世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

线性代数

（理工类·第五版）

⊙ 吴赣昌　主编

中国人民大学出版社

21世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

线性代数

（理工类·第五版）

⊙ 吴赣昌　主编

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数：理工类/吴赣昌主编．—5版．——北京：中国人民大学出版社，2017.6
21世纪数学教育信息化精品教材　大学数学立体化教材
ISBN 978-7-300-24285-9

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①吴…　Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材　Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第056363号

21世纪数学教育信息化精品教材
大学数学立体化教材
线性代数（理工类·第五版）
吴赣昌　主编
Xianxing Daishu

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京昌联印刷有限公司	**版　　次**	2006年4月第1版
规　　格	170 mm×228 mm　16开本		2017年6月第5版
印　　张	16.5插页1	**印　　次**	2017年6月第1次印刷
字　　数	336 000	**定　　价**	35.80元

内容简介

本书根据高等院校普通本科理工类专业线性代数课程的最新教学大纲及考研大纲编写而成，并在第四版的基础上进行了重大修订和完善（详见本书前言）。本书包含行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值、二次型、线性空间与变换等内容模块，并特别加强了数学建模与数学实验教学环节。

本“书”远非传统意义上的书，作为立体化教材，它包含线下的“书”和线上的“服务”两部分。其中线上的“服务”用以下两种形式提供：一是书中各处的二维码，用户通过手机或平板电脑等移动端扫码即可使用；二是在本书的封面上提供的网络账号，用户通过它即可登录与本书配套建设的网络学习空间。

网络学习空间中包含与本书配套的在线学习系统，该系统在内容结构上包含教材中每节的教学内容及相关知识扩展、教学例题及综合进阶典型题详解、数学实验及其详解、习题及其详解等，并为每章增加了综合训练，其中包含每章的总结、题型分析及其详解、历届考研真题及其详解等。该系统采用交互式多媒体化建设，并支持用户间在线求助与答疑，为用户自主式高效率地学习奠定基础。

本书可作为高等院校理工科及技术学科等非数学专业的线性代数教材，并可作为上述各专业领域读者的教学参考书。

前　言

大学数学是自然科学的基本语言，是应用模式探索现实世界物质运动机理的主要手段. 对于大学非数学专业的学生而言，大学数学的教育，其意义则远不仅仅是学习一种专业的工具而已. 中外大量的教育实践事实充分显示了: 优秀的数学教育，乃是一种人的理性的思维品格和思辨能力的培育，是聪明智慧的启迪，是潜在的能动性与创造力的开发，其价值是远非一般的专业技术教育所能相提并论的.

随着我国高等教育自1999年开始迅速扩大招生规模，至2009年的短短十年间，我国高等教育实现了从精英教育到大众化教育的过渡，走完了其他国家需要三五十年甚至更长时间才能走完的道路. 教育规模的迅速扩张，给我国的高等教育带来了一系列的变化、问题与挑战. 大学数学的教育问题首当其冲受到影响. 大学数学教育过去是面向少数精英的教育，由于学科的特点，数学教育呈现几十年甚至上百年一贯制，仍处于经典状态. 当前大学数学课程的教学效果不尽如人意，概括起来主要表现在以下两方面：一是教材建设仍然停留在传统模式上，未能适应新的社会需求. 传统的大学数学教材过分追求逻辑的严密性和理论体系的完整性，重理论而轻实践，剥离了概念、原理和范例的几何背景与现实意义，导致教学内容过于抽象，也不利于与后续课程教学的衔接，进而造成了学生“学不会，用不了”的尴尬局面. 二是在信息技术及其终端产品迅猛发展的今天，在大学数学教育领域，信息技术的应用远没有在其他领域活跃，其主要原因是:在教材和教学建设中没能把信息技术及其终端产品与大学数学教学的内容特点有效地整合起来.

