


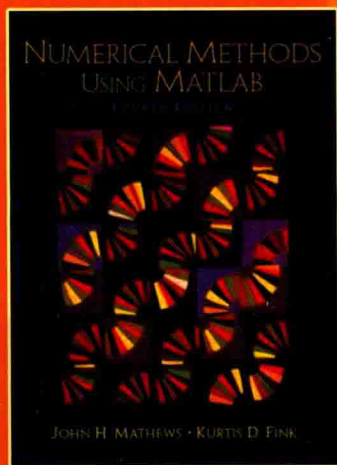
国外计算机科学教材系列

 Pearson

数值方法

(MATLAB版)(第四版)

Numerical Methods Using MATLAB
Fourth Edition



[美] John H. Mathews 著
Kurtis K. Fink

周璐 陈渝 钱方 等译
李晓梅 审校



中国工信出版集团



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
<http://www.phei.com.cn>

国外计算机科学教材系列

数值分析

数值方法

(MATLAB 版) (第四版)

Numerical Methods Using MATLAB

Fourth Edition

[美] John. H. Mathews
Kurtis K. Fink



周璐 陈渝 钱方 等译

李晓梅 审校

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书介绍了数值方法的理论及实用知识,并讲述了如何利用 MATLAB 软件实现各种数值算法,以便为读者今后的学习打下坚实的数值分析与科学计算基础。教师可以根据不同的学习对象和学习目的选择相应章节,形成理论与实践相结合的学习策略。书中每个概念均以实例说明,同时还包含大量习题,范围涉及多个不同领域。通过这些实例进一步说明数值方法的实际应用。本书强调利用 MATLAB 进行数值方法的程序设计,可提高读者的实践能力并加深对数值方法理论的理解。

本书适合作为大专院校计算机、工程和应用数学专业的教材和参考书。

Authorized translation from the English language edition, entitled Numerical Methods Using MATLAB, Fourth Edition, by John H. Mathews, Kurtis D. Fink, Published by Pearson Education, Inc., Copyright © 2004 Pearson Education, Inc.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Pearson Education, Inc.

CHINESE SIMPLIFIED language edition published by PEARSON EDUCATION ASIA LTD., and PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY. Copyright © 2017.

本书中文简体字版专有出版权由 Pearson Education(培生教育出版集团)授予电子工业出版社。未经出版者预先书面许可,不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。

本书封面贴有 Pearson Education(培生教育出版集团)激光防伪标签,无标签者不得销售。

版权贸易合同登记号 图字:01-2004-2242

图书在版编目(CIP)数据

数值方法: MATLAB 版: 第四版/(美)约翰·H. 马修斯(John H. Mathews), (美)柯蒂斯·K. 芬克(Kurtis K. Fink)著;周璐等译. —北京:电子工业出版社,2017.7

书名原文: Numerical Methods Using MATLAB, Fourth Edition

国外计算机科学教材系列

ISBN 978-7-121-31499-5

I. ①数… II. ①约… ②柯… ③周… III. ①算法语言-程序设计-高等学校-教材 IV. ①TP312

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 105129 号

策划编辑: 马 岚

责任编辑: 马 岚

印 刷: 北京京科印刷有限公司

装 订: 北京京科印刷有限公司

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本: 787 × 1092 1/16 印张: 30.25 字数: 774 千字

版 次: 2002 年 7 月第 1 版(原著第 3 版)

2017 年 7 月第 2 版(原著第 4 版)

印 次: 2017 年 7 月第 1 次印刷

定 价: 79.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888, 88258888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式: classic-series-info@phei.com.cn。

前言^①

本书主要介绍数值分析方面的基础知识,适用于数学、计算机、物理及工程专业的本科生。本书要求读者熟悉微积分知识,并接受过结构化编程的训练。本书提供了丰富的教学内容,可以满足一个学期甚至一个学年的课程量,教师们可以根据自己的需要对内容进行适当的剪裁。

对于各个专业领域的学生而言,数值方法都是非常有用的。这一指导思想贯穿于本书的各个章节中,因此本书提供了丰富的范例与典型问题,帮助读者从理论与实践两方面提高数值分析的技能。本书尽可能地以图形和图表形式显示计算结果,以便读者更好地了解数值逼近的效果。本书利用 MATLAB 程序实现数值算法。

本书的重点在于帮助读者理解数值方法如何工作以及有哪些限制。由于需要兼顾理论、误差分析以及可读性,达到这个目标并不容易。在本书中,对每种方法都给出了以微积分基本结论为基础的推导,并进行了适当的误差分析,以使读者易于理解。通过这些学习,读者能够更好地理解微积分知识。采用 MATLAB 编程的计算机习题,为学生提供了锻炼科学计算编程能力的机会。

在本书中,简单的数值练习题可以用计算器或者掌上电脑完成,而较复杂的习题需要借助于 MATLAB 子程序。如何指导学生上机进行数值计算由各个教师完成,他们可以根据现有的计算机资源布置适当的教学任务。本书鼓励使用 MATLAB 子程序库,它们可以帮助学生实现计算机实验题中的数值分析组件。

本书的这个版本在第 5 章最后增加了一节,讨论贝塞尔曲线。对讨论数值优化的第 8 章也进行了扩充,介绍了单变量和多变量最优函数的直接方法和基于导数的方法。

笔者以前认为,无论使用哪种编程语言都可以学习这门课程。但后来笔者发现大多数学生(除计算机专业的学生外)都需要学习新的编程语言。MATLAB 现在已经成为工程和应用数学必不可少的工具,它的最新版本也加强了编程方面的功能。因此笔者希望本书的 MATLAB 程序能使书中的内容更易掌握,使学习更为有效。

