国外计算机科学教材系列

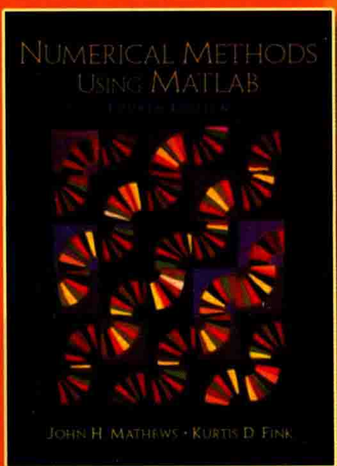
Pearson

数值方法

(MATLAB版)(第四版)

Numerical Methods Using MATLAB

Fourth Edition



[美] John H. Mathews
Kurtis K. Fink 著

周璐 陈渝 钱方 等译

李晓梅 审校

中国工信出版集团

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

国外计算机科学教材系列

数值方法

(MATLAB版)(第四版)

Numerical Methods Using MATLAB

Fourth Edition

[美] John. H. Mathews
Kurtis K. Fink 著

周 璐 陈 渝 钱 方 等译

李晓梅 审校

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内容简介

本书介绍了数值方法的理论及实用知识，并讲述了如何利用 MATLAB 软件实现各种数值算法，以便为读者今后的学习打下坚实的数值分析与科学计算基础。教师可以根据不同的学习对象和学习目的选择相应章节，形成理论与实践相结合的学习策略。书中每个概念均以实例说明，同时还包含大量习题，范围涉及多个不同领域。通过这些实例进一步说明数值方法的实际应用。本书强调利用 MATLAB 进行数值方法的程序设计，可提高读者的实践能力并加深对数值方法理论的理解。

本书适合作为大专院校计算机、工程和应用数学专业的教材和参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数值方法：MATLAB 版：第四版/(美)约翰 · H. 马修斯(John H. Mathews)，(美)柯蒂斯 · K. 芬克(Kurtis K. Fink)著；周璐等译. —北京：电子工业出版社，2017.7

书名原文：Numerical Methods Using MATLAB，Fourth Edition

国外计算机科学教材系列

ISBN 978-7-121-31499-5

I. ①数…　II. ①约… ②柯… ③周…　III. ①算法语言-程序设计-高等学校-教材　IV. ①TP312

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 105129 号

策划编辑：马　岚
责任编辑：马　岚
印　　刷：北京京科印刷有限公司
装　　订：北京京科印刷有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036
开　　本：787 × 1092　1/16　印张：30.25　字数：774 千字
版　　次：2002 年 7 月第 1 版(原著第 3 版)
　　　　　2017 年 7 月第 2 版(原著第 4 版)
印　　次：2017 年 7 月第 1 次印刷
定　　价：79.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010)88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：classic-series-info@phei.com.cn。

前　言[①]

本书主要介绍数值分析方面的基础知识，适用于数学、计算机、物理及工程专业的本科生。本书要求读者熟悉微积分知识，并接受过结构化编程的训练。本书提供了丰富的教学内容，可以满足一个学期甚至一个学年的课程量，教师们可以根据自己的需要对内容进行适当的剪裁。

对于各个专业领域的学生而言，数值方法都是非常有用的。这一指导思想贯穿于本书的各个章节中，因此本书提供了丰富的范例与典型问题，帮助读者从理论与实践两方面提高数值分析的技能。本书尽可能地以图形和图表形式显示计算结果，以便读者更好地了解数值逼近的效果。本书利用 MATLAB 程序实现数值算法。

本书的重点在于帮助读者理解数值方法如何工作以及有哪些限制。由于需要兼顾理论、误差分析以及可读性，达到这个目标并不容易。在本书中，对每种方法都给出了以微积分基本结论为基础的推导，并进行了适当的误差分析，以使读者易于理解。通过这些学习，读者能够更好地理解微积分知识。采用 MATLAB 编程的计算机习题，为学生提供了锻炼科学计算编程能力的机会。

