普通高等教育“十二五”规划教材

XINGSHI YUYAN YU ZIDONGJI

形式语言与自动机

（第2版）

杨娟　石川　王柏　主编

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

普通高等教育"十二五"规划教材

形式语言与自动机

（第2版）

杨娟　石川　王柏　主编

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内容简介

本书扼要地介绍了形式语言与自动机的基本体系，是学习计算机科学基础的教材和参考书。书中主要介绍了形式语言的基本概念、自动机模型以及形式语言与自动机的等价性，包括右线性文法与有限自动机、上下文无关文法与下推自动机、图灵机以及无限制文法等。同时也介绍了形式语言与自动机的主要理论成果和应用实例。

本书不追求过多形式化讨论，强调基本概念的直观背景和主要定理证明的思路分析。书中配有较多的例题和习题，可作为工科计算机专业本科生的教材和研究人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

形式语言与自动机 / 杨娟，石川，王柏主编. -- 2 版. -- 北京：北京邮电大学出版社，2017.2
ISBN 978-7-5635-4997-9

Ⅰ.①形… Ⅱ.①杨… ②石… ③王… Ⅲ.①形式语言—高等学校—教材②自动机理论—高等学校—教材 Ⅳ.①TP301.2②TP301.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 314682 号

书　　名：形式语言与自动机(第 2 版)
著作责任者：杨　娟　石　川　王　柏　主编
责 任 编 辑：徐振华　马晓仟
出 版 发 行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号(邮编：100876)
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：13.75
字　　数：339 千字
版　　次：2003 年 2 月第 1 版　2017 年 2 月第 2 版　2017 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-4997-9　　定价：29.00 元

·如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系·

第 2 版前言

形式语言与自动机是计算机科学的基础理论之一，是计算机科学与技术专业的重要理论基础课程。形式语言与自动机是数学系统应用于计算的模型，在编译理论、人工智能、现代密码协议、生物工程、图像处理与模式识别及通信等许多领域有着极其广泛的应用。

《形式语言与自动机》一书系 21 世纪计算机科学与技术系列教材，自 2003 年 2 月出版以来，一直作为北京邮电大学计算机学院本科生“形式语言与自动机”课程和研究生选修课教材，同时也作为工科计算机专业研究人员的参考书，供广大科技工作者参考使用。

作为第 2 版，本书保留了原书的风格和基本内容，不追求过多形式化讨论，强调基本概念的直观背景和主要定理证明的思路分析。与第 1 版相比，除了对原书中的错误和疏漏之处进行订正之外，主要在以下几个方面进行了修订。

(1) 丰富了原书的内容，在第 3 章和第 4 章增加了形式语言与自动机方面主要理论成果的应用实例。

(2) 为了帮助理解形式语言与自动机的主要内容和知识点，在各章增加了一节典型习题解析，以便掌握主要概念、解题方法和技巧。

(3) 丰富和完善了各章节的例题和习题。

本书在立项、编写和出版的过程中，得到了北京邮电大学出版社的大力支持和帮助，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中不足之处在所难免，恳请各位专家和广大读者批评指正。

编　者
2016 年 10 月

第1版前言

任何一门科学都有它自身的理论基础，计算机科学也不例外。计算机技术变化很快，专门的技术知识今天有用，但常常在几年内就变成过时的东西。我们更应该培养思考的能力、清楚而准确地表达自己的能力、解决问题的能力以及知道问题什么时候还没有解决的能力。这些能力具有持久的价值。学习理论能够拓展人们的思维，并能使人们在这些方面得到训练。

形式语言与自动机是将数学系统应用于计算的模型。本课程重点介绍了形式语言及与之相对应的自动机体系。形式语言给出了对语言的语法规则进行描述和分类的形式化方法；而自动机则描述了能够识别语言的自动装置。这种形式化描述方法及自动机的工作原理是课程的核心内容，在编译理论、人工智能、电路设计、现代密码协议及通信等领域都有着极为广泛的应用，是每个对计算机科学感兴趣的人应该熟悉的内容。