致谢

笔者对参与编辑、出版本书各个版本的所有人员表示感谢!笔者(John Mathews)首先要感谢加利福尼亚州立大学富勒顿分校的学生们。同时,感谢我的同事 Stephen Goode, Mathew Koshy, Edward Sabotka, Harris Schultz 和 Soo Tang Tan 在本书第一版中给予的支持;感谢 Russell Egbert, William Gearhart, Ronald Miller 和 Greg Pierce 对本书第二版的建议。笔者还要感谢加

^① 本书由周璐、陈渝、钱方、都志辉、甘四清、周健、谢劲松和王月龙等人翻译。全书由李晓梅教授审校。根据作者在网站上公布的勘误表,中译本已做了相应修改。采用本书作为教材的教师,可联系 te_service@phei.com.cn 获取相关教辅资料。——编者注

利福尼亚州立大学富勒顿分校数学系主任 James Friel 的鼓励。

许多评阅人对本书第一版提出了有效建议,包括兰德学院的 Walter M. Patterson, III, 中康涅狄格州立大学的 George B. Miller, 阿克伦大学的 Peter J. Gingo, 阿拉斯加大学费尔班克斯分校的 Michael A. Freedman, 加利福尼亚大学洛杉矶分校的 Kenneth P. Bube。对于本书的第二版,笔者向罗格斯大学的 Richard Bumby, 美国陆军的 Robert L. Curry, 佛罗里达大学的 Bruce Edwards 以及坦普尔大学的 David R. Hill 致谢。

关于本书的第三版,笔者向乔治梅森大学的 Tim Sauer, 俄克拉荷马大学的 Gerald M. Pitstick 和 Victor De Brunner, 西弗吉尼亚大学的 George Trapp, 阿拉巴马大学亨茨维尔分校的 Tad Jarik, 北卡罗莱纳州立大学的 Jeffrey S. Scroggs, 科罗拉多州立大学的 Kurt Georg 以及南伊利诺伊大学卡本代尔分校的 James N. Craddock 表示感谢。

本书第四版的评阅人是阿克伦大学的 Kevin Kreider, 华盛顿大学圣路易斯分校的 Demetrio Labate, 弗吉尼亚理工学院的 Lee Johnson 和路易斯安娜大学拉法叶分校的 Azmy Ackleh。笔者对这些评阅人所付出的努力和提出的建议,表示深深的感谢。

恳请读者对本书不吝赐教,联系地址如下:

John H. Mathews
Mathematics Department
California State University
Fullerton, CA 92634
mathews@fullerton.edu

Kurtis D. Fink
Department of Mathematics
Northwest Missouri State University
Maryville, MO 64468
kfink@mail.nwmissouri.edu

目 录

第 1 章 预备知识	1	2.2.3 习题	43
1.1 微积分回顾	1	2.2.4 算法与程序	44
1.1.1 极限和连续性	1	2.3 初始近似值和收敛判定准则	44
1.1.2 可微函数	2	2.3.1 检测收敛性	46
1.1.3 积分	4	2.3.2 有问题的函数	47
1.1.4 级数	5	2.3.3 习题	48
1.1.5 多项式求值	6	2.3.4 算法与程序	49
1.1.6 习题	7	2.4 牛顿-拉夫森法和割线法	49
1.2 二进制数	9	2.4.1 求根的斜率法	49
1.2.1 二进制数	9	2.4.2 被零除错误	52
1.2.2 序列与级数	10	2.4.3 收敛速度	53
1.2.3 二进制分数	12	2.4.4 缺陷	54
1.2.4 二进制移位	13	2.4.5 割线法	56
1.2.5 科学计数法	13	2.4.6 加速收敛	57
1.2.6 机器数	13	2.4.7 习题	59
1.2.7 计算机精度	14	2.4.8 算法与程序	61
1.2.8 计算机浮点数	15	2.5 埃特金过程、斯蒂芬森法和	
1.2.9 习题	15	米勒法(选读)	62
1.3 误差分析	17	2.5.1 埃特金过程	62
1.3.1 截断误差	18	2.5.2 米勒法	64
1.3.2 舍入误差	18	2.5.3 方法之间的比较	65
1.3.3 舍去和舍入	19	2.5.4 习题	68
1.3.4 精度损失	19	2.5.5 算法与程序	70
1.3.5 $O(h^n)$ 阶逼近	20	第 3 章 线性方程组 $AX=B$ 的数值解法	71
1.3.6 序列的收敛阶	23	3.1 向量和矩阵简介	71
1.3.7 误差传播	23	3.1.1 矩阵和二维数组	73
1.3.8 数据的不确定性	26	3.1.2 习题	76
1.3.9 习题	26	3.2 向量和矩阵的性质	77
1.3.10 算法与程序	28	3.2.1 矩阵乘	78
第 2 章 非线性方程 $f(x)=0$ 的解法	29	3.2.2 特殊矩阵	79
2.1 求解 $x=g(x)$ 的迭代法	29	3.2.3 非奇异矩阵的逆	79
2.1.1 寻找不动点	30	3.2.4 行列式	79
2.1.2 不动点迭代的图形解释	33	3.2.5 平面旋转	81
2.1.3 考虑绝对误差和相对误差	34	3.2.6 MATLAB 实现	82
2.1.4 习题	35	3.2.7 习题	83
2.1.5 算法与程序	36	3.2.8 算法与程序	84
2.2 定位一个根的分类方法	36	3.3 上三角线性方程组	85
2.2.1 波尔查诺二分法	38	3.3.1 习题	87
2.2.2 试值法的收敛性	41	3.3.2 算法与程序	88