在本书中，简单的数值练习题可以用计算器或者掌上电脑完成，而较复杂的习题需要借助于 MATLAB 子程序。如何指导学生上机进行数值计算由各个教师完成，他们可以根据现有的计算机资源布置适当的教学任务。本书鼓励使用 MATLAB 子程序库，它们可以帮助学生实现计算机实验题中的数值分析组件。

本书的这个版本在第 5 章最后增加了一节，讨论贝塞尔曲线。对讨论数值优化的第 8 章也进行了扩充，介绍了单变量和多变量最优函数的直接方法和基于导数的方法。

笔者以前认为，无论使用哪种编程语言都可以学习这门课程。但后来笔者发现大多数学生（除计算机专业的学生外）都需要学习新的编程语言。MATLAB 现在已经成为工程和应用数学必不可少的工具，它的最新版本也加强了编程方面的功能。因此笔者希望本书的 MATLAB 程序能使书中的内容更易掌握，使学习更为有效。

致谢

笔者对参与编辑、出版本书各个版本的所有人员表示感谢！笔者（John Mathews）首先要感谢加利福尼亚州立大学富勒顿分校的学生们。同时，感谢我的同事 Stephen Goode，Mathew Koshy，Edward Sabotka，Harris Schultz 和 Soo Tang Tan 在本书第一版中给予的支持；感谢 Russell Egbert，William Gearhart，Ronald Miller 和 Greg Pierce 对本书第二版的建议。笔者还要感谢加

① 本书由周璐、陈渝、钱方、都志辉、甘四清、周健、谢劲松和王月龙等人翻译。全书由李晓梅教授审校。根据作者在网站上公布的勘误表，中译本已做了相应修改。采用本书作为教材的教师，可联系 te_service@ phei. com. cn 获取相关教辅资料。——编者注

利福尼亚州立大学富勒顿分校数学系主任 James Friel 的鼓励。

许多评阅人对本书第一版提出了有效建议，包括兰德学院的 Walter M. Patterson，III，中康涅狄格州立大学的 George B. Miller，阿克伦大学的 Peter J. Gingo，阿拉斯加大学费尔班克斯分校的 Michael A. Freedman，加利福尼亚大学洛杉矶分校的 Kenneth P. Bube。对于本书的第二版，笔者向罗格斯大学的 Richard Bumby，美国陆军的 Robert L. Curry，佛罗里达大学的 Bruce Edwards 以及坦普尔大学的 David R. Hill 致谢。

关于本书的第三版，笔者向乔治梅森大学的 Tim Sauer，俄克拉荷马大学的 Gerald M. Pitstick和 Victor De Brunner，西弗吉尼亚大学的 George Trapp，阿拉巴马大学亨茨维尔分校的 Tad Jarik，北卡罗莱纳州立大学的 Jeffrey S. Scroggs，科罗拉多州立大学的 Kurt Georg 以及南伊利诺伊大学卡本代尔分校的 James N. Craddock 表示感谢。

本书第四版的评阅人是阿克伦大学的 Kevin Kreider，华盛顿大学圣路易斯分校的 Demetrio Labate，弗吉尼亚理工学院的 Lee Johnson 和路易斯安娜大学拉法叶分校的 Azmy Ackleh。笔者对这些评阅人所付出的努力和提出的建议，表示深深的感谢。

恳请读者对本书不吝赐教，联系地址如下：

John H. Mathews
Mathematics Department
California State University
Fullerton，CA 92634
mathews@ fullerton. edu

Kurtis D. Fink
Department of Mathematics
Northwest Missouri State University
Maryville，MO 64468
kfink@ mail. nwmissouri. edu

目 录

第1章　预备知识

假设函数$f(x)=\cos(x)$，则它的导数$f'(x)=-\sin(x)$，不定积分为$F(x)=\sin(x)+C$。在微积分学中可以学到这些公式，前者确定函数曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$的斜率$m=f'(x_0)$，后者可计算出函数曲线在$a\leqslant x\leqslant b$范围下的面积。

