21世纪大学公共数学系列教材

概率论与数理统计（第二版）

● 姚孟臣 编著

Math

中国人民大学出版社

21世纪大学公共数学系列教材

概率论与数理统计

（第二版）

姚孟臣　编著

Math

RFID

中国人民大学出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/姚孟臣编著. —2 版. —北京：中国人民大学出版社，2016.12
21 世纪大学公共数学系列教材
ISBN 978-7-300-23580-6

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①姚… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 270371 号

21 世纪大学公共数学系列教材
概率论与数理统计（第二版）
姚孟臣　编著
Gailülun yu Shuli Tongji

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京东方圣雅印刷有限公司	版　　次	2006 年 12 月第 1 版
规　　格	185 mm×260 mm　16 开本		2016 年 12 月第 2 版
印　　张	11.75 插页 1	印　　次	2016 年 12 月第 1 次印刷
字　　数	283 000	定　　价	26.00 元

版权所有　侵权必究　　印装差错　负责调换

目　录

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第1章

随机事件及其概率

概率论是从数量上研究随机现象统计规律性的一门数学学科,其应用非常广泛,是科技、管理、经济等领域的工作者必备的数学工具.本章将向大家介绍概率论中的几个基本概念,随机事件的基本关系与基本运算,以及概率的性质及其计算方法.

§1.1 随机事件

一、随机现象与随机试验

在客观世界中存在着两类不同的现象:一类称为**确定性现象**,另一类称为**随机现象**.

所谓**确定性现象**,是指在一定的条件下必然发生或必然不发生的现象.例如,在一个标准大气压下,纯净的水加热到100℃时必然会沸腾;从10件产品(其中2件是次品,8件是正品)中,任意地抽取3件进行检验,这3件产品绝不会全是次品;向上抛掷一枚硬币必然下落,等等.这些都是确定性现象.这类现象的一个共同点是事先可以断定其结果.

所谓**随机现象**,是指在一定的条件下,具有多种可能发生的结果的现象.例如,从10件产品(其中2件是次品,8件是正品)中任取1件出来,可能是正品,也可能是次品;向上抛掷一枚硬币,落下以后可能是正面朝上,也可能是反面朝上;将要出生的婴儿可能是男性,也可能是女性.这类现象的一个共同点是事先不能预知多种可能结果中究竟出现哪一种.

人们在研究客观现象时都离不开对其进行观察(测)或实验.为了简便起见,我们把对某现象或对某事物的某个特征的观察(测),以及各种各样的科学实验,统称为**试验**.为了研究随机现象,同样需要进行试验.人们经过长期实践和深入研究以后发现,对于随机现象来说,尽管就个别的实验或观测而言,究竟会出现什么样的结果不能事先断定,即随机现象有不确定的一面;但是当我们对随机现象进行大量重复实验或观测时就会发现,各种结果的出现都具有某种固有的规律性.例如,在相同的条件下,多次抛掷同一枚硬币,就会发现“出现正面”

和“出现反面”的次数大约各占总抛掷次数的 1/2. 又如掷一枚骰子可能出现 1 点，2 点，…，6 点，掷一次时不能预先断定出现几点，但多次重复后就会发现它的规律性，即出现 1，2，…，6 点的次数大约各占 1/6.

由以上的例子可以看出，随机现象具有两重性：表面上的偶然性与内部蕴含着的必然规律性. 随机现象的偶然性又称为它的随机性. 在一次实验或观察中，结果的不确定性就是随机现象随机性的一面；在相同的条件下进行大量重复实验或观察时呈现出来的规律性是随机现象必然性的一面，称随机现象的必然性为**统计规律性**. 概率论就是研究随机现象统计规律性的一门科学.

为了获得随机现象的统计规律，必须在相同的条件下，大量重复地做试验. 在概率统计中，把这类试验称为**随机试验**，它具有下述三点特性：

（1）试验可以在相同的条件下重复进行；

（2）试验的所有可能结果在试验前是明确的，而每次试验必有其中的一个结果出现，并且也仅有一个结果出现；

（3）每次试验的可能结果不止一个，而究竟会出现哪一个结果，在试验前不能准确地预知.

随机试验也简称**试验**，一般用字母 E 或 E_1，E_2 等表示.

二、样本空间

在随机试验中，每一个可能出现的不再分解的最简单的结果称为随机试验的**基本事件**或**样本点**，用 ω 表示；而由全体基本事件构成的集合称为**基本事件空间**或**样本空间**，记为 Ω.

