名及本书的架构等进行了敲定。本书是作者的劳动成果，背后也凝聚着导师的智慧、心血与汗水，二十余年来，作者一直得到刘健教授的关怀、培养与指导，在此表示深深的感谢！大连理工大学 CIMS 中心的刘晓冰教授在作者多年的学习、工作、科研生涯中，给予了多方面的支持、帮助与指导，在此表示衷心的感谢！大连理工大学王晓明教授、曹利新教授同样给予了作者帮助与指导，在此一并表示谢意。作者

在本书写作过程中得到了大连交通大学何卫东教授、王春教授、崔云先教授、单丽君教授、邓晓云副教授、施晓春副教授等的帮助，也在此表示感谢。本书的出版得到了大连交通大学机械学院的大力支持以及学院学科建设经费的资助，在此向以何卫东教授为院长的学院领导班子表示衷心感谢！

由于作者的能力与水平有限以及实践经验的欠缺，书中不当之处在所难免，还请各位专家学者多多批评指正！

阎长罡

2017年1月31日

目 录

前言

第 1 章	共轭曲面原理基础	1
1.1	回转运动群与圆矢量函数	1
1.1.1	回转运动群	1
1.1.2	圆矢量函数	4
1.2	研究曲面的标架方法	5
1.3	共轭曲面的基本方程及微分关系式	6
1.3.1	共轭曲面的基本方程	6
1.3.2	微分关系式	7
1.4	共轭曲面的求解	11
1.5	诱导曲率	13
1.6	隐函数的存在性与函数的奇异性	15
1.6.1	$f(u, v, w) = 0$ 形式的隐函数存在性及解的奇异特征	15
1.6.2	函数方程组解的存在性及奇异特征	17
1.7	共轭的两类界限与奇点共轭	22
1.7.1	一类界限	22
1.7.2	二类界限	23
1.7.3	奇点共轭	24
	参考文献	26
第 2 章	共轭曲面的数字仿真原理	27
2.1	共轭曲面数字仿真原理的产生过程	27
2.2	共轭过程的数字仿真模型	29
2.2.1	数字仿真的基本构思	29
2.2.2	数字仿真的数学模型	30
2.3	标杆函数的存在性及最小值条件	32

2.3.1	标杆函数的存在性	32
2.3.2	标杆函数的最小值条件	33
2.4	共轭的界限	34
2.4.1	解存在性的基础方程	34
2.4.2	一类界点条件	35
2.4.3	二类界点条件	36
2.4.4	奇解点条件	37
2.5	标杆函数的性质与共轭曲面基本特征的关系	37
2.5.1	一般共轭情形	37
2.5.2	奇点共轭情形	41
2.6	接触域的仿真分析	44
2.6.1	概述	44
2.6.2	诱导曲率	45
2.6.3	曲面离差与接触域的确定	46
2.7	共轭曲面第二类问题的数字仿真研究	48
2.7.1	共轭曲面的第二类问题	48
2.7.2	数字仿真模型的建立	48
2.7.3	算例	50
	参考文献	53
第 3 章 0°渐开线包络蜗杆传动		55
3.1	二次包络与奇点共轭	55
3.1.1	奇点共轭的二次包络实现	55
3.1.2	对二次包络的再认识	57
3.2	一次包络下渐开线螺旋面的奇点共轭实现	58
3.3	0° 渐开线包络蜗杆传动概述	59
3.4	啮合面	61
3.5	蜗杆廓面方程	65
3.6	0° 渐开线包络蜗杆啮合过程的数字仿真	68
3.6.1	0° 渐开线包络蜗杆传动的仿真模型	68
3.6.2	蜗杆廓面上的一类界点条件	70
3.7	0° 渐开线包络蜗杆齿面构成的数字分析	72