作者主编的“大学数学立体化教材”，最初脱胎于作者在2000—2004年研发的“大学数学多媒体教学系统”. 2005年，作者与中国人民大学出版社达成合作，出版了该系列教材的第一版，合作期间，该系列教材经历多次改版，并于2011年出版了第四版，具体包括: 面向普通本科理工类、经管类与纯文科类的完整版系列教材；面向普通本科部分专业和三本院校理工类与经管类的简明版系列教材；面向高职高专院校理工类与经管类的高职高专版系列教材. 在上述第四版及相关系列教材中，作者加强了对大学数学相关教学内容中重要概念的引入、重要数学方法的应用、典型数学模型的建立、著名数学家及其贡献等方面的介绍，丰富了教材内涵，初步形成了该系列教材的特色. 令人感到欣慰的是，自2006年以来，“大学数学立体化教材”已先后被国内数百所高等院校广泛采用，并对大学数学的教育改革起到了积极的推动作用.

2017年，距2011年的改版又过去了6年. 而在这6年时间里，随着移动无线通信技术 (如3G、4G等)、宽带无线接入技术(如Wi-Fi等)和移动终端设备(如智能手机、平板电脑等)的飞速发展，那些以往必须在电脑上安装运行的计算软件，如今在

普通的智能手机和平板电脑上通过移动互联网接入即可流畅运行，这为各类教育信息化产品的服务向前延伸奠定了基础.

作者本次启动的"大学数学立体化教材"(第五版)的改版工作，旨在充分利用移动互联网、移动终端设备与相关信息技术软件为教材用户提供更优质的学习内容、实验案例与交互环境. 顺利实现这一宗旨，还得益于作者主持的数苑团队的另一项工作成果：公式图形可视化在线编辑计算软件. 该软件于 2010 年研发成功时，仅支持在 Win 系统电脑中通过 IE 类浏览器运行. 2014 年10月底，万维网联盟 (W3C) 组织正式发布并推荐了跨系统与跨浏览器的HTML5.0 标准. 为此，数苑团队通过最近几年的努力，也实现了相关技术突破. 如今，数苑团队研发的公式图形可视化在线编辑计算软件已支持在各类操作系统的电脑和移动终端 (包括智能手机、平板电脑等) 上运行于不同的浏览器中，这为我们接下来的教材改版工作奠定了基础.

作者本次"大学数学立体化教材"(第五版) 的改版具体包括：面向普通本科院校的"理工类 • 第五版""经管类 • 第五版"与"纯文科类 • 第四版"；面向普通本科少学时或三本院校的"理工类 • 简明版 • 第五版""经管类 • 简明版 • 第五版"与"综合类 • 简明版"合订本；面向高职高专院校的"理工类 • 高职高专版 • 第四版""经管类 • 高职高专版 • 第四版"与"综合类 • 高职高专版 • 第三版".

本次改版的指导思想是：为帮助教材用户更好地理解教材中的重要概念、定理、方法及其应用，设计了大量相应的数学实验. 实验内容包括：数值计算实验、函数计算实验、符号计算实验、2D 函数图形实验、3D 函数图形实验、矩阵运算实验、随机数生成实验、统计分布实验、线性回归实验、数学建模实验等. 相比教材正文所举示例，这些实验设计的复杂程度更高、数据规模更大、实用意义也更大. 本系列教材于2017年改版修订的各个版本均包含了针对相应课程内容的数学实验，其中的大部分都在教材内容页面上提供了对应的二维码，用户通过微信扫码功能扫描指定的二维码，即可进行相应的数学实验，而完整的数学实验内容则呈现在教材配套的网络学习空间中.

