学府考研
十年专注·只做考研

2018

概·率·统·计
名师辅导讲义

◎刘贤 编

数学全程答疑

下载答疑APP

基础薄弱考生专用

考研数学复习必备·紧扣浙大四版教材

西北工业大学出版社

学府考研
十年专注·只做考研

Gailü Tong ji Mingshi Fudao Jiangyi

概率统计名师辅导讲义

刘 贤 编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是严格按最新《全国硕士研究生入学统一考试大纲》(数学)的要求编写的,分为名师讲义和典型习题及解答两部分.在名师讲义中,对随机事件与概率、一维随机变量、二维随机变量、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念和参数估计与假设检验等7大类知识点进行详细的讲解.典型习题及解答对应于名师讲义,设置相应的习题及答案解析,以使考生在熟练掌握基本概念、基本理论的基础上,将分析与解决问题的能力提升到轻松解答真题的水平,为考生取得考研数学高分奠定基础.

本书可作为备战2018年研究生入学考试的学生、提前备战2019年研究生入学考试的学生的辅导用书,也可供从事本专业教学的教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率统计名师辅导讲义 / 刘贤编. —西安 :西北工业大学出版社,2017.4
ISBN 978-7-5612-5306-9

Ⅰ.①概… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①概率统计—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①O211

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第084962号

策划编辑:杨 军
责任编辑:孙 倩

出版发行:西北工业大学出版社
通信地址:西安市友谊西路127号 **邮编**:710072
电 话:(029)88493844 88491757
网 址:www.nwpup.com
印 刷 者:西安东江印务有限公司
开 本:787 mm×1 092 mm 1/16
印 张:15
字 数:359千字
版 次:2017年4月第1版 2017年4月第1次印刷
定 价:36.80元

风雨考研路　学府伴你行

“学府考研”是学府教育旗下专业从事考研辅导的品牌！

“学府考研”是一个为实现人生价值和理想而欢聚一堂的团队。2006 年从 30 平方米办公室起步，历经十年，打造了一个考研培训行业的领军品牌。如今学府考研已发展成为集考研培训、图书编辑、在线教育为一体的综合性教育机构，扎根陕西，服务全国。

学府考研的辅导体系满足了考研学子不同层面的需求，主要以小班面授教学、全日制考研辅导、网络小班课为核心，兼顾大班教学、专业课一对一辅导等多层次辅导。学府考研在教学中的“讲、练、测、评、答”辅导体系，解决了考研辅导“只管教，不管学”的问题，保证学员在课堂上听得懂，课下会做题。通过定期测试，掌握学员的学习进度，安排专职教师答疑，保证学习效果。总结多年教学实践经验，学府考研逐渐形成了稳定的辅导教学体系，尽量做到一个学员一套学习计划、一套辅导方案，大大降低了学员考取目标院校的难度。在公共课教学方面实现零基础教学，在专业课方面，建立了遍及全国各大高校的研究生专业信息资源库，解决考生跨院校、跨专业造成的信息不对称、复习资料缺乏等难题。