本书共分7章。第1章是预备知识。第2章至第5章讨论了Chomsky四类文法所产生的语言和这些语言的识别装置。在这几章中，较详尽地论述了在计算机科学中有重大意义的3型文法与有限自动机、2型文法与下推自动机，并简要地介绍了0型文法与图灵机，形成了较完整的理论体系。第6章简单介绍了前几章的理论与方法在编译方面的应用。第7章讨论了自动机理论在通信领域的某些应用。附录中简要介绍了计算复杂性理论。为避免过分形式化，本书强调基本概念的直观背景，主要定理证明的思路分析和各部分内容的内在联系，并配有较多的例题和习题，使比较抽象的概念、理论易于理解与接受。

本书是在北京邮电大学陈崇昕教授1988年编写的《形式语言与自动机》这一教材的基础上结合编者的教学实践扩充、修改而成，在此谨向陈教授表示衷心感谢。同时，北京邮电大学出版社为本教材的顺利出版付出了很大努力，谨此一并致以诚挚的谢意。

由于编者水平所限，书中的不足之处在所难免，请广大专家和读者批评指正。

编　者

2002年12月

目　录

第1章　基础知识

作为阅读本书的一些基础知识，本章引入有关集合、逻辑、图和证明技术等方面的基本概念。熟悉这些内容的读者可略去本章，直接学习第2章。

1.1　集合与关系

1. 集合

当研究某一类对象时，可把这类对象的整体称为**集合**，组成一个集合的对象称为该集合的**元素**。

设 A 是一个集合，a 是集合 A 中的元素，可表示为 $a\in A$，读作 a 属于 A。如果 a 不是集合 A 的元素，则表示为 $a\notin A$，读作 a 不属于 A。

例如，26个小写英文字母可组成一个字母集合 A，每个小写字母皆属于 A，可写为 $a\in A,b\in A,\cdots,z\in A$。所有阿拉伯数字都不属于 A，则有 $2\notin A,8\notin A$ 等。

注意： 为书写方便，今后对 $a\in A,b\in A,\cdots,z\in A$，可改写为 $a,b,\cdots,z\in A$。

有限个元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 组成的集合，称为**有限集合**。无限个元素组成的集合，称为**无限集合**。例如，整数构成的集合是一个无限集合。

不含元素的集合，称为**空集**，记为$\varnothing$。

集合的表示法，有列举法和描述法。

列举法　列举法是把集合的元素一一列举出来。例如26个小写英文字母组成的集合 A，可写成 $A=\{a,b,c,\cdots,z\}$；阿拉伯数字的集合 $D=\{0,1,2,\cdots,9\}$，以及集合 $C=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$等。

描述法　描述法是描述出集合中元素所符合的规则。

例如，$\mathbf{N}=\{n\mid n$ 是自然数$\}$，表明是自然数集合$\mathbf{N}$。

$A=\{x\mid x\in\mathbf{Z}$且 $0\leqslant x\leqslant 5\}$，其中$\mathbf{Z}$是整数集合，则$A=\{0,1,2,3,4,5\}$。

2. 集合之间的关系

(1) 设两个集合 A、B 包含的元素完全相同，则称集合 A 和 B 相等，表示为 $A=B$。

例如，集合 $A=\{a,b,c\}$，集合 $B=\{b,a,c\}$，则有 $A=B$。

应指出，一个集合中元素排列的顺序是无关紧要的。

有限集合 A 中不同元素的个数称为**集合的基数**，表示为$\# A$或$|A|$。

例如，$B=\{a,b,c,4,8\}$，其基数$\# B=5$。

(2) 设两个集合 A、B，当 A 的元素都是 B 的元素，则称 A 包含于 B，或称 A 是 B 的子集，表示为 $A\subseteq B$。当 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$ 时，称 A 是 B 的真子集，表示为 $A\subset B$。

如果所研究的集合皆为某个集合的子集时,称该集合为**全集**,记为 E。

(3) 根据(1)和(2),对于任意两个集合 A、B,$A=B$ 的充要条件是 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$。

3. 幂集

设 A 是集合,A 的所有子集组成的集合称为 A 的**幂集**,表示为 2^A 或 $\rho(A)$。

例如,$A=\{a,b,c\}$,则有

$$\rho(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$$

当 A 是有限集,$\# A=n$,则 $\rho(A)$的元素数为

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$$

应指出,空集$\varnothing$是任何集合的一个子集。

4. 集合的运算

(1) 设两个集合 A、B,由 A 和 B 的所有共同元素构成的集合,称为 A 和 B 的**交集**,表示为 $A\cap B$。

例如,$A=\{a,b,c\}$,$B=\{c,d,e,f\}$,则 $A\cap B=\{c\}$。

(2) 设两个集合 A、B,所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合,称为 A 和 B 的**并集**,表示为 $A\cup B$。