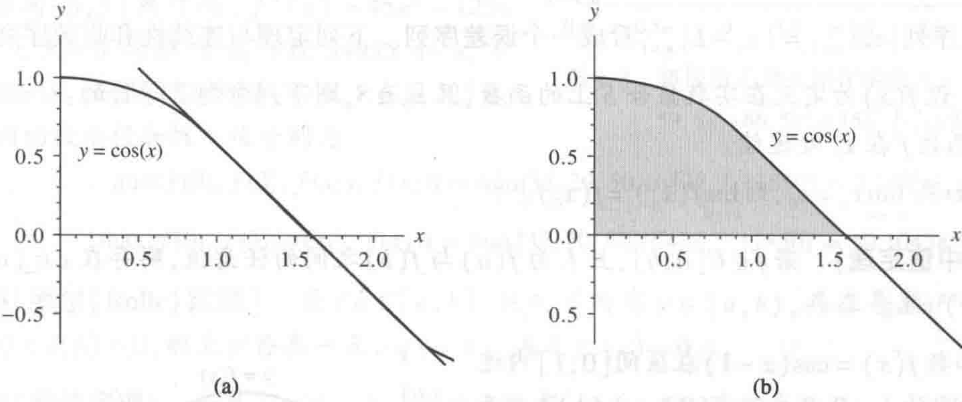
曲线y在点$(\pi/2,0)$的斜率$m=f'(\pi/2)=-1$，通过它可找到在这一点的切线[见图1.1(a)]：

$$y_{\tan}=m\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+0=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-x+\frac{\pi}{2}$$

通过积分方法可以计算曲线y在$0\leqslant x\leqslant\pi/2$范围下的面积为[见图1.1(b)]：

$$\text{面积}=\int_0^{\pi/2}\cos(x)\,dx=F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-0=1$$

这是在微积分学中需要用到的一些结果。



(a) 函数曲线$y=\cos(x)$在点$(\pi/2,0)$的切线；(b) 函数曲线$y=\cos(x)$在区间$[0,\pi/2]$下的区域

1.1　微积分回顾

本书假定读者具有大学本科的微积分知识，即熟悉极限、连续性、求导、积分、序列和级数等微积分知识。下面回顾了本书中引用的微积分知识。

1.1.1　极限和连续性

定义1.1　设$f(x)$为定义在包含$x=x_0$的开区间上的函数，可能在$x=x_0$处无定义。如果对于任意给定的$\epsilon>0$，总存在$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时有$|f(x)-L|<\epsilon$，则称函数f在$x=x_0$处具有**极限**L，表示为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=L\tag{1}$$

当采用h增量表达式$x=x_0+h$时，上式可以表示为

$$\lim_{h\to 0}f(x_0+h)=L\tag{2}$$

▲

定义 1.2 设$f(x)$为定义在包含 $x=x_0$ 的开区间上的函数,如果

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{3}$$

则称函数f**在点 $x=x_0$ 处连续**。

如果函数f在所有 $x \in S$ 上连续,则称函数f在集合 S 上连续。符号 $C^n(S)$表示函数f自身和它的前 n 阶导数在集合 S 上连续的所有函数f的集合。当 S 为区间$[a,b]$时,则可以用符号 $C^n[a,b]$来表示。例如,若有函数$f(x)=x^{4/3}$,其定义域为$[-1,1]$,则显然$f(x)$和$f'(x)=(4/3)x^{1/3}$在区间$[-1,1]$上连续,但$f''(x)=(4/9)x^{-2/3}$在 $x=0$ 处不连续。▲

定义 1.3 设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$为一个无限序列。如果对于任意给定的$\epsilon>0$,总存在一个正整数 $N=N(\epsilon)$,使得当 $n>N$ 时有$|x_n-L|<\epsilon$,则称序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$具有**极限** L,记为

$$\lim_{n \to \infty} x_n = L \tag{4}$$

▲

当序列有极限时,则称其为**收敛序列**。另一个通常使用的表示形式为"当 $n\to\infty$ 时有 $x_n \to L$"。上式等价于

$$\lim_{n \to \infty} (x_n - L) = 0 \tag{5}$$

这样,可将序列$\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}=\{x_n-L\}_{n=1}^{\infty}$看成一个**误差序列**。下列定理与连续性和收敛序列有关。

