普通高等教育"十三五"规划教材

实变函数与泛函分析

曹怀信　张建华　陈峥立　郭志华　编

科学出版社

普通高等教育"十三五"规划教材

实变函数与泛函分析

曹怀信　张建华　陈峥立　郭志华　编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书包括集合论基础、$\mathbf{R}^n$中的点集理论、测度理论、可测函数、勒贝格积分论、空间理论、巴拿赫空间上的有界线性算子理论、非线性算子等内容.

本书内容深入浅出、层次分明, 理论体系严谨、逻辑推导详尽, 既可作为高等师范院校实变函数与泛函分析教材, 也可作为工程技术人员及其他感兴趣读者的参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

实变函数与泛函分析/曹怀信等编. —北京: 科学出版社, 2017.8
普通高等教育“十三五”规划教材
ISBN 978-7-03-053867-3

Ⅰ. ①实… Ⅱ. ①曹… Ⅲ. ①实变函数-高等学校-教材②泛函分析-高等学校-教材 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 146522 号

责任编辑: 王胡权 / 责任校对: 彭 涛
责任印制: 吴兆东 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 8 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2017 年 8 月第一次印刷 印张: 22 1/2
字数: 454 000
定价: 49.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

数是表达各种量的基本数学工具, 函数是表述与研究各种数量关系的基本数学工具. 简单的量 (如人的体重) 可用一个数表示. 要把与同一对象有关的多个量 (如职工的工资情况) 同时表示出来就要用到多个数, 即一组数. 这便促使人们开始研究由所有 n 元数组 (n 维向量) 构成的集合 $\mathbf{R}^n$ 并在其中定义运算、内积、长度等概念, 形成了 n 维欧氏空间理论. 为了将同一范围内的多个对象的多个量 (如某厂的职工工资情况) 同时表达出来, 就需要用到多个数组. 这就产生了矩阵的概念, 它是线性代数研究的主要对象之一.

一元函数用来研究简单变量 (如圆盘的半径与面积) 之间的关系; 多个变量与一个变量 (如长方体的长、宽、高与体积) 之间的关系要用多元函数来表示. 要表述与研究多个变量与多个变量之间的关系 (如平面坐标变换) 就要使用映射或算子的概念了.

研究各种数量关系是数学学科的基本目标. 因而, 函数及其推广就成为整个分析数学研究的主要对象. 数学分析的主要研究对象是连续函数, 复变函数论研究的是解析函数, 实变函数的研究对象是比连续函数更广泛的一类函数——可测函数. 推广黎曼积分、建立勒贝格积分是实变函数论课程的中心任务.

函数的微分与积分是数学分析的核心内容. 一元函数的定积分与多元函数的重积分统称为黎曼积分, 简称为 R-积分, 它在几何学、物理学及其他学科中有着广泛而有效的应用. 然而, R-积分也有许多的不足. 首先, 从使用范围上讲, R-积分基本上只适用于连续函数, 间断点太多的函数没有 R-积分 (即不是 R-可积的). 其次, R-积分与极限的关系不够协调 (极限与积分交换次序要求一致收敛性). 另外, R-积分并不是微分的理想的逆运算. 所以, 建立对函数要求更低、使用范围更广、运算更灵活的新的积分理论就显得十分必要了. 勒贝格积分理论应运而生, 它是实变函数论的中心内容.

黎曼积分的核心思想是分割、求和、取极限. 分割是指将函数的定义域分成有限个可以度量 (有长度、面积、体积) 的小部分; 求和是指在每个小部分上任取一点并求出函数在该点的函数值, 再乘以小部分的度量, 然后求和 (称为黎曼和); 取极限是指求出当小部分的最大直径趋于 0 时黎曼和的极限. 可见, 分割是建立黎曼积分的基础. 因此, 要推广黎曼积分, 就要从推广分割的方式入手. 为了使得新积分适用更多的函数, 需要将函数的定义域分成一些小部分, 使得函数在每个小部分上的函数值变化不大, 还要求这些小部分具有某种 “度量”, 称为 “测度”, 它是长度、

面积、体积概念的自然推广; 有测度的点集称为 "可测集". 其次, 还要放松对被积函数的连续性质的要求, 但有某种 "可度量性". 这种函数就是所谓的 "可测函数". 由于新积分的积分域为一般的可测集且函数的可测性要用有关点集的可测性来刻画, 所以, 集合特别是 $\mathbf{R}^n$ 中的点集理论, 将是整个实变函数论的基础. 这就决定了实变函数论课程的主要内容为: 集合理论、点集理论、测度理论、可测函数理论及勒贝格积分理论.

