线 性 代 数

清华大学基础课数学教研组

1980.8.

线 性 代 数

清华大学基础课数学教研组

1980.8.

目　　录

第一章　行列式

"由于特殊的事物是和普遍的事物联结的，由于每一个事物内部不但包含了矛盾的特殊性，而且包含了矛盾的普遍性，普遍性即存在于特殊性之中，……" 二、三阶行列式和高阶行列式之间的关系充分体现 **"特殊性中间就包含了矛盾的普遍性"** 这一普遍真理．本章就是在复习二、三阶行列式性质的基础上，讨论 n 阶行列式的性质．首先我们着重列举了三阶行列式按某行（列）展成二阶行列式这一性质，这是我们讨论高阶行列式的出发点．进而讨论高阶行列式的其他性质，特别有关高阶行列式计算的性质．最后讨论了行列式在解方程组方面的应用，以及由此得出的判别方程个数和未知量个数相同的齐次方程组有非零解的充要条件．这个判别条件无论在实际应用方面和理论探讨方面都有其重要意义．

§1.　二阶和三阶行列式

我们在初等数学中曾经见到过下列符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

这个符号称为二阶行列式，它代表一个算式，等于数 $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}, \tag{1}$$

a_{ij} $(i,j=1,2)$ 称为行列式的元素，第一个指标 i 表示第 i 行，第二个指标 j 表示第 j 列．a_{ij} 就是表示行列式第 i 行第 j 列相交处那个元素．又如符号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为三阶行列式，它由 3^2 个数组成．三阶行列式和二阶行列式有下列关系

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

利用这个式子可以计算三阶行列式，它将三阶行列式还原成二阶行列式，再根据 (1) 式计算出三阶行列式．由于 (2) 式右边每一项都包含了三阶行列式第一行的一个元素，因此我们说这个三阶行列式是按第一行展开的．三阶行列式也可以按其他行（列）展开，为此我们再复习一下代数余子式这概念．

在三阶行列式中划去 a_{ij} 元素所在的 i 行和 j 列的元素，剩下的元素按原次序构成的二阶行列式称为 a_{ij} 的余子式．a_{ij} 的余子式乘上 $(-1)^{i+j}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij}．例如

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

就是 a_{23} 的代数余子式．利用余子式可以将三阶行列式按任意一行展开，例如按第 i 行展开则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}A_{ij}. \tag{3}$$

三阶行列式也可以按任意一列展开，例如按第 j 列展开则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}=\sum_{i=1}^{3}a_{ij}A_{ij}. \tag{4}$$

也就是说：**一行（列）的元素与相应的代数余子式乘积之和等于此行列式．**

下面再复习一下二、三阶行列式的其他性质．

(i) 行列式若有两行（列）对应的元素相同，则此行列式为零：例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}=a_{11}a_{12}-a_{11}a_{12}=0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=0.$$

上面这个三阶行列式是按第一行展开，若将此行列式按第三行展开则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

由行列式 D 可以看出

$$A_{31}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \qquad A_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

于是上列展开式可写成

$$a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33}=0.$$

这个式子表明行列式 D 的第二行元素与第三行元素的对应代数余子式之积之和（而不是与第二行的元素的对应代数余子式之积之和）等于零．一般讲：行列式的一行（或列）的元素与另一行（或列）相应的代数余子式乘积之和等于零：

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+a_{k3}A_{i3}=0, \qquad i\neq k \tag{5}$$

$$\text{（或}\quad a_{1k}A_{1j}+a_{2k}A_{2j}+a_{3k}A_{3j}=0, \qquad j\neq k\text{）}. \tag{6}$$

(3)，(5) 两式合併可以写成

$$\sum_{j=1}^{3} a_{kj}A_{ij}=\begin{cases} D, & i=k, \\ 0, & i\neq k. \end{cases} \tag{7}$$

(4)，(6) 两式合併可以写成

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ik}A_{ij}=\begin{cases} D, & j=k, \\ 0, & j\neq k. \end{cases} \tag{8}$$

(ii) 行和列对调（先后次序不变），行列式的值不变

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

(iii) 以一数 k 乘行列式某一行各元素，等于用 k 乘这个行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