3.8	0° 渐开线包络蜗杆传动的仿真接触域分析	80
3.8.1	仿真接触线分析	80
3.8.2	仿真接触域分析	82
	参考文献	83
第 4 章	齿条加工齿轮的仿真过程	84
4.1	解析方法	84
4.2	共轭曲面的数字仿真方法	86
第 5 章	螺杆加工用指状铣刀廓形的计算	89
5.1	泛外摆线螺杆面方程的建立	89
5.1.1	螺杆面端面线形的构成	89
5.1.2	螺杆面方程的建立	91
5.2	指状铣刀廓形计算的解析方法与仿真方法	91
5.2.1	解析方法	91
5.2.2	仿真方法	94
5.3	计算实例及计算结果	96
5.4	端面为离散点形式的螺杆加工指状铣刀的廓形计算	97
5.4.1	无侧隙时指状铣刀廓形的计算与校验	97
5.4.2	有侧隙时指状铣刀廓形的计算与校验	100
第 6 章	螺杆加工用盘铣刀廓形的计算	103
6.1	螺杆的端面齿形	103
6.1.1	阴螺杆的端面齿形	103
6.1.2	阳螺杆的端面齿形	105
6.2	盘铣刀廓形计算的解析方法	108
6.3	盘铣刀廓形计算的仿真方法	111
6.4	盘铣刀廓形的准确性校验	114
6.4.1	误差设为 X 方向	114
6.4.2	误差设为 Y 方向	115
6.4.3	误差的计算与分析	115
	参考文献	116

第 7 章	双圆弧齿轮滚刀铲磨砂轮的廓形计算	117
7.1	双圆弧滚刀法向截形的描述	118
7.2	双圆弧齿轮滚刀铲磨砂轮廓形的解析计算	120
7.2.1	砂轮铲磨滚刀坐标系的建立	120
7.2.2	砂轮铲磨滚刀解析数学模型的建立	121
7.3	铲磨砂轮廓形计算的数字仿真方法	124
7.4	计算实例	125
7.5	铲磨砂轮廓形的准确性校验	126
7.6	滚刀重磨对滚齿加工齿形误差的影响	129
7.6.1	滚齿加工的通用数字仿真模型	129
7.6.2	滚刀重磨后的滚齿加工齿形误差计算	133
7.6.3	砂轮铲磨工艺参数对滚齿加工齿形误差的影响	135
	参考文献	135
第 8 章	螺杆磨削砂轮廓形的计算	136
8.1	砂轮廓形计算的解析方法	136
8.1.1	问题的提出	136
8.1.2	螺杆面方程的建立	137
8.1.3	磨削加工中心距的确定	139
8.1.4	确定砂轮廓形的解析方法	139
8.2	砂轮廓形计算的仿真方法	143
8.2.1	最小值条件与啮合条件的对比	143
8.2.2	砂轮廓形的仿真计算	145
8.3	砂轮截形准确性的校验	146
	参考文献	149
第 9 章	共轭曲面的数字仿真原理在数控侧铣加工中的应用	150
9.1	引言	150
9.2	叶片曲面的造型	151
9.3	两点偏置法确定初始刀位	152
9.4	圆锥刀侧铣加工刀位规划的最小二乘法	154

9.5 圆锥刀具面族的包络面与包络误差计算 157

 9.5.1 解析方法 157

 9.5.2 基于共轭曲面仿真原理的包络面与包络误差计算 163

9.6 加工过程中相邻叶片的干涉检查 165

9.7 基于共轭曲面仿真原理的侧铣刀位最优性条件的生成 166

 9.7.1 单刀位优化的难点分析 166

 9.7.2 刀位的最优性判定条件 167

参考文献 171

第 1 章 共轭曲面原理基础

本章主要介绍共轭曲面原理研究的基本工具、理论与方法，以及相关概念，为后续的研究和应用提供必备的知识。内容包括回转运动群与圆矢量函数、研究曲面的标架方法、共轭曲面的基本方程、共轭曲面的求解、诱导曲率、隐函数的存在性与函数的奇异性、共轭的两类界限与奇点共轭。