“学府考研”的使命是帮助每一个信任学府的学员都能考上理想院校。

学府文化的核心是“专注文化”。

“十年专注，只做考研”。因为专业，所以深受万千考研学子信赖！

“让每一个来这里的考研学子都成为成功者”。正是这种责任，让学府考研快速成为考生心目中当仁不让的必选品牌。

人生能有几回搏，三十年太长，只争朝夕！

同学们，春华秋实，为了实现理想，努力吧！

学府考研 | 全国统一客服电话 | 400-090-8961
总部 | 陕西·西安友谊东路75号新红锋大厦三层

学府官方微博　　　　学府官方微信

致学府图书用户

亲爱的学府图书用户：

您好！欢迎您选择学府图书，感谢您信任学府！

“学府图书”是学府考研旗下专业从事考研教辅图书研发的图书公司！

为了更好地为您提供“优质教学、始终如一”的服务，对于您所提出的宝贵意见与建议，我们向您深表感谢！

若我们的图书质量或服务未达到您的期望，敬请您通过以下联系方式进行告知。我们珍视并诚挚地感谢您的反馈，谢谢您！

在此祝您学习愉快！

学府图书全国统一客服电话：400-090-8961

学府图书质量及服务监督电话：15829918816

学府图书总经理投诉电话：张城 18681885291 投诉必复！

您也可将信件投入此邮箱：34456215@qq.com 来信必回！

图书微博　　图书微信　　图书微店

前　言

概率论与数理统计是一门研究和探索客观世界随机现象规律的数学学科.它以随机现象为研究对象,是数学的分支学科,在金融、保险、经济与企业管理、工农业生产、医学、地质学、气象与自然灾害预报等方面都起到了非常重要的作用.随着计算机科学的发展,以及功能强大的统计软件和数学软件的开发与应用,这门学科得到了蓬勃的发展,它不仅形成了结构宏大的理论,而且在自然科学和社会科学的各个领域应用越来越广泛.

考研数学的三门课程各有特色:高等数学的特色是内容多、“坑”多;线性代数的特色是内容抽象,不易理解;而概率论与数理统计虽然在这三门学科之中难度最大,但所考到的题目相对简单,大题形式比较固定.

基于概率论与数理统计的特点,在复习概率论与数理统计时,考生一定要谨慎选择第一轮的复习用书.可以肯定的是,包括考研大纲指定教材在内,市面上已有的大部分概率论与数理统计考研复习用书难度过大、内容冗长.因此,为了节约考生时间,降低考生的备考难度,秉着“考研内容一个不少,考研之外绝对没有”,笔者编写了本书.之所以要精简考研概率论与数理统计的内容,是因为在考研这场没有硝烟的大战中,如何用最少的精力得到最高的分数是考研成功的关键.

本书分为名师讲义和典型习题及解答两部分.在名师讲义中,对随机事件与概率、一维随机变量、二维随机变量、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念和参数估计与假设检验等 7 大类知识点进行详细的讲解.典型习题及解答对应于名师讲义,设置相应的习题及答案解析,从而使考生在熟练掌握基本概念、基本理论的基础上,将分析与解决问题的能力提升到轻松解答真题的水平,为考生取得考研数学高分奠定基础.

与此同时,本书具有以下特点:

1.选题精巧:本书中题目的选取完全基于最新数学考试大纲和近年来的命题规律,具有针对性强、覆盖面广、难易兼备、拓展性好的特点.

2.名师精讲:注重数学思维的培养,通过题目的训练,使考生能够在把握数学命题的基础上,提高解题的速度与正确率.

3.分析透彻:本书既从宏观层面把握考研对知识的要求,又从微观层面对重要知识点进行深

入细致的剖析，从而使考生的解题思路清晰，顺畅.

4.**深度详解**：本书中的题目具有较好的前瞻性与预测性，具有较强的代表性，对每一道题目均给出详尽的考点分析和解答，尽可能给出多种解题方法，并进行解题方法、技巧的归纳总结，开阔考生的视野，以达到触类旁通，举一反三的效果.

笔者可以肯定的一点是，若使用本书作为考研数学概率论与数理统计复习的第一轮用书，只要仔细钻研书中讲解，再加以相应习题进行练习，考生定能在概率论与数理统计这门课程上取得理想的成绩.

最后，由于能力和精力有限，书中难免有些疏漏甚至错误，恳请读者不吝指出！

刘　贤

2016 年 12 月于西安交通大学

目　录

第一部分　名师讲义

第二部分 典型习题及解答

第一部分

名师讲义

第1章 随机事件与概率

1.1 随机事件

一、随机试验

1. 随机现象

客观世界中存在的现象是多种多样的.有一类现象,在一定条件下必然发生或必然不发生,这类现象称为确定性现象.例如:向上抛一块石头,石头必然会下落,异性电荷必然会相互吸引等都是确定性现象.另一类现象是在相同条件下可能发生也可能不发生,这类现象称为随机现象.随机现象事件事先不能确定其发生与否.例如:投掷一枚质地均匀的硬币,每次投掷之前是不能确定结果是正面朝上还是反面朝上的,因此,该现象是随机现象.

