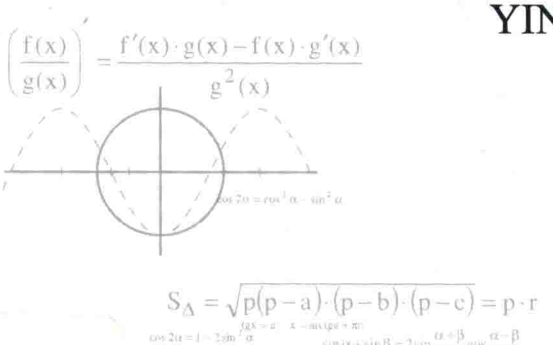
高等数学军事应用案例

GAODENG SHUXUE JUNSHI YINGYONG ANLI



主编　但琦

国防工業出版社
National Defense Industry Press

高等数学军事应用案例

主　编　但　琦

国防工業出版社

·北京·

内容简介

依托同济大学编写的《高等数学》(第六版)中的知识点,编写了本教材。该教材特点是以军事问题为驱动,提出问题、分析问题,从而提炼数学问题,再利用高等数学中相应的知识点来求解数学问题,最后进行结果分析。本书系统地将高等数学每一章知识来解决军事应用案例,同时,它还将 Matlab 软件融入其中,利用 Matlab 编程实现案例的计算、求解和动画演示。它是一本集高等数学知识、数学实验和军事应用案例为一体的教材,尤其适用于军队院校和理工科类院校使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学军事应用案例/但琦主编.—北京:国防工业出版社,2017.4
ISBN 978-7-118-10940-5

Ⅰ.①高… Ⅱ.①但… Ⅲ.①高等数学-军事数学
Ⅳ.①O13②E911

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 103674 号

※

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)
北京京华虎彩印刷有限公司印刷
新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 **印张** $12\frac{1}{4}$ **字数** 290 千字
2017 年 4 月第 1 版第 1 次印刷 **印数** 1—1500 册 **定价** 45.00 元

国防书店:(010)88540777 发行邮购:(010)88540776
发行传真:(010)88540755 发行业务:(010)88540717

编写委员会

主　　编　但　琦

副 主 编　吴松林　付诗禄

编写成员　林　琼　方　玲

　　　　　李　玻　申小娜

前　言

目前，军队院校转型中对高等数学的教学研究的理论与实践还没有深入系统地研究，只是沿用了军队院校传统的教学内容和教学方式，针对各知识点，目前还没有可应用的针对性强和教学可操作性强的军事应用案例教材，解决军事实际问题的数学试验也不多，能够展示数学建模过程，达到理论与实际相结合的军事教材更是凤毛麟角。本教材是一本针对高等数学各章知识点编写相关的军事应用案例教材，它是对高等数学的教学内容的补充和完善。

本书共收集、整理和编写了 73 个军事应用案例，其中第 1 章极限与连续包含 3 个案例，第 2 章导数与微分包含 9 个案例，第 3 章微分中值定理与导数的应用包含 11 个案例，第 4 章不定积分包含 4 个案例，第 5 章定积分包含 5 个案例，第 6 章定积分的应用包含 6 个案例，第 7 章微分方程包含 14 个案例，第 8 章向量代数与空间解析几何包含 6 个案例，第 9 章多元函数微分学包含 6 个案例，第 10 章重积分包含 4 个案例，第 11 章曲线积分与曲面积分包含 2 个案例，第 12 章无穷级数包含 3 个案例。各案例涵盖了高等数学知识点，每个案例的编写格式均是问题提出、问题分析、数学问题、问题求解、结果分析、涉及知识点及拓展应用，集文字、图形和数学试验（有源程序）于一体，形象直观、通俗易懂。

编写本书的人员有但琦、吴松林、付诗禄、林琼、方玲、李玻、申小娜，他们从事高等数学课程讲授多年，编写过《数学建模与数学实验》、《军事后勤模型》和《高等数学应用案例》，具有很好的基础和经验。

由于作者水平所限，书中疏漏在所难免，敬请广大读者批评指正。

编　者

2016 年 4 月

目 录

第 1 章　极限与连续

1.1　紧急集合中的路线选择问题

1.1.1　问题提出[1]