(iv) 一行的 k 倍加至另一行，行列式值不变

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{31} & a_{12}+ka_{32} & a_{13}+ka_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

§2. n 阶行列式

n 阶行列式是二、三阶行列式的推广，它也和二、三阶行列式一样，可以用来求 n 个未知量 n 个一次方程的解的计算问题；另外在下章计算矩阵的秩要用到 n 阶行列式．正如在 §1 中用二阶行列式来定义三阶行列式那样，我们在已知二、三、…，$n-1$ 阶行列式的基础上可以定义 n 阶行列式．

（一）n 阶行列式的定义

定义： 由 n^2（$n=3$，4，5 等等正整数）个数组成的 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

是一个算式，当 $n=2$ 时为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21};$$

当 $n>2$ 时为

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}\ , \tag{2}$$

其中 $A_{1j}(j=1,2,\cdots,n)$ 称为元素 a_{1j} 的代数余子式．如果从行列式 D 中划去 a_{1j} 所在的行和列，剩下的 $n-1$ 阶行列式，记作

$$m_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则规定

$$A_{1j}=(-1)^{1+j}m_{1j}.$$

由此可见，定义了二阶行列式，由（2）式可以逐步定义任意阶的行列式．行列式有时简记作 $|a_{ij}|$．

例 1.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}=?$$

解： 根据定义可得

$$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

用例 1 完全类似的方法可以求得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}, \tag{3}$$

和 n 阶下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}. \tag{4}$$

（3），（4）两式结果很有用．請读者自行推证．

例 2. 计算

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解：利用定义可得

$$D=(-1)^{1+4}a_{14}\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-a_{14}(-1)^{1+3}a_{23}\begin{vmatrix} 0 & a_{32} \\ a_{41} & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-a_{14}\cdot a_{23}\cdot(-a_{32}\cdot a_{41})$$

$$=a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}.$$

在 §1 里我们看到二阶、三阶行列式对行所具有的性质，对列讲也同样有这种性质．对于 n 阶行列式也是如此，即

定理 1. 行列式的行与列对调，不更动它们的先后次序，其值不变：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{5}$$

这个定理的意义很明确，但证明非常的烦琐，故略去．有了这个定理，以后我们可以只对于行来讨论行列式的性质，这样所得到的性质，对于列讲也是正确的．

例 3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

“一切客观事物本来是互相联系的和具有内部规律的”，在 §1 内所提到的关于二、三阶行列式的性质对于 n 阶行列式也是正确的，下面我们談談这些性质．

（二）关于行列式的展开性质

n 阶行列式与三阶列式一样，可以按任意一行或任意一列展开．为此我们先类似于三阶行列式定义余子式和代数余子式概念：

定义： 从 n 阶行列式（1）式中划去 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素，剩下的元素（前后的次序不变）所构成的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的**余子式**，记作 m_{ij}．

$$m_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{6}$$

a_{ij} 的余子式 m_{ij} 乘 $(-1)^{i+j}$ 称为 a_{ij} 的**代数余子式**，记作 A_{ij}．

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}m_{ij}.$$

这样，关于行列式展开问题有下述定理：

定理 2. 行列式(1)等于任意一行或任意一列的元素乘上相应的代数余子式之和：

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}, \tag{7}$$

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}. \tag{8}$$

行列式的某一行或某一列的元素乘上另一行或另一列相应的代数余子式之和等于零：

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=0, \quad 当\ k\neq i. \tag{9}$$

$$a_{1k}A_{1j}+a_{2k}A_{2j}+\cdots+a_{nk}A_{nj}=0, \quad 当\ k\neq j. \tag{10}$$

(7)，(9) 两式可以合併成一式：

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}A_{ij}=\begin{cases} D, & 当\ k=i, \\ 0, & 当\ k\neq i. \end{cases} \tag{11}$$

(8)，(10) 两式可以合併成一式：

$$a_{1k}A_{1j}+a_{2k}A_{2j}+\cdots+a_{nk}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}A_{ij}=\begin{cases} D, & 当\ k=j, \\ 0, & 当\ k\neq j. \end{cases} \tag{12}$$