概率论与数理统计是统计随机现象的规律并将其数量化的一门数学学科.例如:在一定条件下,做一次实验,结果可能不止一种(投掷硬币有正面朝上,也有反面朝上),并且每种结果事先也不确定是否一定发生,但是通过大量的重复观测与实践发现,每一种结果都会呈现出某种统计规律性,对这种规律性进行研究并将其数量化就是概率论与数理统计的中心任务.

2. 随机试验

定义 1 对客观世界中的某种自然现象进行一次观测或进行一次实验称为一次试验.若试验满足下述条件:

(1) 在相同条件下,试验可以重复进行;

(2) 试验结果不止一个而且所有可能的结果明确可知;

(3) 每次试验结果只发生一个,但试验之前具体哪个结果发生无法确定,

则称此试验为随机试验,简称为试验,一般记为 E.

例 下列各实验是否为随机试验? 如果是,请写出所有可能的结果.

E_1:抛一颗骰子,观察朝上一面的点数.

E_2:一批产品中任取一件,观察是正品还是次品.

E_3:在一批产品中,次品件数大于 3,任取 3 件,记录其中的次品数.

E_4:对一个目标进行射击,击中为止,记录射击次数.

E_5:从一批灯泡中任取一只,测其寿命.

E_6:太阳从东方升起.

【解析】(1) 因为试验 E_1 满足随机试验定义中的条件，所以 E_1 是随机试验.随机试验 E_1 所有可能的结果为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

(2) 因为试验 E_2 满足随机试验定义中的条件，所以 E_2 是随机试验.随机试验 E_2 所有可能的结果为 $\Omega=\{$正品，次品$\}$.

(3) 因为试验 E_3 满足随机试验定义中的条件，所以 E_3 是随机试验.随机试验 E_3 所有可能的结果为 $\Omega=\{0,1,2,3\}$.

(4) 因为试验 E_4 满足随机试验定义中的条件，所以 E_4 是随机试验.随机试验 E_4 所有可能的结果为 $\Omega=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

(5) 因为试验 E_5 满足随机试验定义中的条件，所以 E_5 是随机试验.随机试验 E_5 所有可能的结果为 $\Omega=(0,+\infty)$.

(6) 因为试验 E_6 的结果只有一个，所以不满足随机试验定义中的第二个条件，故 E_6 不是随机试验.

二、随机事件

1. 样本空间

定义 2 随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为随机试验 E 的**样本空间**，记为 Ω.样本空间 Ω 中的任意一个元素（即随机试验 E 的每一个可能结果）称为随机试验 E 的**样本点**，记为 ω，则 $\omega\in\Omega$.

名师点拨

在随机试验 E 中，样本空间 Ω 是最大的集合，概率论与数理统计的研究都是在这个空间内进行的.

2. 随机事件

定义 3 在随机试验 E 中，样本空间 Ω 的子集称为**随机事件**，简称为**事件**，随机事件通常用 $A,B,C,\cdots$ 来表示.

名师点拨

(1) 由定义 3 可知：随机事件是样本空间 Ω 的子集，因此，随机事件是由样本空间 Ω 中的若干个样本点所组成的.

(2) 事实上，随机事件的精确定义：样本空间 Ω 的可测子集称为随机事件，但可测这个概念是测度论这门课程中的内容，已超纲.因此，我们只需记住定义 3 的内容即可.

(3) 在一次随机试验 E 中，随机事件 A 发生当且仅当随机事件 A 中有且只有一个样本点出现.

定义 4 在随机试验 E 中，由一个样本点 ω 组成的子集 $\{\omega\}$ 称为**基本事件**.

名师点拨

基本事件是由一个样本点组成的单点集，是样本空间 Ω 的子集，所以基本事件也是随机事件.

定义 5 样本空间 Ω 包含所有的样本，它是 Ω 自身的子集，在每次实验中它总是会发生的.因此，也称样本空间 Ω 为**必然事件**.