1.1 回转运动群与圆矢量函数

1.1.1 回转运动群

1. 回转运动群的定义与性质

矢量 $\mathbf{R}$ 绕单位矢量为 $\mathbf{\Omega}_0$ 的轴回转 φ （角度）后成为矢量 $\mathbf{r}$ ，则有

$$\mathbf{r} = \mathbf{B}(\varphi)\mathbf{R} \quad (1.1)$$

式中， $\mathbf{B}(\varphi)$ 为回转运动群，简称回转群^[1]。回转运动群属于合同变换群的一种，因而满足群公理，即具有封闭性、满足结合律、并存在幺元和逆元。回转运动群方法描述了刚体的回转运动，给曲面问题的研究带来了方便。

在已知正交标架 $\{\mathbf{o}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ 中，有回转轴 $\mathbf{op}$ ，如图 1.1 所示，则单位矢量 $\mathbf{\Omega}_0$ 可表示为

$$\mathbf{\Omega}_0 = \Omega_{01}\mathbf{i} + \Omega_{02}\mathbf{j} + \Omega_{03}\mathbf{k} \quad (1.2)$$

式中， $\Omega_{01}, \Omega_{02}, \Omega_{03}$ 为 $\mathbf{\Omega}_0$ 的坐标分量，且满足 $\sum_{i=1}^3 \Omega_{0i}^2 = 1$ 。

回转运动群具有以下基本性质：

- (1) $\mathbf{B}(\varphi)\mathbf{\Omega}_0 = \mathbf{\Omega}_0$ ，即回转轴上的矢量回转后仍为自身；
- (2) $\mathbf{B}(0) = \mathbf{E}$ ， $\mathbf{B}(0)\mathbf{R} = \mathbf{ER} = \mathbf{R}$ ， $\mathbf{E}$ 为恒等变换，即幺元；
- (3) $\mathbf{B}^{-1}(\varphi) = \mathbf{B}(-\varphi)$ 为回转运动群的逆元，可描述逆方向回转运动；