3.4	高斯消去法和选主元	88	4.3.2	精度与 $O(h^{N+1})$	150
3.4.1	选主元以避免 $a_{pp}^{(p)} = 0$	93	4.3.3	MATLAB 实现	151
3.4.2	选主元以减少误差	93	4.3.4	习题	153
3.4.3	病态情况	94	4.3.5	算法与程序	154
3.4.4	MATLAB 实现	95	4.4	牛顿多项式	154
3.4.5	习题	97	4.4.1	嵌套乘法	155
3.4.6	算法与程序	98	4.4.2	多项式逼近、节点和中心	156
3.5	三角分解法	99	4.4.3	习题	160
3.5.1	线性方程组的解	100	4.4.4	算法与程序	161
3.5.2	三角分解法	101	4.5	切比雪夫多项式(选读)	162
3.5.3	计算复杂性	104	4.5.1	切比雪夫多项式性质	162
3.5.4	置换矩阵	105	4.5.2	最小上界	163
3.5.5	扩展高斯消去过程	106	4.5.3	等距节点	164
3.5.6	MATLAB 实现	106	4.5.4	切比雪夫节点	164
3.5.7	习题	108	4.5.5	龙格现象	165
3.5.8	算法与程序	109	4.5.6	区间变换	166
3.6	求解线性方程组的迭代法	111	4.5.7	正交性	167
3.6.1	雅可比迭代	111	4.5.8	MATLAB 实现	168
3.6.2	高斯-赛德尔迭代法	113	4.5.9	习题	169
3.6.3	收敛性	115	4.5.10	算法与程序	170
3.6.4	习题	117	4.6	帕德逼近	170
3.6.5	算法与程序	117	4.6.1	连分式	172
3.7	非线性方程组的迭代法:赛德 尔法和牛顿法(选读)	119	4.6.2	习题	174
3.7.1	理论	120	4.6.3	算法与程序	175
3.7.2	广义微分	121	第5章	曲线拟合	177
3.7.3	接近不动点处的收敛性	122	5.1	最小二乘拟合曲线	177
3.7.4	赛德尔迭代	123	5.1.1	求最小二乘曲线	178
3.7.5	求解非线性方程组的 牛顿法	124	5.1.2	幂函数拟合 $y = Ax^M$	180
3.7.6	牛顿法概要	125	5.1.3	习题	181
3.7.7	MATLAB 实现	126	5.1.4	算法与程序	183
3.7.8	习题	128	5.2	曲线拟合	184
3.7.9	算法与程序	130	5.2.1	$y = Ce^{Ax}$ 的线性化方法	184
第4章	插值与多项式逼近	132	5.2.2	求解 $y = Ce^{Ax}$ 的非线性最小 二乘法	185
4.1	泰勒级数和函数计算	132	5.2.3	数据线性化变换	187
4.1.1	多项式计算方法	136	5.2.4	线性最小二乘法	188
4.1.2	习题	137	5.2.5	矩阵公式	189
4.1.3	算法与程序	139	5.2.6	多项式拟合	190
4.2	插值介绍	140	5.2.7	多项式摆动	191
4.2.1	习题	144	5.2.8	习题	192
4.2.2	算法与程序	144	5.2.9	算法与程序	195
4.3	拉格朗日逼近	145	5.3	样条函数插值	195
4.3.1	误差项和误差界	148	5.3.1	分段线性插值	195
			5.3.2	分段三次样条曲线	196

5.3.3	三次样条的存在性	197	7.4.2	精度测试	274
5.3.4	构造三次样条	198	7.4.3	算法与程序	278
5.3.5	端点约束	199	7.5	高斯-勒让德积分(选读)	278
5.3.6	三次样条曲线的适宜性	203	7.5.1	习题	283
5.3.7	习题	205	7.5.2	算法与程序	284
5.3.8	算法与程序	207	第8章	数值优化	285
5.4	傅里叶级数和三角多项式	208	8.1	单变量函数的极小值	285
5.4.1	三角多项式逼近	212	8.1.1	分类搜索方法	286
5.4.2	习题	214	8.1.2	利用导数求极小值	291
5.4.3	算法与程序	215	8.1.3	习题	298
5.5	贝塞尔曲线	216	8.1.4	算法与程序	300
5.5.1	伯恩斯坦多项式的性质	216	8.2	内德-米德方法和鲍威尔方法	300
5.5.2	贝塞尔曲线的性质	218	8.2.1	内德-米德方法	301
5.5.3	习题	221	8.2.2	鲍威尔方法	304
5.5.4	算法与程序	222	8.2.3	习题	309
第6章	数值微分	223	8.2.4	算法与程序	310
6.1	导数的近似值	223	8.3	梯度和牛顿方法	310
6.1.1	差商的极限	223	8.3.1	最速下降法(梯度方法)	310
6.1.2	中心差分公式	224	8.3.2	牛顿方法	312
6.1.3	误差分析和步长优化	227	8.3.3	习题	318
6.1.4	理查森外推法	230	8.3.4	算法与程序	318
6.1.5	习题	232	第9章	微分方程求解	319
6.1.6	算法与程序	235	9.1	微分方程导论	319
6.2	数值差分公式	236	9.1.1	初值问题	320
6.2.1	更多的中心差分公式	236	9.1.2	几何解释	321
6.2.2	误差分析	237	9.1.3	习题	322
6.2.3	拉格朗日多项式微分	239	9.2	欧拉方法	323
6.2.4	牛顿多项式微分	241	9.2.1	几何描述	325
6.2.5	习题	243	9.2.2	步长与误差	325
6.2.6	算法与程序	244	9.2.3	习题	328
第7章	数值积分	245	9.2.4	算法与程序	329
7.1	积分简介	245	9.3	休恩方法	330
7.1.1	习题	251	9.3.1	步长与误差	331
7.2	组合梯形公式和辛普森公式	253	9.3.2	习题	334
7.2.1	误差分析	255	9.3.3	算法与程序	334
7.2.2	习题	260	9.4	泰勒级数法	335
7.2.3	算法与程序	262	9.4.1	习题	339
7.3	递归公式与龙贝格积分	263	9.4.2	算法与程序	339
7.3.1	龙贝格积分	266	9.5	龙格-库塔方法	340
7.3.2	习题	271	9.5.1	关于该方法的讨论	341
7.3.3	算法与程序	273	9.5.2	步长与误差	342
7.4	自适应积分	273	9.5.3	$N=2$ 的龙格-库塔方法	344
7.4.1	区间细分	274	9.5.4	龙格-库塔-费尔伯格方法	345