这个定理的证明较烦琐，故略去．下面说明一下 (9) 式左端的意义．

比较（7）、（9）两式可以看出，若将（7）式右端的 a_{i1}，a_{i2}，…，a_{in} 对应调成 a_{k1}，a_{k2}，…，a_{kn}，即得（9）式左端．这相当于在行列式 D 中将第 i 行元素 a_{i1}，a_{i2}，…，a_{in} 换成相应的第 k 行元素 a_{k1}，a_{k2}，…，a_{kn}，而原来第 k 行元素保持不变，这样新得到的新行列式就有两行元素相同：

$$
\begin{array}{l}
\left|\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
\\ \\ \longleftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \longleftarrow \text{第 } k \text{ 行} \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}
$$

性质（9）告訴我们具有两行对应元素相同的行列式为零：

$$
\sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{ij}=\left|\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{array}\right|=0.
$$

同理（10）告訴我们具有两列对应元素相同的行列式为零．这样，就得到下述定理：

定理 3. 行列式若有两行（列）的对应元素相同则此行列式为零．

下面举例说明定理 2 的意义．

例 4. 将行列式

$$
D=\left|\begin{array}{rrrr}
-1 & -9 & -2 & 3 \\
-5 & 5 & 3 & -2 \\
-12 & -6 & 1 & 1 \\
9 & 0 & -2 & 1
\end{array}\right|
$$

按第 2 行和第 3 列展开求出它的数值．

解：将 D 按第 2 行展开：

$$D=-5\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-9&-2&3\\-6&1&1\\0&-2&1\end{vmatrix}+5\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}-1&-2&3\\-12&1&1\\9&-2&1\end{vmatrix}$$

$$+3\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-1&-9&3\\-12&-6&1\\9&0&1\end{vmatrix}+(-2)\times(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}-1&-9&-2\\-12&-6&1\\9&0&-2\end{vmatrix}$$

$$=5\times(-3)+5\times0+(-3)\times(-21)+(-2)\times15=18.$$

将 D 按第 3 列展开：

$$D=-2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-5&5&-2\\-12&-6&1\\9&0&1\end{vmatrix}+3\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-1&-9&3\\-12&-6&1\\9&0&1\end{vmatrix}$$

$$+1\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-1&-9&3\\-5&5&-2\\9&0&1\end{vmatrix}+(-2)\times(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}-1&-9&3\\-5&5&-2\\-12&-6&1\end{vmatrix}$$

$$=-2\times27+3\times21+23+2\times16=18.$$

例 5. 试就例 4 验证将第二列元素乘上第三列的相应的代数余子式之和为零.

证：

$$-9\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-5&5&-2\\-12&-6&1\\9&0&1\end{vmatrix}+5\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-1&-9&3\\-12&-6&1\\9&0&1\end{vmatrix}$$

$$+(-6)\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-1&-9&3\\-5&5&-2\\9&0&1\end{vmatrix}+0\times(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}-1&-9&3\\-5&5&-2\\-12&-6&1\end{vmatrix}$$

$$=-9\times27+5\times(+21)+(-6)(-23)=0.$$

§ 3. n阶行列式性质（续）及其计算

从上节看出一行列式可以按某一行或某一列展开，例如按 l 列展开有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{1l}A_{1l}+a_{2l}A_{2l}+\cdots+a_{nl}A_{nl}.$$

若在此列中除个别元素例如 a_{1l} 外，其他元素全都是零：$a_{2l}=a_{3l}=\cdots=a_{nl}=0$，这时

$$D=a_{1l}A_{1l},$$

于是 n 阶行列式的计算问题化为 $n—1$ 阶行列式的计算问题．上节例 1 、例 2 、例 3 就是利用这种性质计算行列式的数值的．这节主要讨论如何改变行列式的元素而使行列式的值不变，同时又达到简化行列式的目的，即使行列式的同一行或列有尽量多的零作为元素出现．达到这个目的主要根据下列各性质．