例 1 设 E_1 为抛掷一枚匀称的硬币，观察正、反面出现的情况. 记 ω_1 是出现正面，ω_2 是出现反面. 于是，Ω 由两个基本事件 ω_1，ω_2 构成，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$.

例 2 设 E_2 为掷一枚骰子，观察出现的点数. 记 ω_i 为出现 i 个点（$i=1,2,\cdots,6$）. 于是，有 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$.

例 3 设 E_3 为从 10 件产品（其中 2 件次品，8 件正品）中任取 3 件，观察其中次品的件数. 记 ω_i 为恰有 i 件次品（$i=0,1,2$），于是，$\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2\}$.

例 4 设 E_4 为在相同条件下接连不断地向同一个目标射击，直到第一次击中目标为止，观察射击的次数. 记 ω_i 为射击 i 次（$i=1,2,\cdots$），于是，$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\}$.

例 5 设 E_5 为某地铁站每隔 5 分钟有一列车通过，乘客对于列车通过该站的时间完全不知道，观察乘客候车的时间. 记乘客的候车时间为 ω. 显然有 $\omega\in[0,5)$，即 $\Omega=[0,5)$.

通过上面的几个例子可以看出，随机试验可以分成只有有限个可能结果（如 E_1，E_2，E_3）、有可列个可能结果（如 E_4）和有不可列个可能结果（如 E_5）这三种情况.

应该说明的是，一个随机试验中样本点个数的确定都是相对试验目的而言的. 例如，度量人的身高时，一般说来某个区间中的任一实数都可以是一个样本点；但是，如果测量身高只是为了表明乘客是否必须购买全票、半票或者免票，这时只需要考虑 3 个样本点就可以了. 另外，一个随机试验的条件有的是人为的，有的是客观存在的（例如地震等）. 在后一种情况下，每当试验条件实现时，人们便会观测到一个结果 ω. 虽然我们无法事先准确地说出试验的结果，但是能够指出它出现的范围 Ω. 因此，我们所讨论的随机试验是有着十分广泛的含义的.

三、随机事件

有了样本空间的概念，我们就可以描述随机事件了. 所谓**随机事件**是指样本空间 Ω 的一个子集，随机事件简称为**事件**，用字母 A,B,C 等表示. 因此，某个事件 A 发生，当且仅当这个子集中的一个样本点 ω 发生，记为 $\omega\in A$.

在例 2 中，$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$，而 E_2 中的一个事件是具有某些特征的样本点组成的集合. 例如，设事件 $A=\{$出现偶数点$\}$，$B=\{$出现的点数大于 4$\}$，$C=\{$出现 3 点$\}$，可见它们都是 Ω 的子集. 显然，如果事件 A 发生，那么子集$\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$中的一个样本点一定发生，反之亦然，故有 $A=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$；事件 B 发生就是指出现了样本点 ω_5 或 ω_6，否则我们就说事件 B 没有发生，故 $B=\{\omega_5,\omega_6\}$；类似地，有 $C=\{\omega_3\}$. 一般而言，在 E_2 中，任一由样本点组成的 Ω 的子集也都是随机事件. 这里需要特别指出的是，我们把样本空间 Ω 也作为一个事件. 因为在每次试验中，必定有 Ω 中的某个样本点发生，即事件 Ω 在每次试验中必定发生，所以 Ω 是一个必定发生的事件. 在每次试验中必定要发生的事件称为**必然事件**，记作 U. 在例 2 中$\{$点数小于等于 6$\}$就是一个必然事件. 在例 3 中$\{$至少有一件正品$\}$也是一个必然事件. 任何随机试验的样本空间 Ω 都是必然事件. 类似地，我们把不包含任何样本点的空集$\varnothing$也作为一个事件. 显然，它在每次试验中都不发生，所以$\varnothing$是一个不可能发生的事件. 在每次试验中都必定不会发生的事件称为**不可能事件**，记为 V. 在例 2 中$\{$点数等于 7$\}$，$\{$点数小于 1$\}$等都是不可能事件. 在例 3 中$\{$不出现正品$\}$也是不可能事件. 我们知道，必然事件 U 与不可能事件 V 都不是随机事件. 因为作为试验的结果，它们都是确定的. 但是，为了今后讨论问题方便起见，我们也将它们视为随机事件来处理.

四、随机事件间的关系与运算

由于事件是样本空间的子集，故事件之间的关系与运算和集合论中集合之间的关系与运算完全类似，但要注意其特有的事件意义.

设 Ω 是给定的一个随机试验的样本空间，事件 A,B,C，$A_k(k=1,2,\cdots)$ 都是 Ω 的子集.

1. 包含关系

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A，或称 A 是 B 的**子事件**，记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.