紧急集合演练在我国部队、军事院校和公安院校往往作为战士和学员的必修课之一，对保持队伍的战斗力及纪律性有着重大意义。

假设士兵在游泳池里游泳时碰上紧急集合，为在规定的时间赶到集合地点，如何选择行走路线？上岸点又该设置在哪里？

1.1.2　问题分析

碰到紧急集合时，时间最省的路线就是最佳路线。如果能将时间与路程的函数关系、时间与上岸点的函数关系找到，问题就能迎刃而解。所以，建立函数关系是确定最佳路线以及上岸点位置的关键。

不过，还需要一些已知条件，如游泳池的形状、士兵在游泳池里的位置、集合地点、士兵的游泳速度及跑步的速度。

1.1.3　数学问题

如图 1－1 所示，有一个士兵在半径为 R 的圆形游泳池 $x^2+y^2\leqslant R^2$ 内游泳，当他位于点 $P\left(-\dfrac{R}{2},0\right)$ 时，听到紧急集合号响，于是马上赶回位于点 $A(2R,0)$ 处的集合地点。设该士兵的游泳速度为 v_1，跑步速度为 v_2，求赶回集合地点所需的时间 t 与上岸点 M 位置的函数关系。

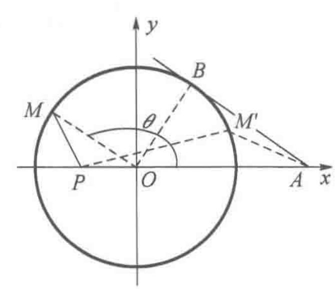


图 1－1　紧急集合路线

1.1.4　问题求解

赶回集合地点所需的时间 t 由游泳所花时间 t_1 和跑步所花时间 t_2 构成。要求时间 t 与上岸点 M 位置的函数关系，一定要先把上岸点 M 的位置用坐标确定下来（可用极坐标表示）。如图 1－1 所示，游泳池关于 x 轴对称，只需要讨论上半圆周上岸的情况。

设 $M=(R\cos\theta,R\sin\theta)$，其中，$\theta$ 为 OM 的极角（$0\leqslant\theta\leqslant\pi$），则该士兵游泳所花的时间为

$$t_1=\frac{\overline{PM}}{v_1}=\frac{1}{v_1}\sqrt{\left(R\cos\theta+\frac{R}{2}\right)^2+R^2\sin^2\theta}=\frac{R}{2v_1}\sqrt{5+4\cos\theta}$$

再考虑在跑步所需的时间 t_2，根据上岸点位置的不同分两种情况进行讨论。

(1) 当$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}$时,有$t_2=\frac{\overline{M'A}}{v_2}=\frac{R}{v_2}\sqrt{5-4\cos\theta}$。

(2) 当$\frac{\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\pi$时,要先跑一段圆弧$\widehat{MB}$,再跑一段直线段$\overline{BA}$,所以

$$t_2=\frac{1}{v_2}(\widehat{MB}+\overline{BA})=\frac{R}{v_2}\left(\theta-\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}\right)$$

综上所述,可得

$$t=\begin{cases}\frac{R}{2v_1}\sqrt{5+4\cos\theta}+\frac{R}{v_2}\sqrt{5-4\cos\theta}, & 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}\\ \frac{R}{2v_1}\sqrt{5+4\cos\theta}+\frac{R}{v_2}\left(\theta-\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}\right), & \frac{\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\pi\end{cases}$$

1.1.5 结果分析

本问题就是一个建立时间与角度的函数关系问题,函数是反映变量之间关系的有力工具,掌握函数及其基本性质,对生活和学习都有帮助。

1.1.6 涉及知识点

(1) 函数。设x和y是两个变量,D是一个给定的数集,如果对于每个数$x\in D$,变量y按照一定法则总有确定的数值和它对应,则称y是x的函数,记为$y=f(x)$。

(2) 分段函数。在自变量的不同变化范围下,对应法则用不同式子来表示的函数,通常称为分段函数。

1.1.7 拓展应用

根据所确定的函数关系,若设$R=10\text{m}$,$v_1=2\text{m/s}$,$v_2=8\text{m/s}$,你能确定使时间最短的路线吗?如果紧急集合时间为5min,能否赶上紧急集合?