在集合理论部分, 我们认为集合就是若干事物的全体, 关于集合的公理化定义, 参见文献 [1]. 在回顾集合的基本运算 (交、并、差、余) 的基础上, 将交与并的运算推广到任意多个集合, 介绍集合的乘积运算, 并引入一列集合的上极限、下极限与极限. 为了比较两个无限集合的元素的多少, 将引入集合的 "基数" 这一概念, 它提供了比较两个无限集合的有力工具. 在 $\mathbf{R}^n$ 中的点集理论部分, 我们回顾并扩大数学分析中已经学过的开集、闭集的概念, 引入完备集、紧集、F_σ 型集、G_δ 型集及博雷尔集等重要集类, 并建立开集的构造定理. 在可测集与测度理论部分, 先介绍勒贝格外测度, 进而定义并研究可测集及其测度理论, 建立可测集的构造定理. 在可测函数理论一章中, 首先引入 "简单函数" 的概念 (分部常值函数), 利用简单函数列的极限引入可测函数的概念, 研究它们的一系列重要性质, 讨论可测函数与连续函数的关系 (鲁金定理); 引入可测函数列的 "几乎处处收敛性" 与 "依测度收敛性", 建立若干重要的 "关系定理", 包括里斯定理与叶果洛夫定理. 引入勒贝格积分的传统方法有两种: "上下积分法"[2,3] 与 "简单函数法"[4,5]. 前一种方法的优点是与黎曼积分作类比, 能体现实变函数论与数学分析的联系, 但其缺点是: 通常的数学分析教材并没有应用上下积分定义黎曼积分; 后一种方法的优点是体现了简单函数的逼近作用, 其缺点是: 步骤太多, 相同形式的定理多次出现. 两种方法的共同不足是: 没有很好地应用勒贝格测度引入并研究勒贝格积分的性质. 为了克服这些不足, 我们提出一种定义勒贝格积分的新方法——下方图形法. 首先, 对于可测集 $E \subset \mathbf{R}^n$ 上的非负可测函数 f, 证明函数 f 的下方图形 $G(f,E)$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的勒贝格可测集; 然后, 定义函数 f 的勒贝格积分为 $G(f,E)$ 的勒贝格测度; 利用测度的性质, 证明这种新的定义与传统定义是等价的. 这种新定义不仅使得勒贝格积分具有非常明显的几何意义, 而且使得莱维渐升列定理、关于积分域的可数可加性定理等重要结论都成为测度与极限换序定理的直接推论.

勒贝格测度理论与勒贝格积分理论的诞生, 不仅克服了黎曼积分在使用范围与运算灵活性等方面的不足, 而且也为泛函分析、傅里叶分析、概率论等数学分支奠定了理论基础. 时至今日, 实变函数论的思想与方法已渗透到数学的许多分支, 它与傅里叶变换、遍历理论、积分方程理论、积分变换理论之间有着紧密的联系. 基数提供了比较两个无穷集合的重要工具, 以此为工具, 可以证明: 自然数与有理数其实是 "一样多的", 但远远 "少于" 无理数. 测度论给出了点集的定量描述, 从

此出发研究数学分析中的许多基本概念, 得到了极为深刻的结果. 例如, 可以证明: 闭区间上的有界函数黎曼可积的充分必要条件是其间断点之集测度为零. 除此以外, 实变函数论还用于微分方程定性理论、动力系统、解析函数的边值问题等诸多方面.

由此可见, 实变函数论有着广泛而深刻的应用, 的确是数学学科的一个重要分支, 它在各数学分支的应用成了近代数学的一个特征. 因此, 凡是想了解近代数学的人, 都应当认真学习与掌握实变函数论这门课程. 数学分析以极限为工具研究连续函数, 复变函数论以积分为工具研究解析函数, 实变函数论则是以集合论为基础研究可测函数. 因此, 要学好实变函数论, 就要充分灵活地运用集合论的方法与技巧. 实变函数论, 就像平面几何学一样, 属于一门理论数学 (纯粹数学), 理论证明多, 计算问题少. 而且, 许多问题的证明都是构造性的, 并没有现成的公式、例题或模式可以套用. 这正是学好本课程的困难之所在.