在这种情况下，组成事件 A 的样本点都是组成 B 的样本点. 这种包含关系的几何直观图如图 1—1 所示.

例如，在例 2 中，若 A 表示$\{$出现奇数点$\}$，即事件$\{1,3,5\}$，若 B 表示$\{$出现的点数不超过 5$\}$，即事件$\{1,2,3,4,5\}$，显然 $B\supset A$.

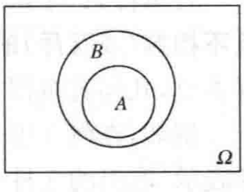

图 1—1　$A\subset B$

2. 相等关系

若 $B\supset A$ 且 $A\supset B$，则称事件 A 与事件 B **相等或等价**，记为 $A=B$. 其直观意义是事件 A 与 B 的样本点完全相同. 这就是说，在一次试验中，等价的两个事件同时发生或同时不发生，因此可以把它们看成是一样的.

在例 3 中，设 $A=\{$至少有一件次品$\}$，$B=\{$至多有两件正品$\}$，显然有 $A=B$.

3. 事件的并

{事件 A 与事件 B 至少有一个发生}称为事件 A 与事件 B 的**并**或**和**,记为 $A\cup B$ 或 $A+B$. 事件 $A\cup B$ 是属于事件 A 或属于事件 B 的样本点组成的集合,其几何直观图如图 1—2 所示(见阴影部分).

例如,在例 2 中,设 A 表示{出现偶数点},即 $A=\{2,4,6\}$,B 表示{出现的点数大于 4},即 $B=\{5,6\}$,则 $A\cup B$ 表示$\{2,4,5,6\}$.

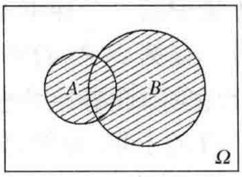

图 1—2 $A\cup B$

一般地,把{事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生}称为 n 个事件的并,记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$,或简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

类似地,把{可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生}称为可列个事件的并,记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$,或简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

例如,在 E_4 中记 $B_i=\{\omega_i\}(i=1,2,\cdots)$,$A=$\{至少射击 4 次\},则

$$A=\bigcup_{i=4}^{\infty}B_i.$$

4. 事件的交

{事件 A 与事件 B 同时发生}称为事件 A 与事件 B 的**交**或**积**,记为 $A\cap B$ 或 AB. 事件 $A\cap B$是由既属于事件A 又属于事件B 的样本点组成的集合,其几何直观图如图 1—3 所示(见阴影部分).

例如,在例 3 中,设 A 表示{取出的 3 件中最多有一件次品},即 $A=\{\omega_0,\omega_1\}$;B 表示{取出的 3 件中至少有一件次品},即 $B=\{\omega_1,\omega_2\}$,则 $A\cap B=\{\omega_1\}$,即 $A\cap B$ 表示{取出的 3 件产品中恰有一件次品}. 它是由既属于事件 A 又属于事件 B 的样本点组成的子集.

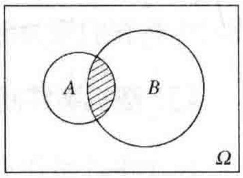

图 1—3 $A\cap B$

一般地,把{事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生}称为 n 个事件的积事件,记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$,或简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

类似地,把{可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$同时发生}称为可列个事件的积事件,记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$,或简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

5. 互不相容(或互斥)关系

若事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称这两个事件是**互不相容(或互斥)的**. 显然,互不相容的事件 A 与事件 B 没有公共的样本点,几何直观图如图 1—4 所示.

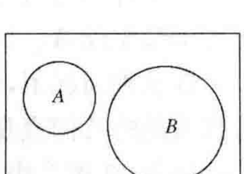

图 1—4 $AB=\varnothing$

例如,在例 3 中,若设 A 表示{取出的 3 件都是正品},即 $A=\{\omega_0\}$;B 表示{取出的 3 件中有两件是次品},即 $B=\{\omega_2\}$. 显然事件 A 与 B 没有公共的样本点,因此它们不可能同时发生,即 $AB=\varnothing$.

6. 事件的逆

对于事件 A,我们把不包含在 A 中的所有样本点构成的集合称为事件 A 的**逆**(或称为 A 的**对立事件**),记为 $\overline{A}$. 这就是说,事件 $\overline{A}$ 表示在一次试验中事件 A 不发生. 于是,我们有

$$A\overline{A}=\varnothing,\quad A\cup\overline{A}=\Omega,$$

由于A也是$\overline{A}$的对立事件，故$\overline{A}$与A又称为**相互对立(或互逆)事件**，其几何直观图如图 1—5 所示.