大学数学按课程模块分为高等数学(微积分)、线性代数、概率论与数理统计三大模块，各课程的改版情况简介如下：

高等数学课程：函数是高等数学的主要研究对象，函数的表示法包括解析法、图像法与表格法. 以往受计算分析工具的限制，人们对函数的解析表示、图像表示与数表表示之间的关系往往难以把握，大大影响了学习者对函数概念的理解. 为了弥补这方面的缺失，欧美发达国家的大学数学教材一般都补充了大量流程分析式的图像说明，因而其教材的厚度与内涵也远较国内的厚重. 有鉴于此，在高等数学课程的数学实验中，我们首先就函数计算与函数图形计算方面设计了一系列的数学实验，包括函数值计算实验、不同坐标系下2D函数的图形计算实验和3D 函数的图形计算实验等，实验中的函数模型较教材正文中的示例更复杂，但借助微信扫码功能可即时实现重复实验与修改实验. 其次，针对定积分、重积分与级数的教学内容设计了一系列求

和、多重求和、级数展开与逼近的数学实验. 此外, 还根据相应教学内容的需求, 设计了一系列数值计算实验、符号计算实验与数学建模实验. 这些数学实验有助于用户加深对高等数学中基本概念、定理与思想方法的理解, 让他们通过对量变到质变过程的观察, 更深刻地理解数学中近似与精确、量变与质变之间的辩证关系.

线性代数课程: 矩阵实质上就是一张长方形数表, 它是研究线性变换、向量组线性相关性、线性方程组的解、二次型以及线性空间的不可替代的工具. 因此, 在线性代数课程的数学实验设计中, 首先就矩阵基于行 (列) 向量组的初等变换运算设计了一系列数学实验, 其中矩阵的规模大多为6~10阶的, 有助于帮助用户更好地理解矩阵与其行阶梯形、行最简形和标准形矩阵间的关系. 进而为矩阵的秩、向量组线性相关性、线性方程组及其应用、矩阵的特征值及其应用、二次型等教学内容分别设计了一系列相应的数学实验. 此外, 还根据教学的需要设计了部分数值计算实验和符号计算实验, 加强用户对线性代数核心内容的理解, 拓展用户解决相关实际应用问题的能力.

概率论与数理统计课程: 本课程是从数量化的角度来研究现实世界中的随机现象及其统计规律性的一门学科. 因此, 在概率论与数理统计课程的数学实验中, 我们首先设计了一系列服从均匀分布、正态分布、0–1 分布与二项分布的随机试验, 让用户通过软件的仿真模拟试验更好地理解随机现象及其统计规律性. 其次, 基于计算软件设计了常用统计分布表查表实验, 包括泊松分布查表、标准正态分布函数查表、标准正态分布查表、t 分布查表、F 分布查表与卡方分布查表等. 再次, 还设计了针对数组的排序、分组、直方图与经验分布图的一系列数学实验. 最后, 针对经验数据的散点图与线性回归设计了一系列数学实验. 这些数学实验将会在帮助用户加深对概率论与数理统计课程核心内容的理解、拓展解决相关实际应用问题的能力上起到积极作用.

致用户

作者主编的“大学数学立体化教材”(第五版) 及 2017 年改版的每本教材, 均包含了与相应教材配套的网络学习空间服务. 用户通过教材封面下方提供的网络学习空间的网址、账号和密码, 即可登录相应的网络学习空间. 网络学习空间提供了远较纸质教材更为丰富的教学内容、教学动画以及教学内容间的交互链接, 提供了教材中所有习题的解答过程. 在所有内容与习题页面的下方, 均提供了用户间的在线交互讨论功能, 作者主持的数苑团队也将在该网络学习空间中为你服务. 使用微信扫码功能扫描教材封面提供的二维码, 绑定微信号, 你即可通过扫描教材内容页面提供的二维码进行相关的数学实验.

在你进入高校后即将学习的所有大学课程中, 就提高你的学习基础、提升你的学习能力、培养你的科学素质和创新能力而言, 大学数学是最有用且最值得你努力的课程. 事实上, 像微积分、线性代数、概率论与数理统计这些大学数学基础课程,

你无论怎样评价其重要性都不为过，而学好这些大学数学基础课程，你将终生受益.