9.5.5	习题	349	10.3.4	迭代方法	400
9.5.6	算法与程序	350	10.3.5	泊松方程和亥姆霍茨 方程	403
9.6	预报-校正方法	351	10.3.6	改进	404
9.6.1	亚当斯-巴什福斯-莫尔顿 方法	352	10.3.7	习题	405
9.6.2	误差估计与校正	352	10.3.8	算法与程序	406
9.6.3	实际考虑	353	第 11 章	特征值与特征向量	407
9.6.4	米尔恩-辛普森方法	353	11.1	齐次方程组:特征值问题	407
9.6.5	误差估计与校正	354	11.1.1	背景	407
9.6.6	正确的步长	355	11.1.2	特征值	409
9.6.7	习题	359	11.1.3	对角化	412
9.6.8	算法与程序	361	11.1.4	对称性的优势	413
9.7	微分方程组	361	11.1.5	特征值范围估计	414
9.7.1	数值解	362	11.1.6	方法综述	415
9.7.2	高阶微分方程	363	11.1.7	习题	415
9.7.3	习题	364	11.2	幂方法	416
9.7.4	算法与程序	366	11.2.1	收敛速度	419
9.8	边值问题	368	11.2.2	移位反幂法	419
9.8.1	分解为两个初值问题:线性 打靶法	369	11.2.3	习题	423
9.8.2	习题	372	11.2.4	算法与程序	424
9.8.3	算法与程序	373	11.3	雅可比方法	425
9.9	有限差分方法	373	11.3.1	平面旋转变换	425
9.9.1	习题	378	11.3.2	相似和正交变换	426
9.9.2	算法与程序	379	11.3.3	雅可比变换序列	426
第 10 章	偏微分方程数值解	380	11.3.4	一般步骤	427
10.1	双曲型方程	381	11.3.5	使 d_{pq} 和 d_{qp} 为零	428
10.1.1	波动方程	381	11.3.6	一般步骤小结	429
10.1.2	差分公式	382	11.3.7	修正矩阵的特征值	429
10.1.3	初始值	383	11.3.8	消去 a_{pq} 的策略	430
10.1.4	达朗贝尔方法	383	11.3.9	习题	432
10.1.5	给定的两个确定行	384	11.3.10	算法与程序	433
10.1.6	习题	387	11.4	对称矩阵的特征值	434
10.1.7	算法与程序	388	11.4.1	Householder 法	434
10.2	抛物型方程	388	11.4.2	Householder 变换	436
10.2.1	热传导方程	388	11.4.3	三角形归约	438
10.2.2	差分公式	388	11.4.4	QR 法	439
10.2.3	克兰克-尼科尔森法	391	11.4.5	加速移位	440
10.2.4	习题	395	11.4.6	习题	443
10.2.5	算法与程序	395	11.4.7	算法与程序	443
10.3	椭圆型方程	396	附录 A	MATLAB 简介	445
10.3.1	拉普拉斯差分方程	396	部分习题答案	451	
10.3.2	建立线性方程组	397	中英文术语对照	473	
10.3.3	导数边界条件	399			

第1章 预备知识

假设函数 $f(x) = \cos(x)$, 则它的导数 $f'(x) = -\sin(x)$, 不定积分为 $F(x) = \sin(x) + C$ 。在微积分学中可以学到这些公式, 前者确定函数曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 的斜率 $m=f'(x_0)$, 后者可计算出函数曲线在 $a \leq x \leq b$ 范围下的面积。

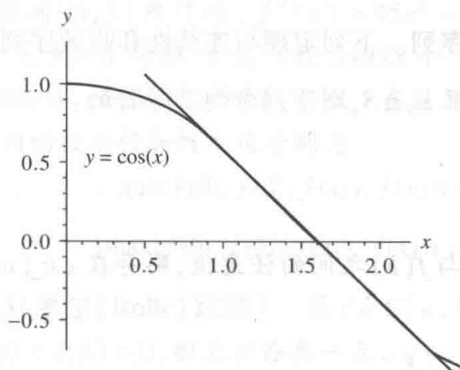
曲线 y 在点 $(\pi/2, 0)$ 的斜率 $m=f'(\pi/2) = -1$, 通过它可找到在这一点处的切线[见图 1.1(a)]:

$$y_{\text{tan}} = m \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + 0 = f' \left(\frac{\pi}{2} \right) \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = -x + \frac{\pi}{2}$$

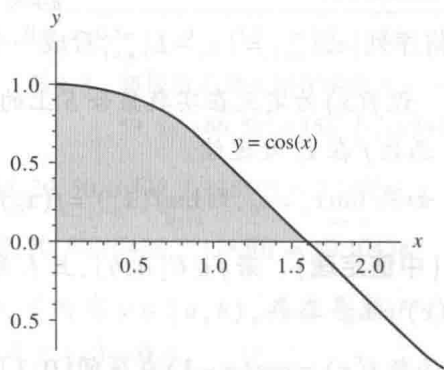
通过积分方法可以计算曲线 y 在 $0 \leq x \leq \pi/2$ 范围下的面积为[见图 1.1(b)]:

$$\text{面积} = \int_0^{\pi/2} \cos(x) dx = F \left(\frac{\pi}{2} \right) - F(0) = \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) - 0 = 1$$