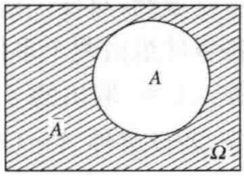

图 1—5 $\overline{A}$

例如，在E_1中，设$A=\{$出现正面$\}$，$B=\{$出现反面$\}$，显然事件A与B是互逆的，即$B=\overline{A}$. 由定义可知$(\overline{\overline{A}})=A$，即$A$是$\overline{A}$的逆.

与集合的运算一样，事件间的基本运算(并、交、逆)满足下述运算规律：

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$；

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$；

(3) 分配律：$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$，$A(B\cup C)=AB\cup AC$；

(4) 对偶(De Morgan)律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

上述运算规律都可以仿照证明集合相等的方法加以证明，这里仅用事件运算的意义给出对偶律的证明：

$$\overline{A\cup B}=\overline{\{A\text{ 与 }B\text{ 中至少有一个发生}\}}=\{A\text{ 与 }B\text{ 都不发生}\}$$
$$=\{\overline{A}\text{ 与}\overline{B}\text{ 同时发生}\}=\overline{A}\,\overline{B}.$$

又因为 $AB=\overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{B}}=\overline{(\overline{A}\cup\overline{B})}$，

所以 $\overline{AB}=\overline{\overline{(\overline{A}\cup\overline{B})}}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

交换律、结合律、分配律、对偶律都可以推广到任意多个事件的情形. 但要注意这些运算规律不是从初等代数运算移过来的，因此不能简单套用代数运算规律，必须通过事件运算的含义来理解. 例如，利用事件运算的含义及上述运算规律还可以得到一些运算规律：

$A\cup A=A$，$AA=A$；

$A\cup\Omega=\Omega$，$A\Omega=A$；

$A\cup\varnothing=A$，$A\varnothing=\varnothing$；

特别是，若$A\subset B$，则$A\cup B=B$，$AB=A$.

这些规律的正确性都要通过相应运算的含义来理解.

7. 事件的差

$\{$事件A发生而事件B不发生$\}$称为事件A与B的**差**，记为$A-B$(或$A\backslash B$). 事件$A-B$是由属于事件A但不属于事件B的样本点组成的子集，其几何直观图如图 1—6 所示(见阴影部分)，并注意$A-B=A-AB$.

需要指出的是，事件的差不是事件的基本运算，也不满足上面的运算规律. 因此，在进行事件的运算时，先将$A-B$用$A\overline{B}$来表示.

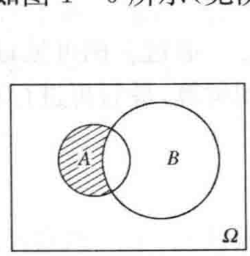

图 1—6 $A-B$

8. 样本空间的划分(或完备事件组)

为了研究某些较复杂的事件，常常需要把试验E的样本空间Ω按样本点的某些属性划分成若干个事件. 一般地，设Ω被划分成n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$，它们满足：

(1) 互斥性：$A_iA_j=\varnothing(i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n)$，

(2) 完全性：$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，

则称这n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$构成样本空间Ω的一个**划分**(或构成一个**完备事件组**).

显然，对任一试验相应的样本空间 Ω，若 $A\subset\Omega$，则由 A 与 $\overline{A}$ 构成 Ω 的一个划分（这时完备事件组由两个事件构成）. 例如，在例 3 中，若将 Ω 的样本点按所含次品的数量分成三类事件：$A_i=$\{取出的 3 件产品中恰有 i 件次品\}，$i=0,1,2$，则事件 A_0,A_1,A_2 构成 Ω 的一个划分；若设事件 $A=$\{取出的 3 件中有两件是次品\}，则事件 A 与 $\overline{A}$ 构成 Ω 的另一个划分.

例 6 设 A_1,A_2,A_3 为三个事件，试用它们表示下列事件：

(1) $A=$\{A_1 发生而 A_2 与 A_3 均不发生\}；

(2) $B=$\{三个事件中恰有两个发生\}；

(3) $C=$\{三个事件中至少有两个发生\}；

(4) $D=$\{三个事件中最多有两个发生\}.

解 (1) $A=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ 或 $A=A_1-A_2-A_3$ 或

$A=A_1-(A_2\cup A_3)$.

(2) $B=A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$ 或

$B=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$.

(3) $C=A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_3A_1$ 或

$C=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3$.