主动把握好从“学数学”到“做数学”的转变，这一点在大学数学的学习中尤为重要，不要以为你在课堂教学过程中听懂了就等于学到了，事实上，你需要在课后花更多的时间去主动学习、训练与实验，才能真正掌握所学知识.

致教师

使用本系列教材的教师，请登录数苑网“大学数学立体化教材”栏目：

http://www.math168.com/dxsx

作者主持的数苑团队在那里为你免费提供与本系列教材配套的教学课件系统及相关的备课资源，它们是作者团队十余年积累与提升的成果. 与本系列教材配套建设的信息化系统平台包括在线学习平台、试题库系统、在线考试及其预约管理系统等，感兴趣和有需要的用户可进一步通过数苑网的在线客服联系咨询.

正如美国《托马斯微积分》的作者 G.B.Thomas 教授指出的，“一套教材不能构成一门课；教师和学生在一起才能构成一门课”，教材只是支持这门课程的信息资源. 教材是死的，课程是活的. 课程是教师和学生共同组成的一个相互作用的整体，只有真正做到以学生为中心，处处为学生着想，并充分发挥教师的核心指导作用，才能使之成为富有成效的课程. 而本系列教材及其配套的信息化建设将为教学双方在教、学、考各方面提供充分的支持，帮助教师在教学过程中发挥其才华，帮助学生富有成效地学习.

作　者

2017 年 3 月 28 日

目 录

第1章 行 列 式

行列式实质上是由一些数值排列成的数表按一定的法则计算得到的一个数. 早在1683年与1693年,日本数学家关孝和与德国数学家莱布尼茨就分别独立地提出了行列式的概念. 以后很长一段时间内,行列式主要应用于对线性方程组的研究. 大约一个半世纪后,行列式逐步发展成为线性代数的一个独立的理论分支.1750年,瑞士数学家克莱姆在他的论文中提出了利用行列式求解线性方程组的著名法则 —— 克莱姆法则. 随后,1812年,法国数学家柯西发现了行列式在解析几何中的应用,这一发现激起了人们对行列式应用进行探索的浓厚兴趣,前后持续了近100年.

在柯西所处的时代,人们讨论的行列式的阶数通常很小,行列式在解析几何以及数学的其他分支中都扮演着很重要的角色. 如今,由于计算机和计算软件的发展,在常见的高阶行列式计算中,行列式的数值意义已经不大. 但是,行列式公式依然可以给出构成行列式的数表的重要信息. 在线性代数的某些应用中,行列式的知识依然很有用. 特别是在本课程中,它是研究后面的线性方程组、矩阵及向量组的线性相关性的一种重要工具.

§1.1 二阶与三阶行列式

二阶行列式与三阶行列式的内容在中学课程中已经涉及,本节主要对这些知识进行复习与总结,它们是我们学习和讨论更高阶行列式计算的基础.

一、二阶行列式

定义1 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,称为**二阶行列式**,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

其中数 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 称为行列式的**元素**,横排称为**行**,竖排称为**列**. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**,表明该元素位于第 i 行,第二个下标 j 称为**列标**,表明该元素位于第 j 列. 由上述定义可知,二阶行列式是由4个数按一定的规律运算所得的

代数和．这个规律性表现在行列式的记号中就是**“对角线法则”**．如图1−1−1所示，把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为**主对角线**，把 a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为**副对角线**，于是，二阶行列式便等于主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

图1−1−1

二、二元线性方程组

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1.1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (1.2) \end{cases}.$$

式(1.1)$\times a_{22}$ − 式(1.2)$\times a_{12}$，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}. \tag{1.3}$$

式(1.2)$\times a_{11}$ − 式(1.1)$\times a_{21}$，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \tag{1.4}$$

利用二阶行列式的定义，记

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则式(1.3)、式(1.4)可改写为

$$\begin{cases} Dx_1 = D_1 \\ Dx_2 = D_2 \end{cases}.$$

于是，在行列式 $D \neq 0$ 的条件下，式(1.1)、式(1.2)有唯一解：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

注：从形式上看，这里分母 D 是由式(1.1)、式(1.2)构成的方程组的系数所确定的二阶行列式(称为**系数行列式**)，x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}, a_{21} 所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}, a_{22} 所得的二阶行列式．本节后面讨论的三元线性方程组亦有类似的规律性．请读者学习时注意比较．

例1　解方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ x_1 - 2x_2 = -3 \end{cases}$.