例如,$A=\{a,b\}$,$B=\{7,8\}$,则 $A\cup B=\{a,b,7,8\}$。

(3) 设两个集合 A、B,所有属于 A 而不属于 B 的一切元素组成的集合,称为 B 对 A 的**补集**,表示为 $A-B$。

例如,$A=\{a,b,c,d\}$,$B=\{c,d,e\}$,则 $A-B=\{a,b\}$,$B-A=\{e\}$。

设全集 E 和集合 A,则称 $E-A$ 是集合 A 的补集,表示为 $\overline{A}$。

(4) 设两个集合 A、B,所有序偶(a,b)组成的集合,称为 A、B 的**笛卡儿乘积**,表示为 $A\times B$。

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A \text{ 且 } b\in B\}$$

例如,$A=\{a,b,c\}$,$B=\{0,1\}$,则 $A\times B=\{(a,0),(a,1),(b,0),(b,1),(c,0),(c,1)\}$。

序偶的元素排列是有顺序的,不能任意颠倒,(a,b)和(b,a)是不相同的两个序偶,因此两个序偶相等,应该是对应元素相同,例如,$(a,b)=(c,d)$,应有 $a=c$ 和 $b=d$。

对任意集合 A、B、C 有如下运算律:

(1) $A\cup A=A$,$A\cap A=A$;

(2) $A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$;

(3) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,
$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(4) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(5) $A\cup(A\cap B)=A$,$A\cap(A\cup B)=A$;

(6) $A\cup\overline{A}=E$,$A\cap\overline{A}=\varnothing$;

(7) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$;

(8) $E\cup A=E$,$E\cap A=A$;

(9) $A\cup\varnothing=A$,$A\cap\varnothing=\varnothing$。

5. 关系

关系的概念在数学中是常用的,诸如大于、小于、等于、包含等都属于关系。下面给出关

系的形式定义。

定义 1.1.1　设 A 是一个集合，$A\times A$ 的一个子集 R，称为是集合 A 上的一个二元关系，简称**关系**。

对于 $a\in A,b\in A$，如果 $(a,b)\in R$，称 a 和 b 存在关系 R，表示为 aRb；如果 $(a,b)\notin R$，称 a 和 b 不存在关系 R，表示为 $a\not R b$。

例如，自然数集合 $\mathbf{N}$ 中的大于关系，可表示为

$$>=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbf{N}\text{且 }a>b\}$$

当有两个集合 A、B，则从 A 到 B 的关系是 $A\times B$ 的一个子集。

例 1　设 $A=\{x,y,z\}$，$B=\{0,1\}$

$$A\times B=\{(x,0),(x,1),(y,0),(y,1),(z,0),(z,1)\}$$

则下列子集均为从 A 到 B 的关系：

$$R_1=\{(x,0),(y,0)\}$$

$$R_2=\{(x,1),(y,1),(z,0)\}$$

$$R_3=\{(y,0)\}$$

定义 1.1.2　设集合 A，R 是 A 上的关系：

- 对每个 $a\in A$，如果有 aRa，称 R 是自反的；
- 对于 $a,b\in A$，如果有 aRb，又有 bRa，称 R 是对称的；
- 对于 $a,b\in A$，如果有 aRb 和 bRa，则必有 $a=b$，称 R 是反对称的；
- 对于 $a,b,c\in A$，如果有 aRb 和 bRc，则有 aRc，称 R 是传递的；
- 对每个 $a\in A$，如果 $a\not R a$，称 R 是反自反的。

例如，数之间的相等关系，具有自反性、对称性和传递性，小于关系和大于关系没有自反性，但有传递性。

定义 1.1.3　设 R 是非空集合 A 上的一个关系，如果 R 有自反性、对称性和传递性，则称 R 是一个等价关系。

由等价关系 R 可以把 A 分为若干子集，每个子集称为一个等价类，同一等价类中的元素互相是等价的。

例 2　设 $\mathbf{Z}$ 是整数集合，R 是 $\mathbf{Z}$ 上模 3 同余关系，也是一个等价关系，即

$$R=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{Z}\text{且 }x\equiv y\pmod 3\}$$