(4) $D=\overline{A_1A_2A_3}$ 或

$$D=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3.$$

例 7 化简下列各式：

(1) $(A\cup B)-(A-B)$；　　(2) $(A\cup B)(A\cup\overline{B})$；

(3) $(A-\overline{B})(\overline{\overline{A}\cup B})$.

解 (1)
$$\begin{aligned}(A\cup B)-(A-B)&=(A\cup B)\overline{(A-B)}\\&=(A\cup B)\overline{(A\overline{B})}=(A\cup B)(\overline{A}\cup B)\\&=A\overline{A}\cup B\overline{A}\cup AB\cup B=\varnothing\cup B\overline{A}\cup AB\cup B=B.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}(A\cup B)(A\cup\overline{B})&=A\cup BA\cup A\overline{B}\cup B\overline{B}\\&=A\cup A(B\cup\overline{B})\cup\varnothing=A\cup A\Omega=A.\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}(A-\overline{B})(\overline{\overline{A}\cup B})&=(A\overline{\overline{B}})(\overline{\overline{A}}\,\overline{B})=(AB)(A\overline{B})\\&=(A\overline{A})(B\overline{B})=\varnothing.\end{aligned}$$

通过上例可见，进行事件运算时，运算的先后顺序是先求逆运算（即求对立事件），再求积运算，最后再进行和的运算；若有括号，则括号内运算优先.

§1.2 随机事件的概率

对于一般的随机事件来说，虽然我们不能预先知道在一次试验中是否发生，但是如果我们独立地重复进行这一试验，就会发现不同事件发生的可能性是有大小之分的. 这种可能性的大小是事件本身固有的一种属性，这是不以人们的意志为转移的. 例如掷一枚骰子，如果骰子是匀称的，那么事件\{出现偶数点\}与事件\{出现奇数点\}的可能性是一样的；而事件\{出

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

现奇数点}要比事件{出现 3 点}的可能性更大. 为了定量地描述随机事件的这种属性,我们先介绍频率的概念.

一、概率的统计定义

1. 频率

定义 1.1 在一组不变的条件 S 下,独立地重复 n 次试验 E. 如果事件 A 在 n 次试验中出现了 μ 次,则称比值 μ/n 为在 n 次试验中事件 A 出现的频率,记为 $f_n(A)$,即

$$f_n(A)=\frac{\mu}{n},$$

其中,μ 称为事件 A 发生的**频数**.

频率具有下述性质:

性质 1 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

性质 2 $f_n(\Omega)=1$;

性质 3 若事件 A 与事件 B 互斥,即 $AB=\varnothing$,则

$$f_n(A+B)=f_n(A)+f_n(B).$$

性质 1、性质 2 是显然的. 关于性质 3 的证明如下:

设在 n 次试验中,事件 A 与事件 B 发生的频数分别为 n_A,n_B,因 A 与 B 互斥,故 $A+B$ 发生的频数 $n_{A+B}=n_A+n_B$,故

$$f_n(A+B)=\frac{n_{A+B}}{n}=\frac{n_A}{n}+\frac{n_B}{n}=f_n(A)+f_n(B).$$

性质 3 还可以推广到 n 个两两互斥事件的情形,即设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互斥的事件,则

$$f_n\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}f_n(A_i).$$

例如,在抛掷一枚硬币时,我们规定条件组 S 为:硬币是匀称的,放在手心上,用一定的动作垂直上抛,让硬币落在一个有弹性的平面上,等等. 当条件组 S 大量重复实现时,事件 $A=$\{出现正面\}发生的次数 μ 能够体现出一定的规律性. 例如,进行 50 次试验出现了 24 次正面,这时

$$n=50,\quad \mu=24,\quad f_{50}(A)=24/50=0.48.$$

一般来说,随着试验次数的增加,事件 A 出现的次数 μ 约占总试验次数的一半,换句话说,事件 A 的频率接近于 1/2.

历史上,不少统计学家,例如皮尔逊(Pearson)等人,做过成千上万次抛掷硬币的试验,其试验记录如下*:

---

* 引自姚孟臣:《大学文科基础数学(第二册)》,86 页,北京,北京大学出版社,1990.

实验者	抛掷次数 n	A 出现的次数 μ	$f_n(A)$
德・摩根(De Morgan)	2 048	1 061	0.518
蒲丰(Buffon)	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊(Pearson)	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊(Pearson)	24 000	12 012	0.500 5

可以看出，当抛掷硬币的次数 n 较大时，频率 $f_n(A)$ 总在常数 0.5 附近波动，并且呈现出逐渐稳定于 0.5 的倾向. 频率的这种逐渐的“稳定性”就是所谓的统计规律性，它揭示了随机现象内部隐藏着的必然规律. 这里的常数 $p=0.5$ 称为频率 $f_n(A)$ 的稳定值，它能反映事件 A 发生的可能性大小. 一般地，每个随机事件都有相应的常数 p 与之对应，因此，我们可以用频率的稳定值定量地描述随机事件发生的可能性大小.