提示:由$R=10\text{m}$,$v_1=2\text{m/s}$,$v_2=8\text{m/s}$可知:

$$t=\begin{cases}\frac{5}{2}\sqrt{5+4\cos\theta}+\frac{5}{8}\sqrt{5-4\cos\theta}, & 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}\\ \frac{5}{2}\sqrt{5+4\cos\theta}+\frac{5}{8}\left(\theta-\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}\right), & \frac{\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\pi\end{cases}$$

从$t\leqslant5$中求出θ,至于求出到A点的最短时间,则可以利用导数的应用——求最值的方法来求时间的最小值。

1.2 物资空投轨迹问题

1.2.1 问题提出[2]

空投物资是军事演练的重要项目之一。在瞬息万变的战场,根据需要准确地将物资投放到目的地,是保障打赢的重要环节之一。

例如,用军用运输机向一个受灾地区空投应急救援食品与药物,飞机在一长条形的开

放区域的边上立即投下物资，如果要求物资落在开放区域内，能否做到呢？

1.2.2　问题分析

空投物资，物资下落遵循一定的规律，可以用函数关系来表示。如果知道了物资下落的规律，那么就可以通过分析函数的基本性质来得到需要的信息，从而回答问题。

1.2.3　数学问题

一架军用运输机正在向一个受灾地区空投应急救援食品与药物，如果飞机在一长为 200m 的开放区域的边上立即投下货物，假设货物沿曲线

$$x=40t, y=-5t^2+120 \quad (\mathrm{m})$$

方向运动（t 为时间，单位为 s），问货物能否在区域内着陆？并求货物下落路径的笛卡儿坐标方程。

1.2.4　问题求解

因为投放点在开放区域的边上，且 $x=0$，即投放点在 y 轴上，由此建立笛卡儿坐标系（图 1－2），作直线 $x=200$，则 $x=0$ 与 $x=200$ 夹成了一个长为 200m 的开放区域。

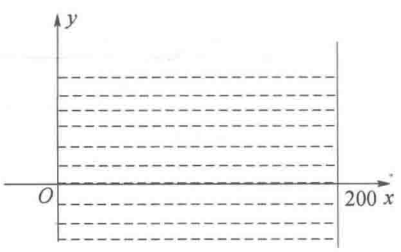


图 1－2　空投着陆区域示意图

先解决后一问，实际是曲线的参数方程转化为笛卡儿坐标方程的问题，只需将 t 用 x 表示后代入 $y=-5t^2+120$ 中便可得到方程，需要注意的是，还应确定其定义域。此时，要回答前一问也就是要考察该函数的定义域，看区间长度是否小于 200m。

建立如图 1－2 所示的坐标系，投放点在 y 轴上。

因为 $x=40t$，所以 $t=\dfrac{x}{40}$，代入 $y=-5t^2+120$ 中，得

$$y=120-\frac{x^2}{320}$$

由于 x、$y\geqslant 0$，则 $0\leqslant x\leqslant 80\sqrt{6}$。

因而货物下落路径的笛卡儿坐标方程为

$$y=120-\frac{x^2}{320}, \quad 0\leqslant x\leqslant 80\sqrt{6}$$

而 $80\sqrt{6}\approx 195.9592$，小于 200m，所以货物能在空投指定区域内着陆。

还可以作出开放区域及货物落下的轨迹图（图 1－3），以便更直观地理解结论。

Matlab 程序如下：

```
y=1:100
x=200-y*0;
plot(x,y)
hold on
x=linspace(1,80*sqrt(6),30);
```

```
y =120 -x.^2/320;
plot(x,y,'r')
```