泛函分析是研究无穷维线性空间及其上的泛函与算子的一门分析数学. 它是现代数学中的一个较新的重要分支. 泛函分析的基本概念与方法起源于经典数理过程中的一些变分问题、边值问题, 概括了经典数学分析与函数论中的某些重要概念、问题与结果. 量子力学、现代工程技术与现代力学的深刻影响, 使得这门新兴学科迅速发展. 从 20 世纪中叶开始, 偏微分方程理论、概率论、计算数学, 由于运用了泛函分析的方法与结果得到大发展. 它综合运用分析、代数、几何与拓扑的方法与观点, 研究分析数学、现代物理、现代工程技术中出现的许多重要理论问题, 有着广泛而有效的应用. 现在, 泛函分析的概念与方法已经渗透到现代纯粹数学与应用数学、理论物理及现代工程技术理论的许多分支, 例如, 微分方程、概率论、逼近论、抽象调和分析、计算数学、量子力学、统计物理、现代控制论与系统论、最优化理论与大范围微分几何、量子信息与量子计算等.

泛函分析大体可分为三大部分: 一是空间理论, 包括距离空间、赋范线性空间、希尔伯特空间及一般的拓扑线性空间理论; 二是算子理论, 包括线性算子理论与非线性算子理论; 三是算子代数, 包括巴拿赫代数、C*-代数、冯 · 诺依曼 (von Neumann) 代数等. 由于泛函分析内容之丰富, 不可能用一本专门的书将全部内容都写出来. 最近几年, 国内已有许多供本科生与研究生使用的泛函分析教材. 但在写法上大都是以传统的公理体系为基础的推理与演绎. 为了使学生了解问题的来源与背景, 养成研究性学习的良好习惯, 并培养学生分析问题与解决问题的能力, 我们力求从一些问题中提炼出泛函分析的基本概念与问题, 在讨论有关概念的属性时, 先说明要解决什么问题, 在问题的分析当中逐步引入适当的概念, 再加上适当的条件, 最后给出合理的叙述, 证明便蕴涵在分析之中了. 这样或许能使读者不仅学到泛函分析的基本理论, 而且更重要的是领悟到研究问题与解决问题的方法与技巧.

除了采用研究性、分析式教学法之外, 考虑到篇幅的限制, 我们削减了“希尔伯特空间上算子理论”与“算子谱论”的内容, 增添了“非线性算子”一章. 旨在使读者了解一些具有广泛应用的非线性泛函分析的简单概念、方法与结论, 同时又能看到微积分中关于函数的一些概念如何推广到一般的抽象函数乃至非线性算子. 为了便于读者阅读英文文献, 我们在有关重要数学名词后面加上了该名词的英文.

在本书的编写过程中, 我们力图进行以下几个方面的尝试. 第一, 利用“分析式讲解法”. 该方法强调: 先提出要讨论的问题, 经过分析, 引入适当的概念 (定义), 以确定所研究的对象范围; 在分析过程中, 增加适当假设 (条件), 以获得需要的结论; 最后, 再将所得到的结论用定理或命题形式表述出来. 第二, 利用“下方图形法”定义非负可测函数的勒贝格积分. 第三, 讨论了平面图形的面积与测度的关系、黎曼重积分及广义积分 (无穷积分、瑕积分) 与勒贝格积分的关系. 第四, 精选例题与习题. 在概念与定理之后, 选配适量例题, 以说明有关概念与定理的使用方法. 每小节之后安排适量习题, 易、中、难习题分级设置, 较难习题分成几个步骤给出, 各章后选配适量综合练习题.

本书是在陕西师范大学 211 重点建设项目的资助下完成的, 并得到了陕西师范大学数学与信息科学学院领导与教师的大力支持. 本书的成功出版, 也归功于科学出版社同志们的辛勤工作. 在此深表谢意.

由于编者水平所限, 疏漏与不妥之处在所难免. 还望读者多提宝贵意见.