2. 概率的统计定义

定义 1.2 在一组不变的条件 S 下，独立地重复 n 次试验 E. 如果事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 总在区间 $[0,1]$ 上的一个确定的常数 p 附近做微小摆动，而且一般来说，随着 n 的增加，这种摆动的幅度越来越小，则称常数 p 为事件 A 发生的**概率**，记为 $P(A)$，即

$$P(A) = p.$$

概率的统计定义肯定了随机事件的概率存在，但在实际问题中，数 p 往往是未知的. 尽管如此，该定义提供了估算概率的方法，即只要试验次数足够大，可以用事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 近似代替概率 $P(A)$. 这种方法简便且实用，因而应用广泛. 例如，在一定的条件下，100 颗种子中平均来说大约有 90 颗发芽，则我们说种子的发芽率为 90%；又如某工厂平均来说每 2 000 件产品中大约有 20 件废品，则我们说该工厂的废品率为 1%.

例 1 野生资源调查问题 池塘中有鱼若干(不妨假设为 x 条)，先捞上 200 条作记号，放回后再捞上 200 条，发现其中有 4 条带记号. 用 A 表示事件{任捞一条都带记号}，显然

$$\frac{200}{x}, \quad \frac{4}{200}$$

分别是 A 的概率 $P(A)$ 与频率 $f_n(A)$，于是我们可以估算出池中约有 10 000 条鱼。

由频率的三条性质可知，作为频率稳定值的概率也有相应的性质：

性质 1 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$(非负性)；

性质 2 $P(\Omega)=1$(规范性)；

性质 3 若 $AB=\varnothing$，则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$(可加性).

性质 3 同样可以推广到两两互斥的 n 个事件的和事件的情形. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \quad \text{(有限可加性)}.$$

虽然概率的统计定义有它的简便之处，但若试验具有破坏性，不可能进行大量重复试验时，就限制了它的应用. 而对某些特殊类型的随机试验，要确定事件的概率，并不需要做重复

试验，而是根据人类长期积累的关于"对称性"的实际经验提出数学模型，直接计算出来，从而给出概率相应的定义. 这类试验称为**等可能概型试验**. 根据其样本空间 Ω 是有限集还是无限集，可将相应的数学模型分为**古典概型**和**几何概型**.

二、概率的古典定义

1. 古典型随机试验

定义 1.3 若试验具有下列两个特征：

(1) 试验的结果为有限个，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$ (**有限性**)；

(2) 每个结果出现的可能性是相同的，即

$$P(\omega_i)=P(\omega_j)=\frac{1}{n}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)\ (\textbf{等概性}),$$

则称此试验为**古典型随机试验**. 由于这类试验曾是概率论发展初期研究的主要对象，因此称为古典型试验.

2. 概率的古典定义

定义 1.4 设古典型试验 E 的样本空间 Ω 有 n 个样本点，如果事件 A 由其中的 m 个样本点组成，则事件 A 发生的概率 $P(A)$ 为

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

并把利用上述关系式来讨论事件的概率的数学模型称为**古典概型**.

由古典概型的"有限性"及"等可能性"两个特征，不难看出由上述关系式给出的定义的合理性. 在一次试验中，每个样本点出现的可能性大小均为 $\frac{1}{n}$，而事件 A 包含了 m 个样本点，故在一次试验中，事件 A 发生的概率应为 $m\cdot\frac{1}{n}=\frac{m}{n}$.

为了方便起见，我们把事件 A 包含的样本点数 m 记为 m_A，而把事件 B 包含的样本点数记为 m_B，以示区别.

显然，古典概率具有以下性质：

性质 1 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$(非负性)；

性质 2 $P(\Omega)=1$(规范性)；

性质 3 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，则

$$P\Big(\sum_{i=1}^{n}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\quad(\text{有限可加性}).$$

根据概率的古典定义可以计算出古典型随机试验中事件的概率. 在古典概型中确定事件 A 的概率时，只需求出基本事件的总数 n 以及事件 A 包含的基本事件的个数 m. 为此弄清随机试验的全部基本事件是什么以及所讨论的事件 A 包含了哪些基本事件是非常重要的.

例 2 掷两枚匀称的硬币，求它们都是正面的概率.