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\times(-2) - 3\times 1 = -7,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}8 & 3\\-3 & -2\end{vmatrix}=8\times(-2)-3\times(-3)=-7,\quad D_2=\begin{vmatrix}2 & 8\\1 & -3\end{vmatrix}=2\times(-3)-8\times1=-14,$$

因 $D\neq0$，故题设方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-7}{-7}=1,\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-14}{-7}=2.$$

■

三、三阶行列式

定义 2 记号 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ 表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33},$$

称为**三阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

由上述定义可见，三阶行列式有 6 项，每一项均为不同行不同列的三个元素之积再冠以正负号，其运算的规律性可用“对角线法则”(见图1–1–2) 或“沙路法则”(见图1–1–3) 来表述.

(1) 对角线法则.

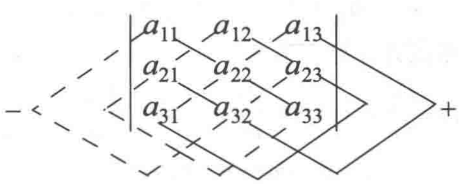

图 1–1–2

(2) 沙路法则.

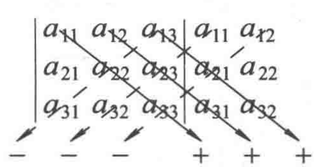

图 1–1–3

例 2 计算三阶行列式 $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 0 & 5\\-1 & 0 & 6\end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 0 & 5\\-1 & 0 & 6\end{vmatrix}=1\times0\times6+2\times5\times(-1)+3\times4\times0\\-3\times0\times(-1)-1\times5\times0-2\times4\times6\\=-10-48=-58.$$

■

例3　求解方程 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=0$.

解　方程左端

$$D=3x^2+4x+18-12-9x-2x^2=x^2-5x+6,$$

由 $x^2-5x+6=0$, 解得 $x=2$ 或 $x=3$. ■

四、三元线性方程组

类似于二元线性方程组的讨论，对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases},$$

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

若系数行列式 $D\neq 0$，则该方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}, \quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例4　解三元线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+\ x_3=-2 \\ 2x_1+\ x_2-3x_3=1 \\ -x_1+\ x_2-\ x_3=0 \end{cases}$.

解　系数行列式

$$\begin{aligned} D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} &=1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)+1\times2\times1 \\ &\quad -1\times1\times(-1)-1\times(-3)\times1-(-2)\times2\times(-1) \\ &=-5\neq 0, \end{aligned}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5, \ D_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-10, \ D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-5,$$

故所求方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=2,\qquad x_3=\frac{D_3}{D}=1.$$ ■

习题 1-1

1. 计算下列二阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix}2&1\\-1&2\end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix}a&b\\a^2&b^2\end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix}x-1&1\\x^2&x^2+x+1\end{vmatrix}$; (5) $\begin{vmatrix}\frac{1-t^2}{1+t^2}&\frac{2t}{1+t^2}\\\frac{-2t}{1+t^2}&\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{vmatrix}$; (6) $\begin{vmatrix}1&\log_b a\\\log_a b&1\end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix}1&1&1\\3&1&4\\8&9&5\end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix}1&0&-1\\3&5&0\\0&4&1\end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix}2&0&1\\1&-4&-1\\-1&8&3\end{vmatrix}$; (5) $\begin{vmatrix}0&a&0\\b&0&c\\0&d&0\end{vmatrix}$; (6) $\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}$;

(7) $\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}$; (8) $\begin{vmatrix}x&y&x+y\\y&x+y&x\\x+y&x&y\end{vmatrix}$.