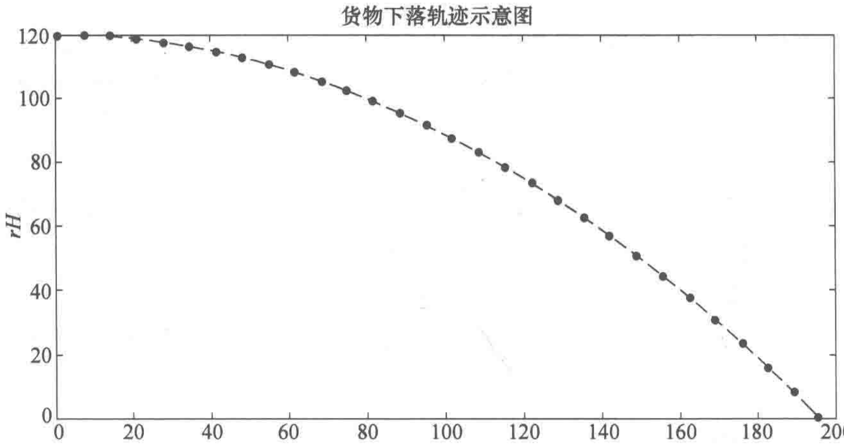


图 1－3　物资落下的轨迹

1.2.5　结果分析

物资空投轨迹能反映出物资能否空投到指定的区域中，而函数是反映变量之间关系的有力工具，它可以提供非常有用的信息，最后确定能否到达空投区域。

1.2.6　涉及知识点

（1）函数。设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 为 x 的函数，记为 $y=f(x)$。其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域。

（2）曲线的参数方程。将曲线上的动点的坐标 (x,y) 表示为参数 t 的函数 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\varphi(t)\end{cases}(a\leqslant t\leqslant b)$，此方程组称为曲线的参数方程。

1.2.7　拓展应用

结合上述问题的解决过程，考虑以下问题。

假定某一动质点在 t 时刻的位置由下式给出，即

$$x_1=3\sin t,y_1=2\cos t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

第二个质点的位置由下式给出，即

$$x_2=-3+\cos t,y_2=1+\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

（1）画出这两个质点的线路图。它们共有几个交点？

（2）这些交点中是否有碰撞点？也就是说，有没有两个质点同时到达同一个位置的情况？如果有则找出碰撞点。

（3）试描述一下，如果第二个质点的位置改为

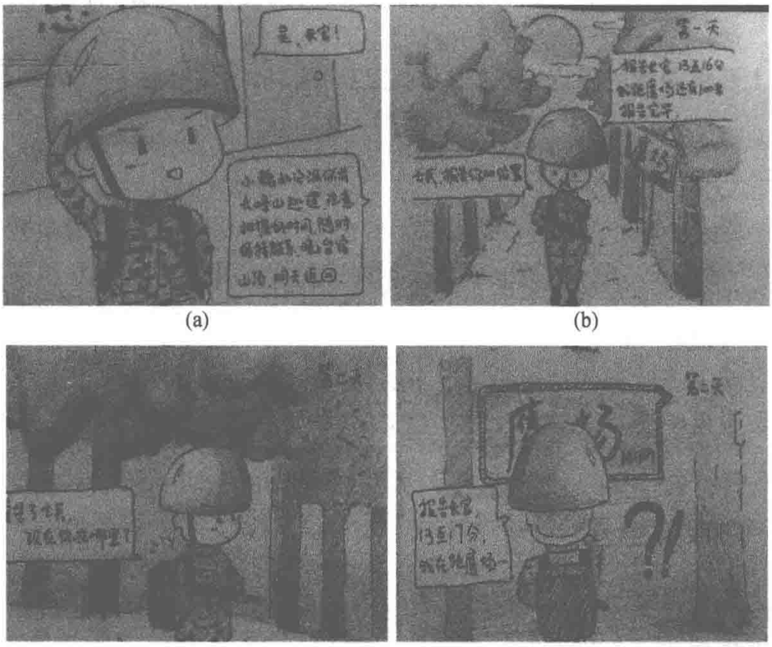
$$x_2=3+\cos t,y_2=1+\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

会发生什么情况？[2]

1.3 换岗换哨中的巧合问题

1.3.1 问题提出[3]

某个巡逻小分队定期派人到山上巡逻，每两天一个来回，6:00 从山下的驻地出发，当天下午 4:00 到达山顶。有一次轮到小魏巡逻，第一天上山，长官在下午 1:15 左右联系小魏，小魏报告了所在地：距鹰场 100m。第二天沿原路下山，长官仍在下午 1:15 左右联系小魏，小魏继续报告所在地，竟发现是昨天报告的同一个位置：距鹰场 100m。小魏心想，自己竟然在两天的同一时刻经过了同一个地方。真是太巧！你怎么看？这是一个巧合吗？