定理 1.1 设$f(x)$为定义在实数集合 S 上的函数,且 $x_0 \in S$,则下列命题是等价的:

(a) 函数f在 x_0 处连续。

(b) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$,则$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$。 (6)

定理 1.2(中值定理) 若$f \in C[a,b]$,且 L 为$f(a)$与$f(b)$之间的任意值,则存在 $c \in (a,b)$,使得$f(c)=L$。

例 1.1 函数$f(x)=\cos(x-1)$在区间$[0,1]$内连续,且常量 $L=0.8 \in (\cos(0),\cos(1))$。函数$f(x)=0.8$ 在区间$[0,1]$的解为 $c_1=0.356499$。同样,函数$f(x)$在区间$[1,2.5]$内连续,且 $L=0.8 \in (\cos(2.5),\cos(1))$。函数$f(x)=0.8$ 在区间$[1,2.5]$的解为 $c_2=1.643502$。这两种情况如图 1.2 所示。■

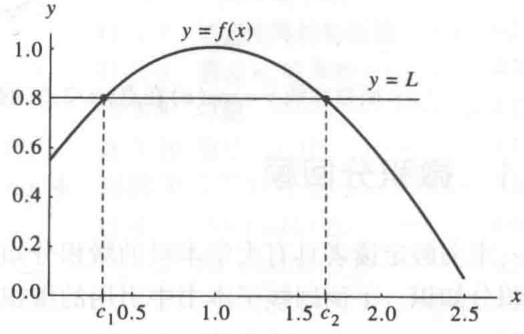


图 1.2 将中值定理运用在函数$f(x)=\cos(x-1)$上,区间分别为$[0,1]$和$[1,2.5]$

定理 1.3(连续函数的极值定理) 设$f \in C[a,b]$,则存在下界 M_1 和上界 M_2,以及 $x_1,x_2 \in [a,b]$,满足

$$\text{当 } x \in [a,b] \text{ 时}, M_1 = f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2) = M_2 \tag{7}$$

有时也可以将其表示为

$$M_1 = f(x_1) = \min_{a \leqslant x \leqslant b} \{f(x)\} \quad \text{和} \quad M_2 = f(x_2) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \{f(x)\} \tag{8}$$

1.1.2 可微函数

定义 1.4 设$f(x)$在一个包含 x_0 的开区间内有定义。如果

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{9}$$

存在,则称函数f在点x_0处**可微**。如果此极限存在,则记为$f'(x_0)$,并称之为f在点x_0处的**导数**。也可以采用h增量表达式来表示此极限:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0) \tag{10}$$

如果函数在集合S上的每一点都存在导数,则称函数在集合S上**可微**。要注意的是,数$m=f'(x_0)$是函数曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$的切线斜率。▲

定理 1.4 如果函数$f(x)$在点$x=x_0$处可微,则$f(x)$在点$x=x_0$处连续。

根据定理1.3,如果函数f在闭区间$[a,b]$内可微,则函数f的极值在闭区间的端点,或在开区间(a,b)的临界点,即在$f'(x)=0$的解处取得。

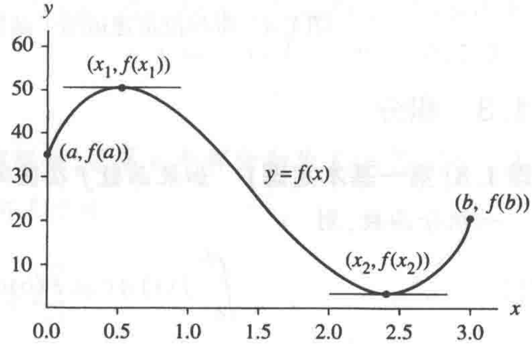


图 1.3 将极值定理运用在函数$f(x)=35+59.5x-66.5x^2+15x^3$上,区间为$[0,3]$

例 1.2 函数$f(x)=15x^3-66.5x^2+59.5x+35$在区间$[0,3]$内可微。$f'(x)=45x^2-123x+59.5=0$的解为$x_1=0.54955$和$x_2=2.40601$。如图1.3所示,函数$f$在区间$[0,3]$内的极小值和极大值分别为