编 者

2017 年 3 月

目　录

第 1 章　集合论基础

集合理论是现代数学的重要基础, 集合论技巧与极限理论相结合, 形成了实变函数论的重要基础与鲜明特征. 集合论是 19 世纪 70 年代由德国数学家康托尔 (Cantor) 创立的, 它建立在一种无限观——“实无限” 的基础上. 所谓 “实无限”, 就是把 “无限” 作为一个已经完成了的观念实体来看待. 例如, 在集合论中, 用 $\mathbf{N} = \{n\colon n$ 是自然数$\}$表示全体自然数的集合就是如此. 需要指出的是, 在此之前的几千年数学发展史中, 占主导地位的是另一种无限观, 即古希腊哲学家亚里士多德所主张的 “潜无限” 观念. 所谓 “潜无限”, 就是把 “无限” 作为一个不断发展着的、永远无法完成的过程来看待. 例如, 把自然数看成一个不断延伸的无穷无尽的序列

$$0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$$

就是如此.

集合论的产生是数学观念和数学方法上的一次革命性变革. 由于它在解释旧的数学理论和发展新的数学理论方面都极为重要, 因而逐渐为许多数学家所接受. 然而, 在康托尔创立集合论不久, 他自己就发现了问题, 这就是 1899 年的 “康托尔悖论”, 亦称 “最大基数悖论”. 与此同时, 历史上还有其他集合悖论, 最著名的是 1901 年的 “罗素 (Russell) 悖论”[1].

本章介绍集合论的基本概念、基本方法与基本理论, 为以后各章的讨论打好基础.

1.1　集合及其运算

1.1.1　集合的概念

什么是集合呢? 集合 (Set) 是现代数学的一个最基本概念, 它的严格定义需要用公理系统给出, 参见文献 [1]. 集合论创始人康托尔给出了集合的一个朴素的概念: 集合就是 “我们察觉到的或在我们思维中的一些确定的不同事物的全体, 这些事物称为集合的元素”. 简单地说, 集合是指 “**若干确定事物的全体**”. 这种说法, 只是对集合这一概念的描述, 并不是严格的数学定义. 因为 “全体” 并不比 “集合” 更好理解. 本书只需采用这种描述性的说法, 把若干确定事物的全体称为一个**集合**, 这些事物称为这个集合的**元素**(Element). 例如, 全体自然数组成一集合; 区间 $[a, b]$ 上的全体连续函数组成一个集合; 某教室里的学生组成一个集合; 等等.

集合简称**集**, 通常用大写字母 A, B, C, D 等表示, 而用小写字母 x, y, a, b 等表示集合的元素. 若 x 是集 A 的元素, 则记为 $x \in A$, 读作 "x**属于**A"; 若 x 不是集 A 的元素, 则记为 $x \notin A$, 读作 "x**不属于**A".

若集 A 的每一元素都是集 B 的元素, 则称 A 是 B 的**子集**(Subset), 记为 $A \subset B$, 读作 "A**包含于**B" 或 "B**包含**A". 若 A 是 B 的子集, 而 B 中至少有一个元素不属于 A, 则称 A 是 B 的**真子集**(Proper subset).

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 即 A 与 B 所含的元素完全相同, 则称 A**等于**(Equals to)B, 记为 $A = B$.

为了运算的方便, 引进 "空集" 的概念. 把不含任何元素的集合称为**空集**(Empty set), 记为 $\varnothing$. 引进空集也是因为有时人们事先对于满足某种性质的元素是否存在并不了解, 而需要谈论这种元素之集. 例如, 方程 $x^2 + 1 = 0$ 的全体实根之集就是空集. 显然, 空集是任意集合的子集.

1.1.2　集合的表示

通常表示集合有两种方法: 列举法和描述法.

1. 列举法

就是指将集合中的全部元素按照一定的规律排列出来, 并用括号{}把它们括起来. 例如, 由 -1 及 1 组成的集合 S 可表示为 $S = \{-1, 1\}$. 列举法只适用于集合中只有有限个元素, 或者集合中的元素可按某种方式排成有规律的序列. 例如, 全体自然数之集 $\mathbf{N}$ 可表为

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\};$$

全体整数之集 $\mathbf{Z}$ 可表为

$$\mathbf{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, \cdots, -n, n, \cdots\},$$

也可表示为

$$\mathbf{Z} = \{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\};$$

全体正整数之集 $\mathbf{Z}^+$ 可表为

$$\mathbf{Z}^+ = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}.$$

2. 描述法

就是指出集合中的元素的特征即元素所具有的性质. 例如, 设 $P(x)$ 是一个关于 x 的命题, 则把使得命题 $P(x)$ 成立的一切 x 之集 S 表示为 $S = \{x : P(x)\}$, 或

$S=\{x|P(x)\}$, 将集 E 中使得命题 $P(x)$ 成立的一切 x 之集表示为 $\{x\in E:P(x)\}$, 简记为 $E[P]$.