这是在微积分学中需要用到的一些结果。



(a)



(b)

(a) 函数曲线 $y = \cos(x)$ 在点 $(\pi/2, 0)$ 的切线; (b) 函数曲线 $y = \cos(x)$ 在区间 $[0, \pi/2]$ 下的区域

1.1 微积分回顾

本书假定读者具有大学本科的微积分知识, 即熟悉极限、连续性、求导、积分、序列和级数等微积分知识。下面回顾了本书中引用的微积分知识。

1.1.1 极限和连续性

定义 1.1 设 $f(x)$ 为定义在包含 $x = x_0$ 的开区间上的函数, 可能在 $x = x_0$ 处无定义。如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - L| < \epsilon$, 则称函数 f 在 $x = x_0$ 处具有极限 L , 表示为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad (1)$$

当采用 h 增量表达式 $x = x_0 + h$ 时, 上式可以表示为

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = L \quad (2)$$

定义 1.2 设 $f(x)$ 为定义在包含 $x = x_0$ 的开区间上的函数, 如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (3)$$

则称函数 f 在点 $x = x_0$ 处连续。

如果函数 f 在所有 $x \in S$ 上连续, 则称函数 f 在集合 S 上连续。符号 $C^n(S)$ 表示函数 f 自身和它的前 n 阶导数在集合 S 上连续的所有函数 f 的集合。当 S 为区间 $[a, b]$ 时, 则可以用符号 $C^n[a, b]$ 来表示。例如, 若有函数 $f(x) = x^{4/3}$, 其定义域为 $[-1, 1]$, 则显然 $f(x)$ 和 $f'(x) = (4/3)x^{1/3}$ 在区间 $[-1, 1]$ 上连续, 但 $f''(x) = (4/9)x^{-2/3}$ 在 $x = 0$ 处不连续。▲

定义 1.3 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一个无限序列。如果对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在一个正整数 $N = N(\epsilon)$, 使得当 $n > N$ 时有 $|x_n - L| < \epsilon$, 则称序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 具有极限 L , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L \quad (4)$$

当序列有极限时, 则称其为收敛序列。另一个通常使用的表示形式为“当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $x_n \rightarrow L$ ”。上式等价于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - L) = 0 \quad (5)$$

这样, 可将序列 $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty} = \{|x_n - L|\}_{n=1}^{\infty}$ 看成一个误差序列。下列定理与连续性和收敛序列有关。

定理 1.1 设 $f(x)$ 为定义在实数集合 S 上的函数, 且 $x_0 \in S$, 则下列命题是等价的:

- (a) 函数 f 在 x_0 处连续。
- (b) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ 。

定理 1.2 (中值定理) 若 $f \in C[a, b]$, 且 L 为 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意值, 则存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c) = L$ 。

例 1.1 函数 $f(x) = \cos(x - 1)$ 在区间 $[0, 1]$ 内连续, 且常量 $L = 0.8 \in (\cos(0), \cos(1))$ 。函数 $f(x) = 0.8$ 在区间 $[0, 1]$ 的解为 $c_1 = 0.356499$ 。同样, 函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2.5]$ 内连续, 且 $L = 0.8 \in (\cos(2.5), \cos(1))$ 。函数 $f(x) = 0.8$ 在区间 $[1, 2.5]$ 的解为 $c_2 = 1.643502$ 。这两种情况如图 1.2 所示。■

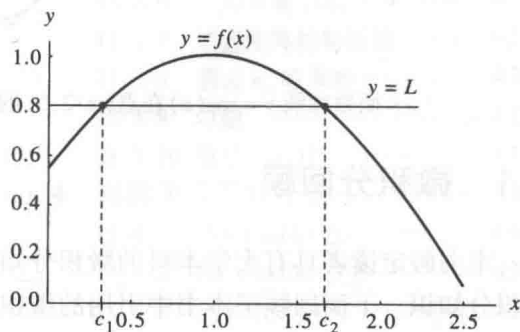


图 1.2 将中值定理运用在函数 $f(x) = \cos(x - 1)$ 上, 区间分别为 $[0, 1]$ 和 $[1, 2.5]$

定理 1.3 (连续函数的极值定理) 设 $f \in C[a, b]$, 则存在下界 M_1 和上界 M_2 , 以及 $x_1, x_2 \in [a, b]$, 满足

$$\text{当 } x \in [a, b] \text{ 时, } M_1 = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M_2 \quad (7)$$

有时也可以将其表示为

$$M_1 = f(x_1) = \min_{a \leq x \leq b} \{f(x)\} \quad \text{和} \quad M_2 = f(x_2) = \max_{a \leq x \leq b} \{f(x)\} \quad (8)$$

1.1.2 可微函数

定义 1.4 设 $f(x)$ 在一个包含 x_0 的开区间内有定义。如果

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (9)$$

存在,则称函数 f 在点 x_0 处可微。如果此极限存在,则记为 $f'(x_0)$,并称之为 f 在点 x_0 处的导数。也可以采用 h 增量表达式来表示此极限:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \quad (10)$$

如果函数在集合 S 上的每一点都存在导数,则称函数在集合 S 上可微。要注意的是,数 $m = f'(x_0)$ 是函数曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线斜率。 ▲

定理 1.4 如果函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处可微,则 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续。

根据定理 1.3,如果函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 内可微,则函数 f 的极值在闭区间的端点,或在开区间 (a, b) 的临界点,即在 $f'(x) = 0$ 的解处取得。