$$\min\{f(0),f(3),f(x_1),f(x_2)\}=\min\{35,20,50.10438,2.11850\}=2.11850$$

和

$$\max\{f(0),f(3),f(x_1),f(x_2)\}=\max\{35,20,50.10438,2.11850\}=50.10438$$ ■

定理 1.5[罗尔(Rolle)定理] 设$f\in C[a,b]$,且对于所有$x\in(a,b)$,存在导数$f'(x)$,如果$f(a)=f(b)=0$,则至少存在一点$c\in(a,b)$,满足$f'(c)=0$。

定理 1.6(均值定理) 如果$f\in C[a,b]$,且对于所有$x\in(a,b)$,存在导数$f'(x)$,则至少存在一点$c\in(a,b)$,使得下式成立:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{11}$$

均值定理的几何意义是:函数曲线$y=f(x)$至少存在一点$(c,f(c))$,其中$c\in(a,b)$,该点上的切线斜率等于过点$(a,f(a))$和点$(b,f(b))$的割线的斜率。

例 1.3 函数$f(x)=\sin(x)$在闭区间$[0.1,2.1]$内连续,且在开区间$(0.1,2.1)$内可微,则根据均值定理,至少存在c,满足

$$f'(c)=\frac{f(2.1)-f(0.1)}{2.1-0.1}=\frac{0.863209-0.099833}{2.1-0.1}=0.381688$$

$f'(c)=\cos(c)=0.381688$在区间$(0.1,2.1)$上的解为$c=1.179174$。函数曲线$f(x)$、割线$y=0.381688x+0.099833$和切线$y=0.381688x+0.474215$如图1.4所示。■

定理 1.7(广义罗尔定理) 设$f\in C[a,b]$,$f'(x)$,$f''(x)$,$\cdots$,$f^{(n)}(x)$在开区间(a,b)内存在,且x_0,x_1,$\cdots$,$x_n\in[a,b]$。如果当$j=0,1,\cdots,n$时有$f(x_j)=0$,则至少存在一点$c\in(a,b)$,满足$f^{(n)}(c)=0$。

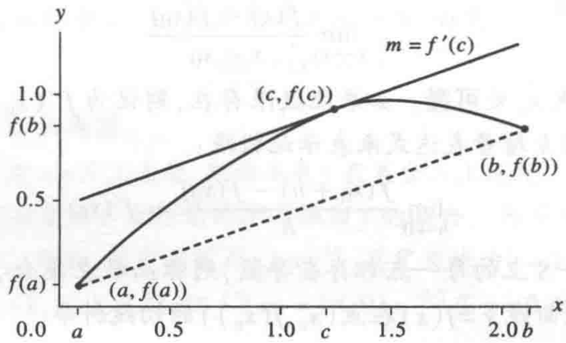


图 1.4 将均值定理运用于函数 $f(x)=\sin(x)$ 上,区间为[0.1,2.1]

1.1.3 积分

定理 1.8(第一基本定理) 如果函数 f 在区间$[a,b]$内连续,且函数 F 是 f 在区间$[a,b]$内的任一积分函数,则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad \text{其中 } F'(x) = f(x) \tag{12}$$

定理 1.9(第二基本定理) 如果函数 f 在区间$[a,b]$内连续,且 $x \in (a,b)$,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x) \tag{13}$$

例 1.4 函数 $f(x)=\cos(x)$ 在区间$[0,\pi/2]$内满足定理 1.9 的假设,则根据定理的结论可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \cos(x^2)(x^2)' = 2x\cos(x^2)$$