例如, 当 $P(x)$ 表示 $x^2=1$ 时, $\{x:P(x)\}=\{x:x^2=1\}=\{-1,1\}$; 当 $P(x)$ 表示 $f(x)>a$ 时, $\{x:P(x)\}$ 就是使得 $f(x)>a$ 的一切 x 之集, 而 $E[P]$ 表示集合 E 中满足 $f(x)>a$ 的一切 x 之集, 记为 $E[f>a]$, 即

$$E[f>a]=\{x:x\in E\text{且}f(x)>a\}.$$

类似地, 可定义

$$E[a\leqslant f<b]=\{x:x\in E\text{且}a\leqslant f(x)<b\},$$

$$E[\lim_{n\to\infty}f_n=f]=\{x:x\in E\text{且}\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\},$$

$$E[f\in G]=\{x:x\in E\text{且}f(x)\in G\}.$$

特别地, 全体有理数之集 $\mathbf{Q}$ 可以表示为

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{m}{n}:m\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{Z}^+,(m,n)=1\right\};$$

坐标平面上的所有点之集 $\mathbf{R}^2$ 可表示为

$$\mathbf{R}^2=\{(x,y):x,y\in\mathbf{R}\};$$

所有复数之集 $\mathbf{C}$ 可表示为

$$\mathbf{C}=\{x+\mathrm{i}y:x,y\in\mathbf{R}\}.$$

当 $a\leqslant b$ 时, 规定

$$[a,b]=\{x\in\mathbf{R}|a\leqslant x\leqslant b\},\quad (a,b)=\{x\in\mathbf{R}|a<x<b\},$$

$$(a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}|a<x<+\infty\},\quad (-\infty,a]=\{x\in\mathbf{R}|-\infty<x\leqslant a\}.$$

1.1.3 集合的运算

1. 交

集 A 与集 B 的一切公共元素之集, 称为 A 与 B 的**交集**(Intersection), 记为 $A\bigcap B$, 即

$$A\bigcap B=\left\{x:x\in A\text{且}x\in B\right\}.$$

有限多个集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交集是指集

$$\bigcap_{k=1}^{n}A_k=\left\{x:x\in A_k(k=1,2,\cdots,n)\right\}.$$

一列集 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的交集定义为

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left\{x : x \in A_n (\forall n \in \mathbf{Z}^+)\right\}.$$

类似地, 可以定义任意多个集 $A_\alpha(\alpha \in I)$ 的交集

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : x \in A_\alpha (\forall \alpha \in I)\},$$

其中 I 称为**指标集**(Index set).

显然, $\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ 是包含在所有 $A_\alpha(\alpha \in I)$ 之中的最大集合. 所以, 可称其为集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 的**下确界**, 记为 $\inf\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$. 于是

$$\inf\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \inf\{A_n\}_{n \in \mathbf{Z}^+} = \inf_{n \geqslant 1} A_n.$$

例 1.1.1　设 $A = \{1,2,3,4\}, B = \{3,4,5\}$, 则 $A \bigcap B = \{3,4\}$.

例 1.1.2　设 $A_i = \left\{x : 0 \leqslant x < 1 + \dfrac{1}{i}\right\} (i = 1,2,3,\cdots)$, 则

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left\{x : 0 \leqslant x < 1 + \frac{1}{n}\right\} = \left[0, 1 + \frac{1}{n}\right),$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x : 0 \leqslant x \leqslant 1\} = [0,1].$$

例 1.1.3　$(0,1] \bigcap (1,2) = \varnothing$.

一般地, 若两个集合的交集是空集, 则称这两个集是**不相交的**(Disjoint).

2. 并

把集 A 与集 B 的所有元素放在一起组成一个集合 (相同的元素只取一次), 称为 A 与 B 的**并集**(Union), 记为 $A \bigcup B$, 即

$$A \bigcup B = \{x : x \in A \quad \text{或} \quad x \in B\}.$$

有限多个集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并集定义为

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \{x : \exists k \in \{1,2,\cdots,n\} \text{使得} \, x \in A_k\},$$

一列集 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的并集定义为

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left\{x : \exists n \in \mathbf{Z}^+ \text{使得} \, x \in A_n\right\}.$$