定义 6 空集 $\varnothing$ 作为样本空间 Ω 的子集，它不包含任何样本点，所以在每次实验中都不可能发生，故称空集 $\varnothing$ 为**不可能事件**.

名师点拨

在随机试验 E 中，必然事件只有一个，那就是样本空间 Ω；不可能事件也只有一个，那就是空集 $\varnothing$.

3. 随机事件之间的关系

在概率论与数理统计中，随机事件总是用样本空间 Ω 的子集来表示.因此，随机事件之间的关系本质上是集合之间的关系.

(1) 包含关系.

定义 7 若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A 或事件 A **包含于**事件 B，记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，也称事件 A 为事件 B 的**子事件**.

事件 A 包含于 B，如图 1-1 所示.

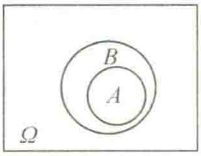

图 1-1

(2) 相等关系.

定义 8 若事件 $A\subseteq B$ 且事件 $B\subseteq A$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记为 $A=B$.

名师点拨

事件 A 与事件 B 相等的概率含义是：事件 A 发生当且仅当事件 B 发生.

(3) 事件的并(和).

定义 9 事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的**并**(或称为事件 A 与 B 的**和**)，记为 $A\cup B$，也可记为 $A+B$.

事件 A 与事件 B 的并是由事件 A 与事件 B 的所有样本点组成的集合，如图 1-2 所示.

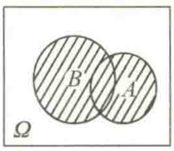

图 1-2

推广 ① $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 表示 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有

一个发生的事件；

② $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$ 表示无穷多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 至少有一个发生的事件.

名师点拨

(1) 在数学中，无穷分为两种，一种是可数(无穷)，一种是不可数(无穷).无论是可数还是不可数，它们都表示元素的个数为无穷多个，可数并不是可以数清数量或者有有限多个的意思.若无穷多个元素能够排成一列，则称这无穷多个元素的个数为可数个；若无穷多个元素不能排成一列，则称这无穷多个元素的个数为不可数个.此外，可数也称为可列，不可数也称为不可列.

(2) 对于无穷的概念，关键在于理解可以排成一列的实质.排成一列并不是简单的可以从左往右或者从上往下的按某种顺序排列，而是按某种顺序排列后，对于任意一个元素可知其位置，对于任意一个位置可知其元素，满足这个条件的无穷多个元素称为可以排成一列.例如，(0,1) 区间上的元素有无穷多个，但不可以排成一列.因为无论按什么顺序排，都不可能确定(0,1) 区间上的任意一个元素的位置，对于任意一个位置也不能确定是什么元素，因此，(0,1) 区间上的元素个数为不可数无穷多个.而自然数集 $\mathbf{N}^+$ 中的元素为可数无穷多个.

(4) 事件的交(积).

定义 10　事件 A 与事件 B 同时发生时，称为事件 A 与事件 B 的交(或称为事件 A 与 B 的积)，记为 $A \cap B$ 或 AB.

事件 A 与 B 的交是由事件 A 与 B 的公共样本点组成的集合，如图 1-3 所示.

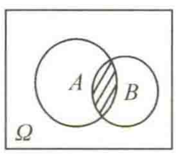

图 1-3

推广　① $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 表示 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生的事件；

② $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots$ 表示无穷多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生的事件.

(5) 事件的差.

定义 11　事件 A 发生而事件 B 不发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的差，记为 $A-B$(或 $A \backslash B$).事件 A 与 B 的差是由属于事件 A 而不属于 B 的样本点组成的集合，如图 1-4 所示.

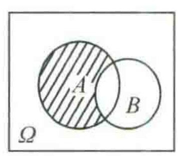

图 1-4

(6) 互斥事件.

定义 12　若事件 A 与事件 B 满足 $AB = \varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互斥(或称事件 A 与事件 B

互不相容).

名师点拨

事件 A,B 互斥表示事件 A,B 不能同时发生,即事件 A 与 B 互斥当且仅当事件 A 与 B 没有公共的样本点.如图 1-5 所示.