■

定理 1.10(积分均值定理) 若 $f \in C[a,b]$,则至少存在一点 $c \in (a,b)$,满足

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)$$

$f(c)$ 是函数 f 在区间$[a,b]$内的平均值。

例 1.5 函数 $f(x)=\sin(x)+\frac{1}{3}\sin(3x)$ 在区间$[0,2.5]$内满足定理 1.10 的假设。函数 $f(x)$ 的一个积分函数为 $F(x)=-\cos(x)-\frac{1}{9}\cos(3x)$,则函数 $f(x)$ 在区间$[0,2.5]$内的平均值为

$$\frac{1}{2.5-0}\int_0^{2.5} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{F(2.5)-F(0)}{2.5} = \frac{0.762629-(-1.111111)}{2.5}$$

$$= \frac{1.873740}{2.5} = 0.749496$$

方程 $f(c)=0.749496$ 在区间$[0,2.5]$内有 3 个解:$c_1=0.440566$,$c_2=1.268010$ 和 $c_3=1.873583$。长为 $b-a=2.5$,高为 $f(c_j)=0.749496$ 的矩形区域面积为 $f(c_j)(b-a)=1.873740$。此矩形区域面积值与函数 $f(x)$ 在区间$[0,2.5]$内的积分值相同。两者区域的比较如图 1.5 所示。 ■

定理 1.11(加权积分均值定理) 若 $f,g \in C[a,b]$,且当 $x \in [a,b]$ 时有 $g(x) \geqslant 0$,则至少存在一点 $c \in (a,b)$,满足

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx \quad (14)$$

例1.6 函数 $f(x)=\sin(x)$ 和函数 $g(x)=x^2$ 在区间 $[0,\pi/2]$ 内满足定理1.11的假设，则至少存在一点 c，满足

$$\sin(c) = \frac{\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(x)\,dx}{\int_0^{\pi/2} x^2\,dx} = \frac{1.14159}{1.29193} = 0.883631$$

或 $c=\arcsin(0.883631)=1.08356$。 ■

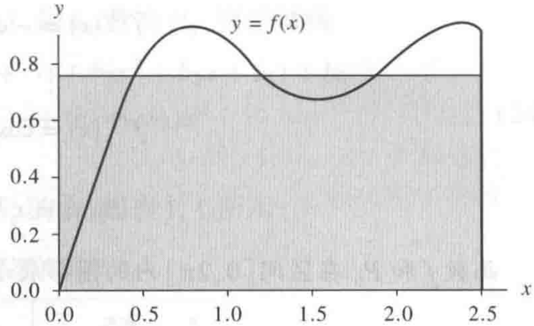


图1.5 将积分均值定理运用在 $f(x)=\sin(x)+\frac{1}{3}\sin(3x)$ 上，区间为 $[0,2.5]$

1.1.4 级数

定义1.5 设有序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为一个无穷级数，且第 n 个部分和为 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$。无穷级数**收敛**当且仅当序列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于极限 S，可表示为

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = S \quad (15)$$

如果级数不收敛，则称之为级数**发散**。 ▲

例1.7 已知无穷序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$，则第 n 个部分和为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

因此，无穷级数的和为

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$ ■

定理1.12(泰勒定理) 若函数 $f\in C^{n+1}[a,b]$，且 $x_0\in[a,b]$，则对任意 $x\in(a,b)$，都存在 $c=c(x)$（c 依赖于 x）位于 x_0 和 x 之间，满足

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x) \quad (16)$$

其中

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad (17)$$

且

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (18)$$

例1.8 函数 $f(x)=\sin(x)$ 满足定理1.12的假设，则通过将函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的各阶导数值代入式(17)，可得到在 $x_0=0$ 处 $n=9$ 的 n 阶泰勒多项式 $P_n(x)$：

$$\begin{aligned} f(x)&=\sin(x), & f(0)&=0,\\ f'(x)&=\cos(x), & f'(0)&=1,\\ f''(x)&=-\sin(x), & f''(0)&=0,\end{aligned}$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos(x), \qquad f^{(3)}(0) = -1,$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$f^{(9)}(x) = \cos(x), \qquad f^{(9)}(0) = 1,$$
$$P_9(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