由于 R 是等价关系，则存在 3 个等价类为

$$[0]_R=\{\cdots,-6,-3,0,3,6,\cdots\}$$

$$[1]_R=\{\cdots,-5,-2,1,4,7,\cdots\}$$

$$[2]_R=\{\cdots,-4,-1,2,5,8,\cdots\}$$

其中 $[0]_R$，$[1]_R$，$[2]_R$ 是表示等价类的符号。

6. 逆关系

设 R 是集合 A 上的一个关系，则

$$R^{-1}=\{(y,x)\mid x,y\in A\text{ 且有 }(x,y)\in R\}$$

称 R^{-1} 是关系 R 的**逆关系**。

例如，小于关系的逆关系是大于关系；相等关系的逆关系仍然是相等关系。

7. 偏序关系

定义 1.1.4 设 R 是集合 A 上的一个关系,如果 R 有自反性、反对称性和传递性,则称 R 是**偏序关系**(或部分序关系)。

例 3 设集合 $C=\{2,3,6,8\}$,R 是集合 C 上的整除关系,即

$$R=\{(x,y)\mid x,y\in C \text{ 且 } x \text{ 整除 } y\}$$

可得

$$R=\{(2,2),(3,3),(6,6),(8,8),(2,6),(2,8),(3,6)\}$$

例 4 设集合 $A=\{a,b\}$,幂集 $\rho(A)$ 上的包含关系$\subseteq$,是一个偏序关系。这里

$$\rho(A)=(\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\})$$

在 $\rho(A)$ 上的包含关系可用图的方法表示,如图 1.1.1 所示。

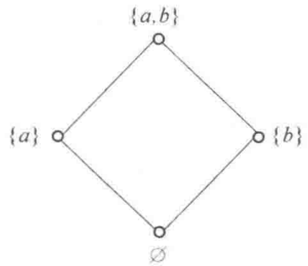


图 1.1.1 $\rho(A)$上的包含关系

描写偏序关系的图称为**哈斯图**。结合本例说明哈斯图的画法:由于 $\rho(A)$中存在$\{a\}\subseteq\{a,b\}$,所以哈斯图中有一条从节点$\{a\}$到节点$\{a,b\}$的边,这条边是自下而上的。又因$\varnothing\subseteq\{a\}$,故从节点$\varnothing$到节点$\{a\}$也存在一条自下而上的边。而对于$\varnothing\subseteq\{a,b\}$,由于以上两条边的存在,靠偏序关系的传递性,从节点$\varnothing$到节点$\{a,b\}$之间的边是不必要的。

8. 关系的闭包

定义 1.1.5 设 R 是集合 A 上的关系,如果另有关系 R'满足:

(1) R'是传递的(自反的、对称的);

(2) $R'\supseteq R$;

(3) 对任何传递的(自反的、对称的)关系 R'',当有 $R''\supseteq R$,就有 $R''\supseteq R'$,则称关系 R'是 R 的传递(自反、对称)闭包。

R 的自反闭包表示为 $r(R)$,R 的对称闭包表示为 $s(R)$,R 的传递闭包表示为 $t(R)$。

如果给定一个集合 A 上的关系 R,可用以下方法找出传递闭包 $t(R)$,自反闭包 $r(R)$和对称闭包 $s(R)$:

(1) $r(R)=R\cup I_A$,其中 $I_A=\{(x,x)\mid x\in A\}$;

(2) $s(R)=R\cup R^{-1}$;

(3) $t(R)=R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n$,其$\# A=n$。

例 5 设集合 $A=\{a,b,c\}$,A 上的关系 $R=\{(a,b),(b,b),(b,c)\}$,则 R 的传递闭包为

$$t(R)=\{(a,b),(b,b),(b,c),(a,c)\}$$

而 R 的自反传递闭包表示为

$$\text{tr}(R)=\{(a,a),(a,b),(b,b),(b,c),(a,c),(c,c)\}$$

今后用 R^+ 表示 R 的传递闭包,用 R^* 表示 R 的自反传递闭包。

9. 映射

映射是关系的一个特殊类型,也称函数。

定义 1.1.6 设集合 A 和 B,f 是从 A 到 B 的一个关系,如果对每一个 $a\in A$,有唯一的 $b\in B$,使得$(a,b)\in f$,称关系 f 是函数,记为 $f:A\rightarrow B$。