例 1.2 函数 $f(x) = 15x^3 - 66.5x^2 + 59.5x + 35$ 在区间 $[0, 3]$ 内可微。 $f'(x) = 45x^2 - 123x + 59.5 = 0$ 的解为 $x_1 = 0.54955$ 和 $x_2 = 2.40601$ 。如图 1.3 所示,函数 f 在区间 $[0, 3]$ 内的极小值和极大值分别为

$$\min\{f(0), f(3), f(x_1), f(x_2)\} = \min\{35, 20, 50.10438, 2.11850\} = 2.11850$$

和

$$\max\{f(0), f(3), f(x_1), f(x_2)\} = \max\{35, 20, 50.10438, 2.11850\} = 50.10438 \quad \blacksquare$$

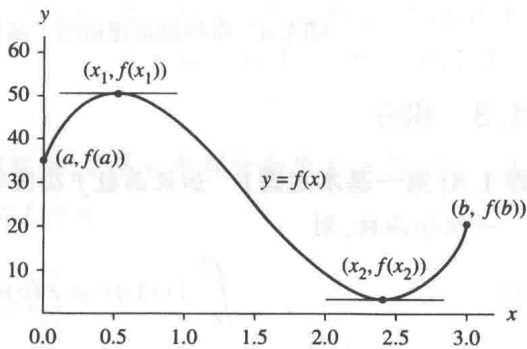


图 1.3 将极值定理运用在函数 $f(x) = 35 + 59.5x - 66.5x^2 + 15x^3$ 上,区间为 $[0, 3]$

定理 1.5 [罗尔 (Rolle) 定理] 设 $f \in C[a, b]$,且对于所有 $x \in (a, b)$,存在导数 $f'(x)$,如果 $f(a) = f(b) = 0$,则至少存在一点 $c \in (a, b)$,满足 $f'(c) = 0$ 。

定理 1.6 (均值定理) 如果 $f \in C[a, b]$,且对于所有 $x \in (a, b)$,存在导数 $f'(x)$,则至少存在一点 $c \in (a, b)$,使得下式成立:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (11)$$

均值定理的几何意义是:函数曲线 $y = f(x)$ 至少存在一点 $(c, f(c))$,其中 $c \in (a, b)$,该点上的切线斜率等于过点 $(a, f(a))$ 和点 $(b, f(b))$ 的割线的斜率。

例 1.3 函数 $f(x) = \sin(x)$ 在闭区间 $[0.1, 2.1]$ 内连续,且在开区间 $(0.1, 2.1)$ 内可微,则根据均值定理,至少存在 c ,满足

$$f'(c) = \frac{f(2.1) - f(0.1)}{2.1 - 0.1} = \frac{0.863209 - 0.099833}{2.1 - 0.1} = 0.381688$$

$f'(c) = \cos(c) = 0.381688$ 在区间 $(0.1, 2.1)$ 上的解为 $c = 1.179174$ 。函数曲线 $f(x)$ 、割线 $y = 0.381688x + 0.099833$ 和切线 $y = 0.381688x + 0.474215$ 如图 1.4 所示。 ■

定理 1.7 (广义罗尔定理) 设 $f \in C[a, b]$, $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ 在开区间 (a, b) 内存在,且 $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ 。如果当 $j = 0, 1, \dots, n$ 时有 $f(x_j) = 0$,则至少存在一点 $c \in (a, b)$,满足 $f^{(n)}(c) = 0$ 。

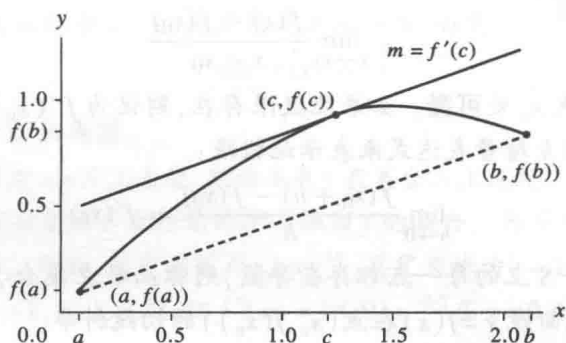


图 1.4 将均值定理运用于函数 $f(x) = \sin(x)$ 上, 区间为 $[0.1, 2.1]$

1.1.3 积分

定理 1.8 (第一基本定理) 如果函数 f 在区间 $[a, b]$ 内连续, 且函数 F 是 f 在区间 $[a, b]$ 内的任一积分函数, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad \text{其中 } F'(x) = f(x) \quad (12)$$

定理 1.9 (第二基本定理) 如果函数 f 在区间 $[a, b]$ 内连续, 且 $x \in (a, b)$, 则

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (13)$$

例 1.4 函数 $f(x) = \cos(x)$ 在区间 $[0, \pi/2]$ 内满足定理 1.9 的假设, 则根据定理的结论可得

$$\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \cos(t) dt = \cos(x^2)(x^2)' = 2x \cos(x^2) \quad \blacksquare$$

定理 1.10 (积分均值定理) 若 $f \in C[a, b]$, 则至少存在一点 $c \in (a, b)$, 满足

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

$f(c)$ 是函数 f 在区间 $[a, b]$ 内的平均值。

例 1.5 函数 $f(x) = \sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x)$ 在区间 $[0, 2.5]$ 内满足定理 1.10 的假设。函数 $f(x)$ 的一个积分函数为 $F(x) = -\cos(x) - \frac{1}{9} \cos(3x)$, 则函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2.5]$ 内的平均值为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2.5-0} \int_0^{2.5} f(x) dx &= \frac{F(2.5) - F(0)}{2.5} = \frac{0.762629 - (-1.111111)}{2.5} \\ &= \frac{1.873740}{2.5} = 0.749496 \end{aligned}$$