3. 证明下列等式: $\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix}b_2&c_2\\b_3&c_3\end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix}a_2&c_2\\a_3&c_3\end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix}$.

4. 当 x 取何值时, $\begin{vmatrix}3&1&x\\4&x&0\\1&0&x\end{vmatrix}\neq 0$.

§1.2 n阶行列式

从三阶行列式的定义, 我们看到:(1) 三阶行列式共有 $3!=6$ 项; (2) 行列式中的每一项都是取自不同行不同列的三个元素的乘积; (3)行列式中的每一项的符号均与该项元素下标的排列顺序有关. 受此启示, 我们可以引入 n 阶行列式的定义. 此外, 在本节中, 我们还要了解几个今后常用的特殊的 n 阶行列式 (对角行列式与三角形行列式等) 的计算方法.

一、排列与逆序

定义1　由自然数 1, 2, ⋯, n 组成的不重复的每一种有确定次序的排列，称为一个 $\boldsymbol{n}$ **级排列**(简称为**排列**).

例如，1234 和 4312 都是 4 级排列，而 24315 是一个 5 级排列.

定义2　在一个 n 级排列 $(i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n)$ 中，若数 $i_t > i_s$，则称数 i_t 与 i_s 构成一个**逆序**. 一个 n 级排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**，记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

根据上述定义，可按如下方法计算排列的逆序数：

设在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中，比 $i_k(k=1,2,\cdots,n)$ 大且排在 i_k 前面的数共有 t_k 个，则 i_k 的逆序的个数为 t_k，而该排列中所有自然数的逆序的个数之和就是这个排列的逆序数. 即

$$N(i_1 i_2 \cdots i_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{k=1}^{n} t_k.$$

例1　计算排列 32514 的逆序数.

解　因为 3 排在首位，故其逆序数为 0；

在 2 前面且比 2 大的数有 1 个，故其逆序的个数为 1；

在 5 前面且比 5 大的数有 0 个，故其逆序的个数为 0；

在 1 前面且比 1 大的数有 3 个，故其逆序的个数为 3；

在 4 前面且比 4 大的数有 1 个，故其逆序的个数为 1.

将上述结果排成如下形式：

$$\begin{array}{cccccc} \text{排列} & 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ t_k & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}$$

易见所求排列的逆序数为

$$N(32514) = 0+1+0+3+1 = 5.$$

■

定义3　逆序数为奇数的排列称为**奇排列**；逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例2　求排列 $n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数，并讨论其奇偶性.

解　类似例 1 的讨论，可排出下表：

$$\begin{array}{cccccccc} \text{排列} & n & (n-1) & (n-2) & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ t_k & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \end{array}$$

则所求逆序数为

$$N(n(n-1)\cdots 321) = 0+1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

易见：当 $n=4k, 4k+1$ 时，该排列是偶排列；当 $n=4k+2, 4k+3$ 时，该排列是奇排列.

■

二、n阶行列式的定义

观察三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

易见:

(1) 三阶行列式共有 $6(=3!)$ 项;

(2) 每项都是取自不同行不同列的三个元素的乘积;

(3) 每项的符号是:当该项元素的行标按自然数顺序排列后,若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号,是奇排列则取负号.

故三阶行列式可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 为对所有三级排列 $j_1j_2j_3$ 求和.

定义 4 由 n^2 个元素 $a_{ij}\ (i, j=1, 2, \cdots, n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**,其中横排称为**行**,竖排称为**列**,它表示所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和,各项的符号是:当该项各元素的行标按自然数顺序排列后,若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号,是奇排列则取负号.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和.行列式有时也简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$,这里数 a_{ij} 称为行列式的**元素**,称

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

为行列式的**一般项**.

注:(1) n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和,且冠以正号的项和冠以负号的项(不包括元素本身所带的符号)各占一半,因此,行列式实质上是一种特殊定义的数;