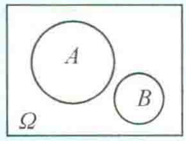

图 1-5

推广　若事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意两个事件都是互斥的,即 $\forall i\neq j$,有 $A_i\cap A_j=\varnothing$ 成立,则称事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥.

(7) 对立事件.

定义 13　若事件 A 与事件 B 同时满足:$\begin{cases}A+B=\Omega\\ AB=\varnothing\end{cases}$,则称事件 A 与 B 为对立事件(或称事件 A 与事件 B 互为逆事件),记为 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$.

事件 A 与事件 B 为对立事件表示事件 A 与事件 B 有且仅有一个发生,如图 1-6 所示.

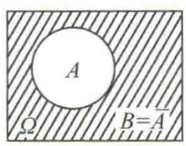

图 1-6

名师点拨

(1) 由定义 13 可知:$\overline{A}=\Omega-A$;且对立事件必为互斥事件,但互斥事件不一定是对立事件.

(2)$A-B=A\overline{B}=A-AB$.

4.事件之间的运算

事件之间的交、并、逆三种关系之间的运算定律如下:

(1) 吸收律:若 $A\subseteq B$,则 $A\cup B=B,A\cap B=A$.

(2) 交换律:$A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$.

(3) 结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$,

$A\cap(B-C)=A\cap B-A\cap C$

(4) 分配律:$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

名师点拨

在集合的运算中，规定集合之间同一级别的运算都是从左往右依次进行的.优先顺序最高的是小括号，其次是中括号，再次是花括号或大扩号.在交、并、逆三个运算中，逆运算的顺序仅次于各种括号的，其次是交运算，最后是并运算.比如计算 $A\cup BC$，可以先把 $A\cup BC$ 写成 $A+BC$.显然，先算 BC，BC 的计算结果作为一个集合再与 A 求并运算.

(5) 德·摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

名师点拨

(1) 德·摩根律口诀：长杠变短杠，开口变方向.

(2) 德·摩根律的推广：$\begin{cases}\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}\\ \overline{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\cdots\cup\overline{A_n}\end{cases}$

$$\begin{cases}\overline{\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}A_n}=\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}\overline{A_n}\\ \overline{\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}A_n}=\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}\overline{A_n}\end{cases}$$

例 1　若 A_i 表示第 i 次射击射手击中目标，$i=1,2,3$，试用事件之间的运算描述下列事件：(1) 至少击中一次目标；(2) 全部击中目标；(3) 三次都没击中目标；(4) 只有第一次击中目标；(5) 只击中一次目标.

【解析】 (1)$A_1\cup A_2\cup A_3$.(2)$A_1A_2A_3$.(3) $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

(4)$A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.(5)$(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})\cup(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})\cup(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)$.

例 2　设 A,B 为任意两个事件，则下列选项中，正确的是(　　).

(A) 若 $AB=\varnothing$，则 $\overline{A},\overline{B}$ 可能不相容　　(B) 若 $AB\neq\varnothing$，则 $\overline{A},\overline{B}$ 也可能相容

(C) 若 $AB=\varnothing$，则 $\overline{A},B$ 也可能相容　　(D) 若 $AB\neq\varnothing$，则 $\overline{A},B$ 一定不相容

【解析】 应选(A).

若 $AB=\varnothing$，则当 $A\cup B=\Omega$ 时，$\overline{A},\overline{B}$ 一定不相容.而当 $A\cup B\neq\Omega$ 时，$\overline{A},\overline{B}$ 一定相容.因此，选项(A) 正确.

对于选项(B)：若 $AB\neq\varnothing$，则 $\overline{A},\overline{B}$ 一定相容.对于选项(C)：若 $AB=\varnothing$，则 $\overline{A},B$ 一定相容.

1.2　随机事件的概率

一、概率的概念与性质

对于一个随机事件(除必然事件与不可能事件之外) 来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生.我们常常希望知道这个随机事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大.为此，我们