定理 4． 以一数 k 乘行列式某一行各元素，等于用 k 乘这个行列式．

证：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{l=1}^{n}(ka_{il})A_{il}$$

$$=k\sum_{l=1}^{n}a_{il}A_{il}$$

$$=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

定理 5． 将行列式 D 某一行（列）各元素的 k 倍加到另一行（列）的对应元素上，行列式不变．

证： 将下行列式按第 i 行展开

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i1}+ka_{k1} & a_{i2}+ka_{k2} & \cdots & a_{in}+ka_{kn} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{l=1}^{n}(a_{il}+ka_{kl})A_{il}=\sum_{l=1}^{n}a_{il}A_{il}+k\sum_{l=1}^{n}a_{kl}A_{i}$$

$$=\sum_{l=1}^{n}a_{il}A_{il}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例 1. 求

$$D=\begin{vmatrix} -1 & -9 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & -2 \\ -12 & -6 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

之值.

解： 如果按第一行展开，则要计算四个三阶行列式；若按第四行展开，则可少计算一个三阶行列式，因在此行中有一个元素是零，显然若将这一行中其他元素尽可能变为 0，则计算可以大大简化，为此利用定理 5 作如下变换

$$D=\begin{vmatrix} -1 & -9 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & -2 \\ -12 & -6 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \overset{2\times④列加}{\underset{到③列}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} -1 & -9 & 4 & 3 \\ -5 & 5 & -1 & -2 \\ -12 & -6 & 3 & 1 \\ 9 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{到①列}]{-9\times\text{④列加}}\begin{vmatrix}-28 & -9 & 4 & 3\\ 13 & 5 & -1 & -2\\ -21 & -6 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}-28 & -9 & 4\\ 13 & 5 & -1\\ -21 & -6 & 3\end{vmatrix}.$$

这样，就将一个四阶行列式计算变为一个三阶行列式计算．为计算簡便，还可再将此三阶行列式化简为二阶行列式计算，为此作以下变换：

$$D=\begin{vmatrix}-28 & -9 & 4\\ 13 & 5 & -1\\ -21 & -6 & 3\end{vmatrix}\xlongequal[\text{到①行}]{4\times\text{②行加}}\begin{vmatrix}24 & 11 & 0\\ 13 & 5 & -1\\ -21 & -6 & 3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{到③行}]{3\times\text{②行加}}\begin{vmatrix}24 & 11 & 0\\ 13 & 5 & -1\\ 18 & 9 & 0\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按③列展开}}(-1)\,(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}24 & 11\\ 18 & 9\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{提因子}}9\begin{vmatrix}24 & 11\\ 2 & 1\end{vmatrix}=9\times(24-22)=18.$$

例 2. 计算

$$D=\begin{vmatrix}b & a & a & a\\ a & b & a & a\\ a & a & b & a\\ a & a & a & b\end{vmatrix}$$

之值．

解： 这个行列式的特点是每列元素之和都等于 $(3a+b)$，利用这点做以下变换

$$D=\begin{vmatrix}b & a & a & a\\ a & b & a & a\\ a & a & b & a\\ a & a & a & b\end{vmatrix}\xlongequal[\text{第①行}]{\text{将各行加到}}\begin{vmatrix}3a+b & 3a+b & 3a+b & 3a+b\\ a & b & a & a\\ a & a & b & a\\ a & a & a & b\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{提因子}}(3a+b)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & a & a\\ a & a & b & a\\ a & a & a & b\end{vmatrix}\xlongequal[\text{加到其他三列}]{-1\times\text{①列分别}}(3a+b)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ a & b-a & 0 & 0\\ a & 0 & b-a & 0\\ a & 0 & 0 & b-a\end{vmatrix}$$

$$=(3a+b)(b-a)^3.$$

最后介紹一个关于行列式行与行（或列与列）交換的性质.

定理 6. 对调行列式的任意两行（列），则对调后所得到的行列式与原来的行列式绝对值相等而符号相反：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[\text{到ⓘ行}]{\text{将ⓚ行加}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+a_{k1} & a_{i2}+a_{k2} & \cdots & a_{in}+a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{去ⓘ行}]{\text{ⓚ行减}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+a_{k1} & a_{i2}+a_{k2} & \cdots & a_{in}+a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[\text{到ⓘ行}]{\text{ⓚ行加}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$