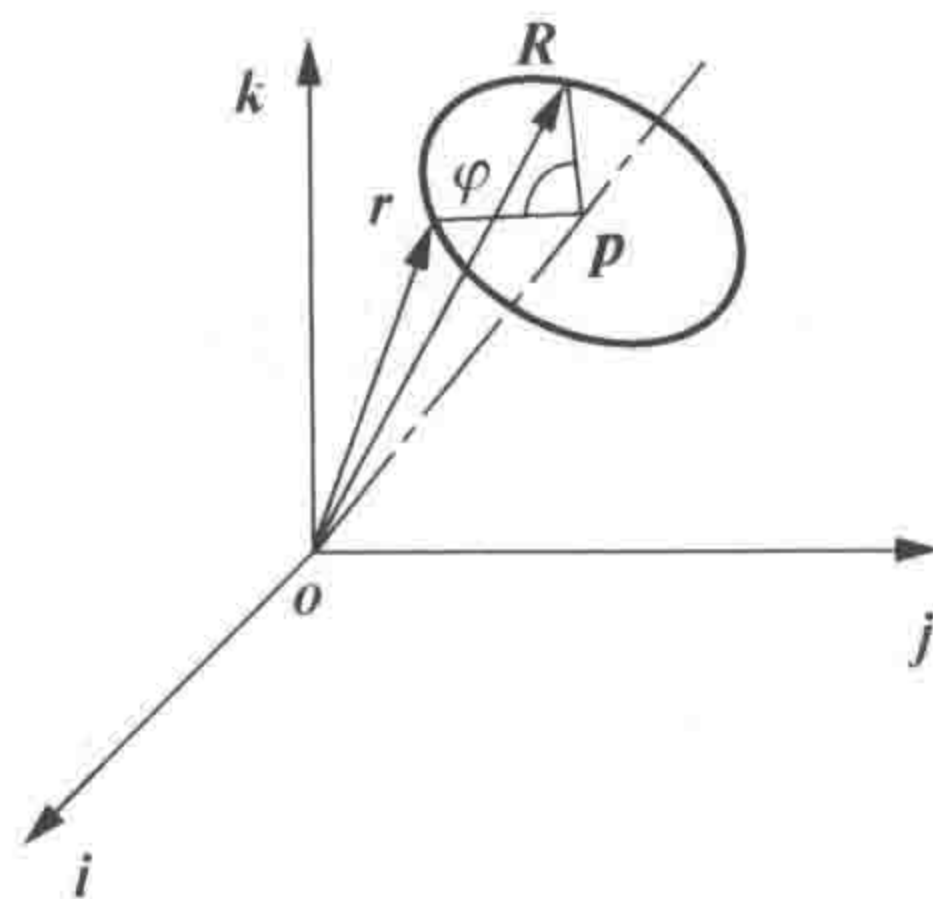


图 1.1 回转运动群

- (4) $[B(\varphi)a] \cdot [B(\varphi)b] = a \cdot b$ ，即两矢量回转前的纯积等于回转后的纯积，特别地， $[B(\varphi)a]^2 = a^2$ ，表明回转运动群仅回转矢量位置而不改变其大小；
- (5) $[B(\varphi)a] \times [B(\varphi)b] = B(\varphi)[a \times b]$ ，即两矢量回转的矢积等于矢积的回转；
- (6) $B(\varphi + \theta) = B(\varphi) \cdot B(\theta)$ ；
- (7) $\frac{dB(\varphi)}{d\varphi} = B(\varphi)\lambda$ ， $\frac{dB^{-1}(\varphi)}{d\varphi} = -B^{-1}(\varphi)\lambda$ ，其中， λ 是一反对称矩阵，其非

零元素是 Ω_0 的坐标分量，即

$$\lambda = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{03} & -\Omega_{02} \\ -\Omega_{03} & 0 & \Omega_{01} \\ \Omega_{02} & -\Omega_{01} & 0 \end{bmatrix}$$

因为 λ 具有重要性质： $\lambda R = \Omega_0 \times R$ 。所以，有

$$\begin{aligned} \frac{dB(\varphi)}{d\varphi} R &= B(\varphi)\lambda R = B(\varphi)(\Omega_0 \times R) = \Omega_0 \times r \\ \frac{dB^{-1}(\varphi)}{d\varphi} R &= -B^{-1}(\varphi)\lambda R = -\Omega_0 \times [B^{-1}(\varphi)R] \end{aligned}$$

2. 回转运动群的矩阵表示法

回转运动群可有多种表示方法，其中，矩阵表示法应用最为广泛。下面就直角坐标系 $\{O, XYZ\}$ 中，矢量 R 绕 Z 轴回转时回转运动群的矩阵表示进行描述。如图 1.2 所示，设坐标轴 X, Y, Z 的单位矢量分别为 i, j, k ，已知矢量 R 绕 Z 轴回转 φ 后成为矢量 r ，则 R, r 的坐标表示分别为