解 设 $A=\{$出现正正$\}$，其基本事件空间为

$\Omega=\{$正正,反反,反正,正反$\}$, $n=4$.

于是,根据古典概型,$m=1$,于是有

$$P(A)=\frac{1}{4}.$$

例 3 从 10 件产品(其中 2 件次品,8 件正品)中任取 3 件,求这 3 件产品中

(1) 恰有 2 件次品的概率;

(2) 至多有 1 件次品的概率.

解 设 $A=\{$恰有 2 件次品$\}$,$B=\{$至少有 1 件次品$\}$. 因为从 10 件中任取 3 件共有 C_{10}^3 种取法,即 $n=C_{10}^3$,而事件 A 所包含的样本点个数 $m=C_2^2C_8^1$,所以

$$P(A)=\frac{C_2^2C_8^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{15}.$$

由于事件 $\bar{B}=A$, $P(\bar{B})=\frac{1}{15}$,因此

$$P(B)=1-P(\bar{B})=\frac{14}{15}.$$

例 4 从 10 件产品(其中 2 件次品,8 件正品)中每次取 1 件观测后放回,共取 3 次(以后简称为有放回地取 3 件). 求这 3 件产品中

(1) 恰有 2 件次品的概率;

(2) 至多有 1 件次品的概率.

解 设 $A_i=\{$恰有 i 件次品$\}(i=0,1,2)$, $B=\{$至多有 1 件次品$\}$. 因为从 10 件中有放回地取 3 件共有 10^3 种取法,而事件 A_2 所包含的样本点个数 $m=3\times2^2\times8$,所以

$$P(A_2)=\frac{3\times2^2\times8}{10^3}=\frac{12}{125}.$$

同理有

$$P(A_1)=\frac{3\times2\times8^2}{10^3}=\frac{48}{125},$$

$$P(A_0)=\frac{8^3}{10^3}=\frac{64}{125}.$$

由于事件 $B=A_0+A_1$,并且 $A_0A_1=\varnothing$,因此

$$P(B)=P(A_0+A_1)=P(A_0)+P(A_1)=\frac{112}{125}.$$

例 5 设袋中有 10 个外形相同的球(其中有 6 个红球和 4 个白球),现从中任取 3 个,试求:

(1) 取出的 3 个球都是红球的概率;

(2) 取出的 3 个球中恰有一个是白球的概率.

解 本题在利用排列与组合知识计算其样本空间的样本点总数时,相当于把外形相同的球编号,1～6 号表示红球,7～10 号表示白球,看成 10 个不同的球,从中任意取 3 个球,共有 C_{10}^3种不同的取法,每种取法都对应一个样本点,所以,该试验的样本点总数为 $n=C_{10}^3$.

(1) 设 $A=\{$取出的 3 个球都是红球$\}$,而事件 A 包含了 $m=C_6^3$ 个样本点,则

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}.$$

(2) 设 $B=\{$取出的 3 个球中恰有一个是白球$\}$，而事件 B 包含的样本点数 $m=C_4^1C_6^2$，则

$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}.$$

本题称为**随机取球问题**，古典概型大部分问题都能用随机取球"模型"来描述. 例如，在例 3、例 4 中把球看成产品，则产品抽样检查就是其中之一.

在例 5 中，我们也可以使用排列来计算 n 与 m，如(1)中的 $n=P_{10}^3$，$m=P_6^3$.

由此可见，对同一问题，若解决问题的思路不同，所对应的试验也不同，从而样本空间的"设计"与样本点的计数方法也不同，但所求的概率应该是相同的.

例 6 一批产品有 N 件，其中有 M 件次品，其余都是正品. 现从中随机地抽取 n 件产品($n\leqslant N,M<N$). 试求恰好取到 k 件次品的概率($k=0,1,2,\cdots,l$，其中 $l=\min\{n,M\}$).

解 试验是从 N 件产品中随机抽取 n 件，共有 C_N^n 种不同的取法，试验相应的样本点总数为 C_N^n. 设 $A=\{$恰好取到 k 件次品$\}$. 而对事件 A 发生的有利取法是：先从 M 件次品中任取 k 件，有 C_M^k 种不同的取法，而后从 $N-M$ 件产品中抽取其余的 $n-k$ 件，有 C_{N-M}^{n-k} 种不同取法，由乘法原理可知，共有 $C_M^kC_{N-M}^{n-k}$ 种不同的取法，相应的事件 A 包含的样本点数为 $C_M^kC_{N-M}^{n-k}$，故

$$P(A)=\frac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},$$

其中，$k=0,1,2,\cdots,l$，$l=\min\{n,M\}$.