如果存在$(a,b)\in f$，则 a 是 f 的自变量，b 是 f 作用下 a 的像点，因此$(a,b)\in f$ 也可写成 $f(a)=b$。

由定义 1.1.6 可知，函数有如下特点：

(1) 函数 f 的定义域是 A，不能是 A 的某个真子集。

(2) 一个 $a\in A$ 只能对应于唯一的一个 b，或者说 $f(a)$是单值的。f 的值域是 B 的子集，记为 R_f。

例 6　设集合 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{x,y\}$

$$f_1=\{(a,x),(b,x),(c,y)\}$$
$$f_2=\{(a,y),(b,y),(c,y)\}$$
$$f_3=\{(a,y),(b,x),(c,x)\}$$
$$f_4=\{(a,x),(a,y),(b,x)\}$$
$$f_5=\{(a,x)\}$$

其中，f_1、f_2 和 f_3 均为函数，f_4 和 f_5 不是函数，是关系。

函数的几种特殊类型是：

(1) 对于 $f:A\to B$。如果 f 的值域 $R_f=B$，即 B 的每一个元素都是 A 中一个或多个元素的像点，则称 f 是满射的。

例如，集合 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{x,y,z\}$，如果 $f:A\to B$ 为

$$f(a)=x,f(b)=x,f(c)=y,f(d)=z$$

则 f 是满射的。

(2) 对于 $f:A\to B$。如果 A 中没有两个元素有相同的像点，则称 f 是入射的，即对于任意 $a_1,a_2\in A$：

如果 $a_1\neq a_2$，则有 $f(a_1)\neq f(a_2)$，或者如果 $f(a_1)=f(a_2)$，则有 $a_1=a_2$。

例如，集合 $A=\{a,b\}$，$B=\{x,y,z\}$，如果 $f:A\to B$ 为 $f(a)=x$，$f(b)=y$，则称 f 是入射的。

(3) 对于 $f:A\to B$。如果 f 既是满射的，又是入射的，则称 f 是双射的，或称是一一对应的。

例如，集合 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{1,2,3\}$，如果 $f:A\to B$ 为

$$f(a)=3,f(b)=1,f(c)=2$$

则称 f 是双射的，或者说是一一对应的。

10. 集合的划分

定义 1.1.7　设非空集合 A，$\Pi=\{\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_n\}$，其中 $\pi_i\subseteq A$，$\pi_i\neq\varnothing(i=1,2,\cdots,n)$，如果有 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}\pi_i=A$ 且 $\pi_i\cap\pi_j=\varnothing(i\neq j)$，则称$\Pi$是 A 的划分。其中 π_i 是一个划分块。

例如，集合 $S=\{a,b,c,d\}$，考虑下列集合：

$$A=\{\{a,b\},\{c,d\}\}$$
$$B=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}$$
$$C=\{\{a\},\{b,c,d\}\}$$
$$D=\{\{a,b,c,d\}\}$$
$$E=\{\{a,b\},\{b,c,d\}\}$$
$$F=\{\{a,b\},\{c\}\}$$

则 A、B、C 和 D 都是 S 的划分,E 和 F 则不是 S 的划分。

11. 集合的基数(或势)

对于有限集而言,所谓集合的基数,即为集合中不同元素的个数。但对于无限集来说,集合的基数是什么?两个无限集的基数是否相同呢?在讨论了函数之后,可以使用一一对应(双射)来讨论集合的基数。

定义 1.1.8 设有集合 A、B,如果存在双射函数 $f:A\to B$,则说 A 和 B 有相同的基数,或者说 A 和 B 等势,记为 $A\sim B$。

显然,对于有限集合 A 和 B,称它们有相同的基数,是指它们的元素个数相同。对于无限集,可以看例 7。

例 7 设偶数集合 $N_e=\{2,4,6,\cdots\}$,定义函数 $f:\mathbf{N}\to N_e$,$\mathbf{N}$为自然数集合。如果对每个 $n\in\mathbf{N}$,有 $f(n)=2n$,显然 f 是从$\mathbf{N}$到N_e 的双射,所以存在$\mathbf{N}\sim N_e$。

例 7 说明,一个无限集,存在着它与其自身的一个真子集有相同的基数。这里 N_e 和自然数集合都是无限集。

通常,考虑一个无限集的基数时,总是看它与自然数集合能否建立一一对应。能与自然数集合建立一一对应的无限集称为**可数集**;不能与自然数集合建立一一对应的无限集称为**不可数集**。