函数 f 和 P_9 在区间 $[0,2\pi]$ 内的图形表示如图 1.6 所示。■

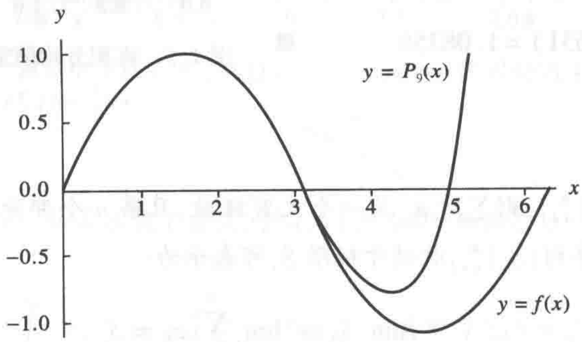


图 1.6 函数 $f(x)=\sin(x)$ 和泰勒多项式 $P_9(x)=x-x^3/3!+x^5/5!-x^7/7!+x^9/9!$ 的图形表示

推论 1.1 如果 $P_n(x)$ 是定理 1.12 中的 n 阶泰勒多项式,则

$$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n \tag{19}$$

1.1.5 多项式求值

设 n 阶多项式 $P(x)$ 有如下形式:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \tag{20}$$

霍纳(Horner)方法[①]**或综合除法**是计算多项式的一种方法,可将其看成一种嵌套乘法。例如,一个 5 阶多项式可改写为如下嵌套乘法的形式:

$$P_5(x) = ((((a_5 x + a_4)x + a_3)x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

定理 1.13(用于多项式计算的霍纳方法) 设 $P(x)$ 是按式(20)给出的多项式,且 $x=c$ 是用于计算 $P(c)$ 的数。

设 $b_n = a_n$,并计算

$$b_k = a_k + c b_{k+1}, \quad k = n-1,\ n-2,\ \cdots,\ 1,\ 0 \tag{21}$$

则 $b_0 = P(c)$。进一步考虑,如果

$$Q_0(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + b_3 x^2 + b_2 x + b_1 \tag{22}$$

则

$$P(x) = (x-c)Q_0(x) + R_0 \tag{23}$$

其中 $Q_0(x)$ 是 $n-1$ 阶多项式的商,$R_0 = b_0 = P(c)$ 是余数。

① 秦九韶于 1247 年提出此方法,而霍纳于 1819 年提出同样的方法。——译者注

证明:在式(23)中,用式(22)的右边替换 $Q_0(x)$,用 b_0 替换 R_0,则可得到

$$\begin{aligned}P(x) &= (x-c)(b_nx^{n-1}+b_{n-1}x^{n-2}+\cdots+b_3x^2+b_2x+b_1)+b_0 \\ &= b_nx^n+(b_{n-1}-cb_n)x^{n-1}+\cdots+(b_2-cb_3)x^2 \\ &\quad +(b_1-cb_2)x+(b_0-cb_1)\end{aligned} \tag{24}$$

通过比较式(20)和式(24)中 x^k 的系数,可以确定 b_k 的值,如表1.1所示。

表1.1 用于霍纳方法的系数 b_k

x^k	对比式(20)和式(24)	求解 b_k
x^n	$a_n=b_n$	$b_n=a_n$
x^{n-1}	$a_{n-1}=b_{n-1}-cb_n$	$b_{n-1}=a_{n-1}+cb_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x^k	$a_k=b_k-cb_{k+1}$	$b_k=a_k+cb_{k+1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x^0	$a_0=b_0-cb_1$	$b_0=a_0+cb_1$

将 $x=c$ 替换入式(22),由于 $R_0=b_0$,很容易得出结论 $P(c)=b_0$,如下所示:

$$P(c)=(c-c)Q_0(c)+R_0=b_0 \tag{25}$$

●

借助于计算机,可以很容易地实现式(21)中计算 b_k 的递归公式。一个简单的算法如下:

```
b(n) = a(n);
for k = n − 1: −1: 0
   b(k) = a(k) + c ∗ b(k + 1);
end
```

当手工计算霍纳方法时,将 $P(x)$ 的系数写在一行,在 a_k 所处的列下方计算 $b_k=a_k+cb_{k+1}$ 则更方便。这一处理过程如表1.2所示。