(a) (b) (c) (d)

图 1－4 换岗换哨的故事

1.3.2 问题分析

将上述问题数学化，上山和下山过程对应路程与时间的函数关系，问题是否可以归结为找两个连续函数关系的交点？

如图 1－5 所示，设山下驻地与山顶驻地之间的路程为 L，$f(t)$ 表示时刻 $t(\in[6,16])$ 小魏离开山下驻地走过的路程，可知 $f(t)$ 是区间 $[6,16]$ 上的连续函数，且 $f(6)=0$，$f(16)=L$。$g(t)$ 表示小魏第二天下山时在与前一天相同时刻尚未走完的路程，可知

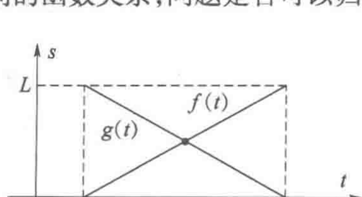


图 1－5 匀速上山下山函数示意图

$g(t)$是区间$[6,16]$上的连续函数，且有$g(6)=L, g(16)=0$。

要做的就是证明在这条路上存在这样一个点，小魏在两天的同一时刻都经过此点，即证明存在$\xi\in[6,16]$，使$f(\xi)=g(\xi)$。

1.3.3 数学问题

已知连续函数$f(t)$、$g(t)$，$t(\in[6,16])$，$f(6)=0, f(16)=L, g(6)=L, g(16)=0$，证明存在$\xi\in[6,16]$，使$f(\xi)=g(\xi)$。

1.3.4 问题求解

构造辅助函数$\varphi(t)$，满足在闭区间上连续的条件，然后根据闭区间上连续函数的性质——介值定理或零点定理，就可以证明该结论。

作辅助函数$\varphi(t)=f(t)-g(t)$，则$\varphi(t)$在区间$[6,16]$上连续，且有

$$\varphi(6)\varphi(16)=[f(6)-g(6)][f(16)-g(16)]=-L^2<0$$

根据闭区间上连续函数的零点定理（或介值定理）可知，一定存在$\xi\in[6,16]$，使

$$\varphi(\xi)=0$$

$$f(\xi)=g(\xi)$$

1.3.5 结果分析

(1) 问题中的现象发生并不是一个巧合，根据闭区间上连续函数的性质，这样的一个时刻实际上是客观存在的。

(2) 闭区间上连续函数的性质可用于解释生活中的自然现象。

(3) 函数是反映变量之间关系的有力工具，掌握函数及其基本性质，对您的生活和学习都将有帮助。

1.3.6 涉及知识点

闭区间上连续函数的性质 若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则有下述定理：

(1) 介值定理：$f(x)$在闭区间$[a,b]$上必取得介于它的最大值与最小值之间的一切值。

(2) 零点定理：若端点的函数值异号，则在(a,b)内至少存在一点ξ，使得$f(\xi)=0$。

1.3.7 拓展应用

参考上述问题的解决过程，请尝试就下列问题给出解释。

1. 旅游问题

一个旅游者，某日早上7:00离开黄山脚下的旅馆，沿着一条上山的路，在当天下午7:00走到黄山顶上的旅馆。第二天早上7:00，他从山顶沿原路下山，在当天下午7:00回到黄山脚下的旅馆。途中他不停地拍摄漂亮的景色。回家欣赏照片时发现，自己竟然在两天的同一时刻经过了同一个地方。

这会不会是巧合呢？[4]

图 1-6　黄山风景

2. 椅子放稳问题

把椅子往不平的地面上一放，通常只有三只脚着地，放不稳，然而只要稍挪动几次，就可以四脚着地，放稳了。你能用数学语言来说明这一问题吗？[5]