例如:整数集合是可数集;集合$\{1,3,5,7,\cdots\}$是可数集;实数集合$\mathbf{R}$是不可数集;集合$\{x\mid x\in\mathbf{R},0<x<1\}$是不可数集,其中$\mathbf{R}$是实数的集合。

1.2 逻辑

1. 命题与连接词

命题是一个能判断真假的陈述句,一般可用一个大写英文字母表示一个命题。例如下列语句皆为命题:

P:3 是奇数

Q:铜是金属

R:1 加 4 是 2

可见,命题P和命题Q的真值均为真(T),命题R的真值为假(F)。

连接词用于把命题构成复合命题,连接词包括“非”“与”“或”和“蕴含”。通常用符号“$\neg$”表示“非”,符号“$\wedge$”表示“与”、符号“$\vee$”表示“或”和符号“$\to$”表示“蕴含”。下面用真值表的方法,给出这些连接词的定义,如表 1.2.1 所示。

表 1.2.1 连接词的真值表

P	Q	$\neg P$	$P\wedge Q$	$P\vee Q$	$P\to Q$
F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F
T	T	F	T	T	T

表 1.2.1 表明：

当命题P和Q的真值皆为真时，当且仅当复合命题 $P\wedge Q$ 的真值为真。其他情况 $P\wedge Q$ 的真值均为假。

当命题 P 和 Q 的真值皆为假时，当且仅当复合命题 $P\vee Q$ 的真值为假。其他情况 $P\vee Q$ 均为真。

当命题 P 为真且命题 Q 为假时，当且仅当复合命题 $P\rightarrow Q$ 的真值为假。其他情况 $P\rightarrow Q$ 均为真。

至于连接词"非"可对命题进行否定，当命题 P 为真，则有$\neg P$ 为假。

2. 命题"P 当且仅当 Q"

通常在定理(或命题)证明中，如果将两个命题 P、Q 用当且仅当连接起来，读为"P 当且仅当 Q"或"P 是 Q 的充要条件"。"当且仅当"在逻辑上也是一个连接词，可用符号"$\leftrightarrow$"表示。下面先用真值表给出连接词"$\leftrightarrow$"的定义，以及它与连接词"$\rightarrow$"的关系，如表 1.2.2 所示。

由表 1.2.2 可知，复合命题 $P\leftrightarrow Q$ 与复合命题$(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$有相同的真值，故称两者是等价的，可写为

$$P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$$

表 1.2.2　$p\leftrightarrow q$ 的真值表

P	Q	$P\leftrightarrow Q$	$P\rightarrow Q$	$Q\rightarrow P$	$(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$
F	F	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F
T	F	F	F	T	F
T	T	T	T	T	T

因此证明"P 当且仅当 Q"为真，应当证明"P 蕴含 Q"和"Q 蕴含 P"皆为真。对于复合命题 $P\rightarrow Q$ 存在着它的变换式，如表 1.2.3 所示。因此要证明"P 蕴含 Q"为真，也可去证明"非 Q 蕴含非 P"为真。

表 1.2.3　$P\rightarrow Q$ 的真值表

P	Q	$P\rightarrow Q$	$\neg Q\rightarrow\neg P$
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	T	T	T

3. 命题的演算律

下面是基本的命题演算律，可用真值表予以证明。

(1) $\neg\neg P\Leftrightarrow P$

(2) $P\vee P\Leftrightarrow P$

　　$P\wedge P\Leftrightarrow P$

(3) $P\vee Q\Leftrightarrow Q\vee P$

$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$

(4) $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

(5) $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$

$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$

(6) $\neg (P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

$\neg (P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

(7) $P \vee \mathrm{F} \Leftrightarrow P$

$P \wedge \mathrm{T} \Leftrightarrow P$

(8) $P \vee \mathrm{T} \Leftrightarrow \mathrm{T}$

$P \wedge \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{F}$

1.3 图

本节将讨论图论的一些基本概念。

定义 1.3.1 一个图是一个三元组(V,E,ψ),其中V是非空的节点集合,E是边的集合,ψ是从边集合E到节点无序偶或有序偶集合上的函数。

例 1 $G=(V,E,\psi)$,其中

$$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$$
$$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$$
$$\psi(e_1)=(v_1,v_2)$$
$$\psi(e_2)=(v_1,v_3)$$
$$\psi(e_3)=(v_2,v_4)$$
$$\psi(e_4)=(v_2,v_3)$$
$$\psi(e_5)=(v_4,v_3)$$
$$\psi(e_6)=(v_1,v_4)$$