$$R = Xi + Yj + Zk \tag{1.3}$$

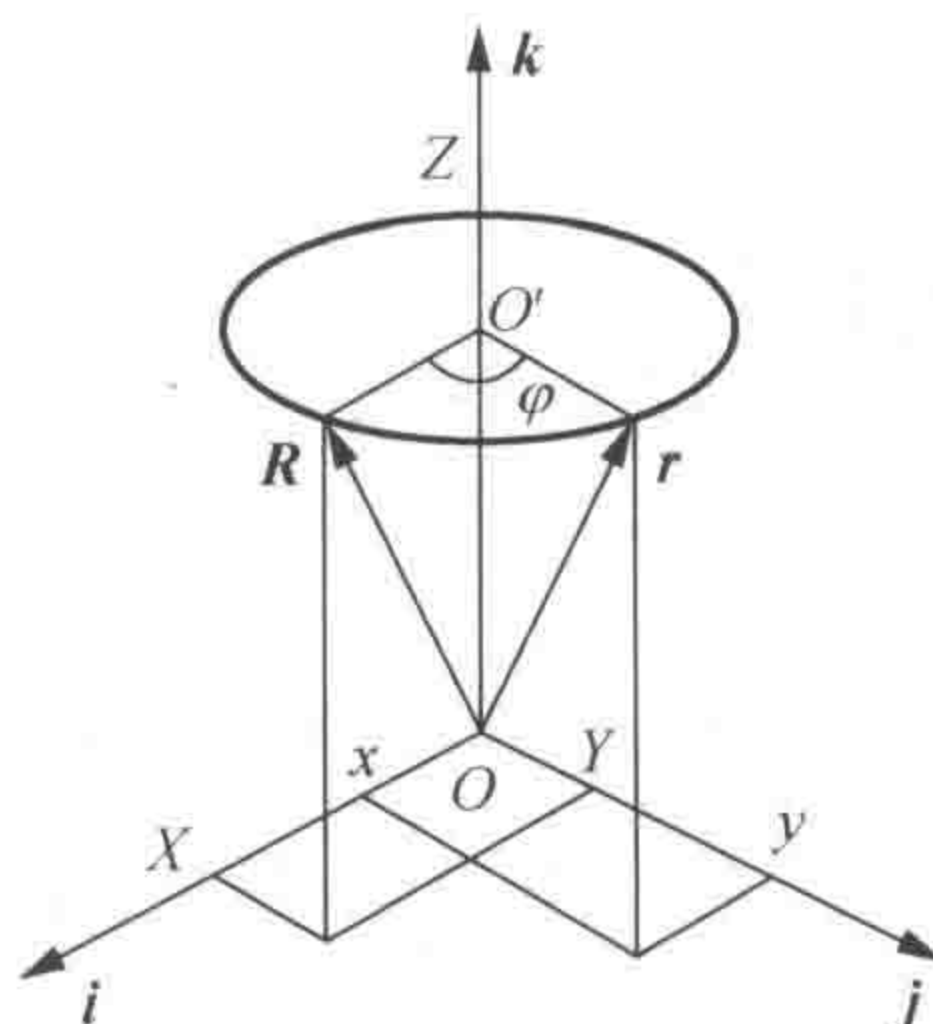


图 1.2 绕 Z 轴回转矢量

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1.4)$$

式中, X, Y, Z 为 $\mathbf{R}$ 的坐标分量; x, y, z 为 $\mathbf{r}$ 的坐标分量。可知

$$\begin{cases} x = X \cos \varphi - Y \sin \varphi \\ y = X \sin \varphi + Y \cos \varphi \\ z = Z \end{cases} \quad (1.5)$$

写成矩阵形式有

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

或可缩写成

$$\mathbf{r} = \mathbf{B}(\varphi)\mathbf{R}$$

式中, $\mathbf{r} = [x, y, z]^T$; $\mathbf{R} = [X, Y, Z]^T$; 而

$$\mathbf{B}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

即为回转运动群的矩阵表示。此时回转轴的单位矢量为 $\boldsymbol{\Omega}_0 = \mathbf{k}$, 据此可知:

$$\mathbf{B}^{-1}(\varphi) = \mathbf{B}(-\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.8a)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.8b)$$

3. 回转运动群的并矢表示法

回转运动群也可以写成如下形式:

$$\mathbf{B}(\varphi) = \mathbf{E} + \sin \varphi (\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{E}) + (1 - \cos \varphi) (\boldsymbol{\Omega}_0 \boldsymbol{\Omega}_0 - \mathbf{E}) \quad (1.9a)$$

或者写成

$$\mathbf{B}(\varphi) = \boldsymbol{\Omega}_0 \boldsymbol{\Omega}_0 + \sin \varphi (\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{E}) + \cos \varphi (\mathbf{E} - \boldsymbol{\Omega}_0 \boldsymbol{\Omega}_0) \quad (1.9b)$$