方程 $f(c) = 0.749496$ 在区间 $[0, 2.5]$ 内有 3 个解: $c_1 = 0.440566$, $c_2 = 1.268010$ 和 $c_3 = 1.873583$ 。长为 $b - a = 2.5$, 高为 $f(c_j) = 0.749496$ 的矩形区域面积为 $f(c_j)(b - a) = 1.873740$ 。此矩形区域面积值与函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2.5]$ 内的积分值相同。两者区域的比较如图 1.5 所示。 \blacksquare

定理 1.11 (加权积分均值定理) 若 $f, g \in C[a, b]$, 且当 $x \in [a, b]$ 时有 $g(x) \geq 0$, 则至少存在一点 $c \in (a, b)$, 满足

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx \quad (14)$$

例 1.6 函数 $f(x) = \sin(x)$ 和函数 $g(x) = x^2$ 在区间 $[0, \pi/2]$ 内满足定理 1.11 的假设, 则至少存在一点 c , 满足

$$\sin(c) = \frac{\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(x) dx}{\int_0^{\pi/2} x^2 dx} = \frac{1.14159}{1.29193} = 0.883631$$

或 $c = \arcsin(0.883631) = 1.08356$ 。 ■

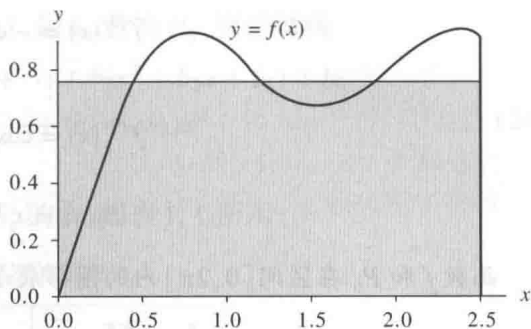


图 1.5 将积分均值定理运用在 $f(x) = \sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x)$ 上, 区间为 $[0, 2.5]$

1.1.4 级数

定义 1.5 设有序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为一个无穷级数, 且第 n 个部分和为 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 。无穷级数收敛当且仅当序列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于极限 S , 可表示为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = S \quad (15)$$

如果级数不收敛, 则称之为级数发散。 ▲

例 1.7 已知无穷序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{n(n+1)} \right\}_{n=1}^{\infty}$, 则第 n 个部分和为

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

因此, 无穷级数的和为

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 \quad \blacksquare$$

定理 1.12 (泰勒定理) 若函数 $f \in C^{n+1}[a, b]$, 且 $x_0 \in [a, b]$, 则对任意 $x \in (a, b)$, 都存在 $c = c(x)$ (c 依赖于 x) 位于 x_0 和 x 之间, 满足

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad (16)$$

其中

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (17)$$

且

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (18)$$

例 1.8 函数 $f(x) = \sin(x)$ 满足定理 1.12 的假设, 则通过将函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的各阶导数值代入式(17), 可得到在 $x_0=0$ 处 $n=9$ 的 n 阶泰勒多项式 $P_n(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x), & f(0) &= 0, \\ f'(x) &= \cos(x), & f'(0) &= 1, \\ f''(x) &= -\sin(x), & f''(0) &= 0, \end{aligned}$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos(x), \quad f^{(3)}(0) = -1,$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$f^{(9)}(x) = \cos(x), \quad f^{(9)}(0) = 1,$$

$$P_9(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

函数 f 和 P_9 在区间 $[0, 2\pi]$ 内的图形表示如图 1.6 所示。

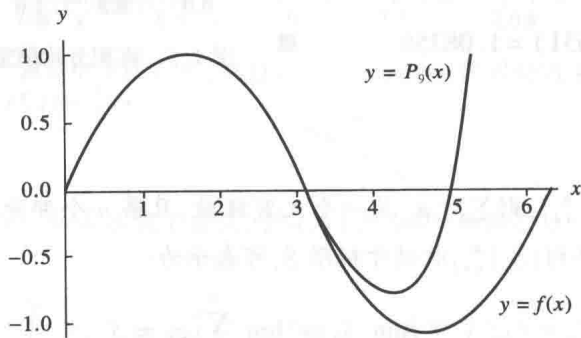


图 1.6 函数 $f(x) = \sin(x)$ 和泰勒多项式 $P_9(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + x^9/9!$ 的图形表示

推论 1.1 如果 $P_n(x)$ 是定理 1.12 中的 n 阶泰勒多项式, 则

$$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (19)$$

1.1.5 多项式求值

设 n 阶多项式 $P(x)$ 有如下形式:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (20)$$

霍纳(Horner)方法^①或综合除法是计算多项式的一种方法, 可将其看成一种嵌套乘法。例如, 一个 5 阶多项式可改写为如下嵌套乘法的形式:

$$P_5(x) = (((a_5 x + a_4) x + a_3) x + a_2) x + a_1) x + a_0$$

定理 1.13 (用于多项式计算的霍纳方法) 设 $P(x)$ 是按式(20)给出的多项式, 且 $x = c$ 是用于计算 $P(c)$ 的数。

设 $b_n = a_n$, 并计算

$$b_k = a_k + c b_{k+1}, \quad k = n-1, n-2, \dots, 1, 0 \quad (21)$$

则 $b_0 = P(c)$ 。进一步考虑, 如果

$$Q_0(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \dots + b_3 x^2 + b_2 x + b_1 \quad (22)$$

则

$$P(x) = (x - c) Q_0(x) + R_0 \quad (23)$$

其中 $Q_0(x)$ 是 $n-1$ 阶多项式的商, $R_0 = b_0 = P(c)$ 是余数。

^① 秦九韶于 1247 年提出此方法, 而霍纳于 1819 年提出同样的方法。——译者注

证明:在式(23)中,用式(22)的右边替换 $Q_0(x)$,用 b_0 替换 R_0 ,则可得到

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-c)(b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \cdots + b_3 x^2 + b_2 x + b_1) + b_0 \\ &= b_n x^n + (b_{n-1} - cb_n)x^{n-1} + \cdots + (b_2 - cb_3)x^2 \\ &\quad + (b_1 - cb_2)x + (b_0 - cb_1) \end{aligned} \quad (24)$$