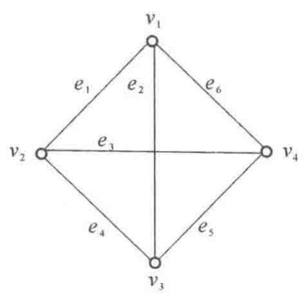
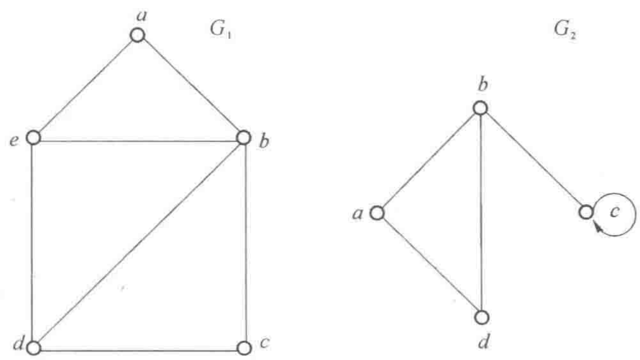


图 1.3.1 G图

用图形表示一个图,例1可表示为图1.3.1。

图中的边总是与两个节点关联,所以一个图一般表示为二元组,即$G=(V,E)$,若边e_k与节点无序偶(v_i,v_j)相关联,则称该边为无向边。若边e_k与节点有序偶(v_i,v_j)相关联,则称该边为有向边,其中v_i为边e_k的起始节点,v_j为终止节点。

如果一个图中的每条边都是无向边,称该图为无向图,如图1.3.2(a)所示。如果一个图中的每条边都是有向边,称该图为有向图,如图1.3.2(b)所示。



(a)　　　　(b)

图 1.3.2　无向图与有向图

图 1.3.2(a)和(b)所示的两个图，分别表示为

$G_1=(V,E)$，其中

$$V=\{a,b,c,d,e\}$$

$$E=\{(a,b),(a,e),(b,c),(b,e),(b,d),(c,d),(d,e)\}$$

$G_2=(V,E)$，其中

$$V=\{a,b,c,d\}$$

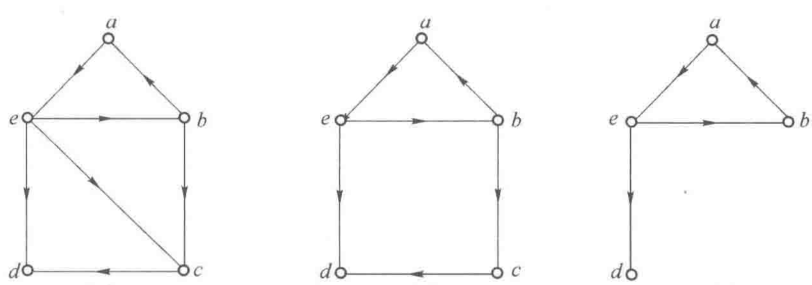
$$E=\{(a,b),(a,d),(b,d),(b,c),(c,c)\}$$

图中，如果两个节点由一条有向边或一条无向边关联，则称这两个节点是邻接点。关联于同一节点的两条边称邻接边。关联于同一节点的一条边称为自闭路，如图 1.3.2(b)中(c,c)是一条自闭路。

在研究和描述图的性质和图的局部结构中，子图的概念是很重要的。下面给出子图的定义：

定义 1.3.2　设图 $G=(V,E)$ 和图 $G_1=(V_1,E_1)$，如果 $V_1\subseteq V$ 且 $E_1\subseteq E$，则称 G_1 是 G 的子图；如果 $V_1\subset V$ 且 $E_1\subset E$，则称 G_1 是 G 的真子图；如果 $V_1=V$ 且 $E_1\subseteq E$，则称 G_1 是 G 的生成子图。

例 2　图1.3.3中，(b)和(c)均为(a)的子图，又(b)是(a)的生成子图。



(a)　　　　(b)　　　　(c)

图 1.3.3　图与子图