上面的公式在产品计件抽样检查时经常使用，在第 2 章中我们还将用到它.

例 7 设袋中有 a 个白球和 b 个红球，现按无放回抽样，依次把球一个个取出来. 试求第 k 次取出的球是白球的概率($1\leqslant k\leqslant a+b$).

解 *解法 1* 依题意，试验是从 $a+b$ 个球中不放回地把球一个个取出来，依次排队，共有$(a+b)!$ 种不同的排法，则相应的样本点总数 $n=(a+b)!$. 设 $A=\{$第 k 次取出的球是白球$\}$. 对事件 A 发生的有利排法是，先从 a 个白球中任取一个排在第 k 个位置上，然后再把其余的 $a+b-1$ 个球排在 $a+b-1$ 个位置上，共有 $P_a^1\cdot(a+b-1)!$ 种不同的排法，所以，事件 A 包含的样本点数 $m=P_a^1(a+b-1)!$，故

$$P(A)=\frac{P_a^1(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

解法 2 只考虑前 k 次取球. 试验可看作对一次取 k 个球进行排队，共有 P_{a+b}^k 种不同排法，相应的样本点总数 $n=P_{a+b}^k$. 事件 A 如解法 1 所设，则对事件 A 发生有利的排法是，先从 a 个白球中任取一个排在第 k 个位置上，而后从其余的 $a+b-1$ 个球中任取 $k-1$ 个球排在前 $k-1$ 个位置上，共有 $P_a^1P_{a+b-1}^{k-1}$ 种不同排法，所以，事件 A 包含的样本点数 $m=P_a^1P_{a+b-1}^{k-1}$. 故

$$P(A)=\frac{P_a^1P_{a+b-1}^{k-1}}{P_{a+b}^k}=\frac{a}{a+b}.$$

上面两种解法的计算结果表明,事件 $A=\{$第 k 次取出的球是白球$\}$的概率 $P(A)$ 与 k 无关,即 A 发生的概率与取球的先后次序无关.这就是所谓的**“抽签原理”**.无论从日常的经验,还是通过计算概率,抽签原理表明,是否能抽到“签”与抽签的先后次序无关,人人机会均等.因而常用在体育比赛或机会均等的其他活动场合.

上面我们介绍了古典型概率计算的一些基本方法,但是并非所有的古典概型中的概率计算都如此容易.事实上,对于古典概型中的不少问题,计算其概率是相当困难的.需要指出的是,古典概型虽然是本课程中的一个难点,但不是重点.我们只要掌握它的最基本方法就可以了.下面我们再举个例子来介绍一种解题方法.

例 8 从 52 张扑克牌中任取 13 张,求

(1) 至少有两种 4 张同号的概率;

(2) 恰有两种 4 张同号的概率.

解 设 $A=\{$至少有两种 4 张同号$\}$, $B=\{$恰有两种 4 张同号$\}$.根据古典概型,样本空间样本点的总数为

$$n=C_{52}^{13}.$$

我们先从 13 种号中任取 2 种(代表两种 4 张同号,这时我们已经取到 8 张),再从剩下的 $52-8=44$ 张牌中任取 5 张,但这样一来可能会产生三种 4 张同号重复出现,因此要减去 $2C_{13}^{3}C_{40}^{1}$.因此

$$m_1=C_{13}^{2}C_{44}^{5}-2C_{13}^{3}C_{40}^{1},$$

于是 $$P(A)=\frac{m_1}{n}=(C_{13}^{2}C_{44}^{5}-2C_{13}^{3}C_{40}^{1})/C_{52}^{13}.$$

由上面的分析可知

$$P(B)=(C_{13}^{2}C_{44}^{5}-3C_{13}^{3}C_{40}^{1})/C_{52}^{13}.$$

三、概率的几何定义

我们知道,古典概型要求试验的样本空间只含有限个等可能的样本点.在实际问题中,若试验的样本空间有无限多个样本点时,就不能按古典概型来计算概率,而在有些场合可借用几何方法来定义概率.

1. 几何型试验

定义 1.5 若试验具有下列两个特征:

(1) 试验的结果为无限不可数,

(2) 每个结果出现的可能性是均匀的,

则称该试验为**几何型试验**.这样,该试验的每个样本点可看作等可能地落入有界区域 Ω 上的随机点,因此,样本点有无限多个.

2. 概率的几何定义

定义 1.6 设 E 为几何型的随机试验,其基本事件空间中的所有基本事件可以用一个有界区域来描述,而其中一部分区域可以表示事件 A 所包含的基本事件,则称事件 A 发生的概率为

试读结束,需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com