表1.2 用于综合除法过程的霍纳表

输入	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_k	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
c		xb_n	xb_{n-1}	$\cdots$	xb_{k+1}	$\cdots$	xb_3	xb_2	xb_1
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	$\cdots$	b_k	$\cdots$	b_2	b_1	$b_0=P(c)$
									输出

例1.9 利用综合除法(霍纳方法)求 $P(3)$,其中多项式

$$P(x)=x^5-6x^4+8x^3+8x^2+4x-40$$

	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
输入	1	−6	8	8	4	−40
$c=3$		3	−9	−3	15	57
	1	−3	−1	5	19	$17=P(3)=b_0$
	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1	输出

因此,$P(3)=17$。 ■

1.1.6 习题

1. (a) 求解 $L=\lim_{n\to\infty}(4n+1)/(2n+1)$,确定 $\{\epsilon_n\}=\{L-x_n\}$ 并求解 $\lim_{n\to\infty}\epsilon_n$。

(b) 求解 $L=\lim_{n\to\infty}(2n^2+6n-1)/(4n^2+2n+1)$,确定 $\{\epsilon_n\}=\{L-x_n\}$ 并求解 $\lim_{n\to\infty}\epsilon_n$。

2. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是满足 $\lim_{n\to\infty}x_n=2$ 的序列。

(a) 求解式 $\lim_{n\to\infty}\sin(x_n)$。

(b) 求解 $\lim_{n\to\infty}\ln(x_n^2)$。

3. 根据中值定理,求解下列函数在指定区间内满足值 L 的数 c。

(a) $f(x)=-x^2+2x+3$,区间为$[-1,0]$,$L=2$。

(b) $f(x)=\sqrt{x^2-5x-2}$,区间为$[6,8]$,$L=3$。

4. 根据极值定理,求解下列函数在指定区间内的上界和下界。

(a) $f(x)=x^2-3x+1$,区间为$[-1,2]$。

(b) $f(x)=\cos^2(x)-\sin(x)$,区间为$[0,2\pi]$。

5. 根据罗尔定理,求解下列函数在指定区间内的 c 值。

(a) $f(x)=x^4-4x^2$,区间为$[-2,2]$。

(b) $f(x)=\sin(x)+\sin(2x)$,区间为$[0,2\pi]$。

6. 根据均值定理,求解下列函数在指定区间内的 c 值。

(a) $f(x)=\sqrt{x}$,区间为$[0,4]$。

(b) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$,区间为$[0,1]$。

7. 给定区间$[0,3]$,将广义罗尔定理应用于函数 $f(x)=x(x-1)(x-3)$。

8. 将第一基本定理应用于下列指定区间内的函数。

(a) $f(x)=xe^x$,区间为$[0,2]$。

(b) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$,区间为$[-1,1]$。

9. 将第二基本定理应用于下列函数。

(a) $\frac{d}{dx}\int_0^x t^2\cos(t)\,dt$ (b) $\frac{d}{dx}\int_1^{x^3} e^{t^2}\,dt$

10. 根据积分均值定理,求解下列函数在指定区间内的 c 值。

(a) $f(x)=6x^2$,区间为$[-3,4]$。

(b) $f(x)=x\cos(x)$,区间为$[0,3\pi/2]$。

11. 求解下列序列或级数的和。

(a) $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ (b) $\left\{\dfrac{2}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+1)}$ (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}$

12. 求解下列函数在 x_0 处的 4 阶泰勒多项式。

(a) $f(x)=\sqrt{x}$,$x_0=1$

(b) $f(x)=x^5+4x^2+3x+1$,$x_0=0$

(c) $f(x)=\cos(x)$,$x_0=0$

13. 设 $f(x)=\sin(x)$,且 $P(x)=x-x^3/3!+x^5/5!-x^7/7!+x^9/9!$。证明 $P^{(k)}(0)=f^{(k)}(0)$,$k=1,2,\cdots,9$。

14. 利用综合除法(霍纳方法)求解 $P(c)$。

(a) $P(x)=x^4+x^3-13x^2-x-12$, $c=3$

(b) $P(x)=2x^7+x^6+x^5-2x^4-x+23$, $c=-1$