通过比较式(20)和式(24)中 x^k 的系数,可以确定 b_k 的值,如表 1.1 所示。

表 1.1 用于霍纳方法的系数 b_k

x^k	对比式(20)和式(24)	求解 b_k
x^n	$a_n = b_n$	$b_n = a_n$
x^{n-1}	$a_{n-1} = b_{n-1} - cb_n$	$b_{n-1} = a_{n-1} + cb_n$
\vdots	\vdots	\vdots
x^k	$a_k = b_k - cb_{k+1}$	$b_k = a_k + cb_{k+1}$
\vdots	\vdots	\vdots
x^0	$a_0 = b_0 - cb_1$	$b_0 = a_0 + cb_1$

将 $x=c$ 代入式(22),由于 $R_0 = b_0$,很容易得出结论 $P(c) = b_0$,如下所示:

$$P(c) = (c-c)Q_0(c) + R_0 = b_0 \quad (25)$$

借助于计算机,可以很容易地实现式(21)中计算 b_k 的递归公式。一个简单的算法如下:

```

b(n) = a(n);
for k = n - 1: -1: 0
    b(k) = a(k) + c * b(k + 1);
end

```

当手工计算霍纳方法时,将 $P(x)$ 的系数写在一行,在 a_k 所处的列下方计算 $b_k = a_k + cb_{k+1}$ 则更方便。这一处理过程如表 1.2 所示。

表 1.2 用于综合除法过程的霍纳表

输入	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\cdots	a_k	\cdots	a_2	a_1	a_0
c		xb_n	xb_{n-1}	\cdots	xb_{k+1}	\cdots	xb_3	xb_2	xb_1
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	\cdots	b_k	\cdots	b_2	b_1	$b_0 = P(c)$
									输出

例 1.9 利用综合除法(霍纳方法)求 $P(3)$,其中多项式

$$P(x) = x^5 - 6x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x - 40$$

	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
输入	1	-6	8	8	4	-40
$c = 3$		3	-9	-3	15	57
	1	-3	-1	5	19	$17 = P(3) = b_0$
	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1	输出

因此, $P(3) = 17$ 。

1.1.6 习题

1. (a) 求解 $L = \lim_{n \rightarrow \infty} (4n+1)/(2n+1)$, 确定 $\{\epsilon_n\} = \{L - x_n\}$ 并求解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n$ 。

- (b) 求解 $L = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n^2 + 6n - 1)/(4n^2 + 2n + 1)$, 确定 $\{\epsilon_n\} = \{L - x_n\}$ 并求解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n$ 。
2. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ 的序列。
- (a) 求解式 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(x_n)$ 。
- (b) 求解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(x_n^2)$ 。
3. 根据中值定理, 求解下列函数在指定区间内满足值 L 的数 c 。
- (a) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, 区间为 $[-1, 0]$, $L = 2$ 。
- (b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x - 2}$, 区间为 $[6, 8]$, $L = 3$ 。
4. 根据极值定理, 求解下列函数在指定区间内的上界和下界。
- (a) $f(x) = x^2 - 3x + 1$, 区间为 $[-1, 2]$ 。
- (b) $f(x) = \cos^2(x) - \sin(x)$, 区间为 $[0, 2\pi]$ 。
5. 根据罗尔定理, 求解下列函数在指定区间内的 c 值。
- (a) $f(x) = x^4 - 4x^2$, 区间为 $[-2, 2]$ 。
- (b) $f(x) = \sin(x) + \sin(2x)$, 区间为 $[0, 2\pi]$ 。
6. 根据均值定理, 求解下列函数在指定区间内的 c 值。
- (a) $f(x) = \sqrt{x}$, 区间为 $[0, 4]$ 。
- (b) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$, 区间为 $[0, 1]$ 。
7. 给定区间 $[0, 3]$, 将广义罗尔定理应用于函数 $f(x) = x(x-1)(x-3)$ 。
8. 将第一基本定理应用于下列指定区间内的函数。
- (a) $f(x) = xe^x$, 区间为 $[0, 2]$ 。
- (b) $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$, 区间为 $[-1, 1]$ 。
9. 将第二基本定理应用于下列函数。
- (a) $\frac{d}{dx} \int_0^x t^2 \cos(t) dt$ (b) $\frac{d}{dx} \int_1^{x^3} e^{t^2} dt$
10. 根据积分均值定理, 求解下列函数在指定区间内的 c 值。
- (a) $f(x) = 6x^2$, 区间为 $[-3, 4]$ 。
- (b) $f(x) = x \cos(x)$, 区间为 $[0, 3\pi/2]$ 。
11. 求解下列序列或级数的和。
- (a) $\left\{ \frac{1}{2^n} \right\}_{n=0}^{\infty}$ (b) $\left\{ \frac{2}{3^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)}$ (d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}$
12. 求解下列函数在 x_0 处的 4 阶泰勒多项式。
- (a) $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 1$
- (b) $f(x) = x^5 + 4x^2 + 3x + 1, x_0 = 0$
- (c) $f(x) = \cos(x), x_0 = 0$
13. 设 $f(x) = \sin(x)$, 且 $P(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + x^9/9!$ 。证明 $P^{(k)}(0) = f^{(k)}(0), k = 1, 2, \dots, 9$ 。
14. 利用综合除法(霍纳方法)求解 $P(c)$ 。
- (a) $P(x) = x^4 + x^3 - 13x^2 - x - 12, c = 3$
- (b) $P(x) = 2x^7 + x^6 + x^5 - 2x^4 - x + 23, c = -1$