式中, $\boldsymbol{\Omega}_0 \boldsymbol{\Omega}_0$ 表示并矢式, 注意, 它并不表示两矢量的数量积, 而具有类似矩阵的性质; $\mathbf{E}$ 称为恒等并矢, 具有单位矩阵的性质, 并矢的运算规则见文献[2]。

1.1.2 圆矢量函数

设 $\mathbf{B}(\varphi)$ 表示绕 Z 轴的回转运动群, 如果将 $\mathbf{B}(\varphi)$ 作用于坐标轴 X, Y 的单位矢量 $\mathbf{i}, \mathbf{j}$, 则有

$$\mathbf{B}(\varphi)\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

$$\mathbf{B}(\varphi)\mathbf{j} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

将以上结果分别用 $\mathbf{e}(\varphi), \mathbf{e}_1(\varphi)$ 表示, 则有

$$\mathbf{e}(\varphi) = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j} \quad (1.12)$$

$$\mathbf{e}_1(\varphi) = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j} \quad (1.13)$$

式中, $\mathbf{e}(\varphi), \mathbf{e}_1(\varphi)$ 称为圆矢量函数。可见, 圆矢量函数在本质上与回转运动群是相通的, 但是它表示的是二维平面内的回转运动。圆矢量函数具有以下重要性质:

$$(1) [\mathbf{e}(\varphi)]^2 = [\mathbf{e}_1(\varphi)]^2 = 1;$$

$$(2) \mathbf{e}_1(\varphi) = \mathbf{e}(\varphi + \frac{\pi}{2});$$

$$(3) \mathbf{e}(\varphi) \cdot \mathbf{e}_1(\varphi) = 0, \quad \mathbf{e}(\varphi) \times \mathbf{e}_1(\varphi) = \mathbf{k};$$

$$(4) \mathbf{e}(\theta + \varphi) = \cos(\theta + \varphi)\mathbf{i} + \sin(\theta + \varphi)\mathbf{j} = \cos \theta \mathbf{e}(\varphi) + \sin \theta \mathbf{e}_1(\varphi)$$

$$= \cos \varphi \mathbf{e}(\theta) + \sin \varphi \mathbf{e}_1(\theta),$$

$$\mathbf{e}_1(\theta + \varphi) = -\sin(\theta + \varphi)\mathbf{i} + \cos(\theta + \varphi)\mathbf{j} = -\sin \theta \mathbf{e}(\varphi) + \cos \theta \mathbf{e}_1(\varphi)$$

$$= -\sin \varphi \mathbf{e}(\theta) + \cos \varphi \mathbf{e}_1(\theta);$$

$$(5) \quad \frac{d\mathbf{e}(\varphi)}{d\varphi} = \mathbf{e}_1(\varphi), \quad \frac{d\mathbf{e}_1(\varphi)}{d\varphi} = -\mathbf{e}(\varphi)。$$

1.2 研究曲面的标架方法

活动标架方法是研究现代微分几何学的方法之一。活动标架系指依附于图形的正交单位坐标系。可令标架的原点 p 位于曲面 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ 上, 其中, u, v 为曲面参数, 标架 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 处于该曲面的切平面内, $\mathbf{e}_3$ 为曲面上的单位法矢, 一般可将标架记为 $\{\mathbf{r}(u, v), \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3\}$ 。活动标架方法与回转运动群方法相结合, 可以用来描述标架在所研究曲面上的几何运动和标架随该曲面的机械运动。活动标架在曲面上可以有两类无穷小的运动: 无穷小平移和无穷小回转。这两类无穷小运动同曲面的形状特征密切相关, 因此, 产生了一种将运动学和几何学联系起来的研究方法。

矢径 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ 的微分表达式可以写成

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv \quad (1.14)$$

式中, $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ 分别表示矢径 $\mathbf{r}$ 对 u, v 的偏导矢。可将 $d\mathbf{r}$ 进一步写成以下形式:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 \sigma_1 + \mathbf{e}_2 \sigma_2 \quad (1.15)$$

其中,

$$\begin{cases} \sigma_1 = (\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv) \cdot \mathbf{e}_1 = (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{e}_1) du + (\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{e}_1) dv \\ \sigma_2 = (\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv) \cdot \mathbf{e}_2 = (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{e}_2) du + (\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{e}_2) dv \end{cases} \quad (1.16)$$

式(1.14)和式(1.15)即为标架的无穷小平移表达式。 σ_1, σ_2 表示标架原点在 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 方向的无穷小位移, 即曲面沿 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 方向的弧微分。从解析上看, σ_1, σ_2 又是关于 u, v 的一次微分形式, 显然

$$\sigma^2 = (d\mathbf{r})^2 = (ds)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \quad (1.17)$$

式中, σ 表示曲面上任意方向的弧微分; s 表示弧长。

无穷小回转表达式为

$$\begin{cases} d\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \omega_3 - \mathbf{e}_3 \omega_2 \\ d\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \omega_1 - \mathbf{e}_1 \omega_3 \\ d\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \omega_2 - \mathbf{e}_2 \omega_1 \end{cases} \quad (1.18)$$

式中， $\omega_i (i=1,2,3)$ 具有明确的物理意义，它表示活动标架 $\{\mathbf{r}(u,v), \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3\}$ 瞬时回转角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的分量，即

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}_1 \omega_1 + \mathbf{e}_2 \omega_2 + \mathbf{e}_3 \omega_3 \tag{1.19}$$

其中， $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 也是 u, v 的一次微分形式，可以表示为关于 σ_1, σ_2 的线性组合，即

$$\begin{cases} \omega_1 = -c_{12}\sigma_1 - c_{22}\sigma_2 \\ \omega_2 = c_{11}\sigma_1 + c_{12}\sigma_2 \\ \omega_3 = g_1\sigma_1 + g_2\sigma_2 \end{cases} \tag{1.20}$$

其中，系数 $c_{11}, c_{12}, c_{22}, g_1, g_2$ 为 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 的协变导数，其几何意义如下： c_{11}, c_{22} 分别是曲面在 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 方向的负法曲率； c_{12} 是曲面在 $\mathbf{e}_1$ 方向的负测地挠率； g_1, g_2 为曲面在 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 方向的测地曲率。

上面的五个微分形式 $\sigma_1, \sigma_2, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ 构成了曲面的不变式，其中， σ_1, σ_2 决定曲面的尺度特征； $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 决定曲面的形状特征。

在标架方法中，曲面的法曲率可以表示为

$$k_n = -\frac{\mathbf{dr} \cdot \mathbf{de}_3}{(\mathbf{ds})^2} \tag{1.21}$$

将式 (1.15)、式 (1.17)、式 (1.18) 及式 (1.20) 代入上式可得

$$k_n = -\frac{\sigma_1 \omega_2 - \sigma_2 \omega_1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = -(c_{11} \cos^2 \theta + 2c_{12} \cos \theta \sin \theta + c_{22} \sin^2 \theta) \tag{1.22}$$

式中， $\cos \theta = \sigma_1 / \mathbf{ds} = \sigma_1 / \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ ； $\sin \theta = \sigma_2 / \mathbf{ds} = \sigma_2 / \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ ； θ 为法曲率所在方向与 $\mathbf{e}_1$ 的夹角。

1.3 共轭曲面的基本方程及微分关系式

1.3.1 共轭曲面的基本方程

本章仅讨论固定中心距、定速比、无轴向进给条件下的共轭运动过程。

符号规定：用大写字母表示回转前的诸几何与运动要素，回转后的要素则用对应的小写字母表示。针对两共轭曲面的相同要素，分别冠以上角标“1”“2”以示区别。

设 $\boldsymbol{\Omega}_0^{(1)}, \boldsymbol{\Omega}_0^{(2)}$ 分别表示两回转轴的单位方向矢量， $\boldsymbol{\Omega}^{(1)}, \boldsymbol{\Omega}^{(2)}$ 为回转角速度矢