对椅子和地面都要作一些必要的假设：

(1) 椅子四条腿一样长，椅脚与地面接触可视为一个点，四只脚的连线呈正方形。

(2) 地面高度是连续变化的，沿任何方向都不会出现间断（没有像台阶那样的情况），即地面可视为数学上的连续曲面。

(3) 对于椅脚的间距和椅脚的长度而言，地面是相对平坦的，使椅子在任何位置至少有三只脚同时着地。

提示：中心问题是用数学语言把椅子位置和四只脚着地的关系表示出来。

首先用变量表示椅子的位置，由于椅脚的连线呈正方形，以中心为对称点，正方形绕中心的旋转正好代表了椅子位置的改变，于是可以用旋转角度 θ 这一变量来表示椅子的位置。

其次要把椅脚着地用数学符号表示出来，如果用某个变量表示椅脚与地面的竖直距离，当这个距离为 0 时，表示椅脚着地了。椅子要挪动位置说明这个距离是位置变量的函数。由于正方形的中心对称性，只要设两个距离函数就行了，记 A、C 两只脚与地面距离之和为 $f(\theta)$，B、D 两只脚与地面距离之和为 $g(\theta)$，显然 $f(\theta)$、$g(\theta)\geqslant 0$，由假设 B 知 f、g 都是连续函数，再由假设 C 知 $f(\theta)$、$g(\theta)$ 至少有一个为 0，当 $\theta=0$ 时，不妨设 $g(\theta)=0$、$f(\theta)>0$，这样改变椅子的位置使四只脚同时着地。

3. 关于连续函数介值定理的故事——李尚志博客：生活中的数学[6]

到峨眉山旅游，最重要的莫过于到舍身崖看佛光。1984 年 8 月，我第一次上峨眉山。到达山顶时将近中午。安顿好住处就直奔舍身崖，希望能等着看佛光。天上艳阳高照，舍身崖下面是万丈深渊，山腰白云缭绕。如果云的高度合适，太阳以合适的角度照到云上，就会产生彩色光环，自己的人影还会投到光环中间，这就是佛光。那时舍身崖还没有什么游客，只有一名摄影师在那里等生意。我问摄影师："今天能看到佛光吗？"摄影师答："不能。已经有一个星期没有出现佛光了。"他还进一步解释道："你看，山腰的云层太矮。所

以今天不会有佛光。云如果太高,也不会有佛光。云的高度不高不矮正合适,才会有佛光。要想不高不矮正合适,这样的机会很难碰上。所以只有运气最好的人才能看到佛光。”我观察了一会儿,发现山腰的云层在一阵一阵往上涌。就问摄影师:“你看:开始的时候云层太矮。但是云层在往上涌,越涌越高。会不会涌到后来又太高了呢?在太矮和太高之间总有一个时候的高度恰到好处吧,那个时候不是就应当出现佛光了吗?”摄影师没想到我发此怪问,无话可答。他当然不知道,我在问这个问题的时候心里想的是高等数学中的连续函数介值定理:一个连续函数如果在某一点的值小于零,另一点的值大于零,从小于零到大于零过渡的过程中必然有一点的值等于零。我虽然靠这个定理把摄影师说得哑口无言,但心里也知道这个定理未必能让佛光出现,在悬崖边看了一会儿便打道回府,回住处去休息。还没有走到住处,就听见舍身崖那边传来人群的叫喊声:“快来看佛光呀!”转身一看,舍身崖边已挤满了人。我赶快返回,好不容易挤到崖边。趴在地上将头伸到外边往悬崖下看。山底的云层往上涌,涌到一定高度时就出现了彩色光环——佛光。随着云层继续升高,佛光消失了。再升高,这一堆云便散去不见了。山底又涌起新的一团云,升到一定高度再出现佛光。这个过程循环往复,我们便一次又一次看见佛光,好像是一次又一次观摩连续函数介值定理的教学片。一直观摩了 3 个多钟头,到下午四点左右才“下课”。

峨眉山云层的涌动是连续的,所以介值定理成立。黄山则不然:你刚才还看到山谷中充满了云雾,一瞬间云雾就消失得无影无踪,简直看不出有中间过程,接近于“阶梯函数”,这样的函数可以从大于零直接降到小于零而不必经过零值。

后记:坐飞机看佛光

以上文字在 2002 年写成文章发表在网上。2004 年暑假的一天早上,我坐飞机从南方飞往北京,正好坐在左边靠窗的座位。往窗外一看,飞机离云层不太高,飞机下高低不平的云朵,好像一座座山峰在飞机下移动。早晨的阳光从东方照过来,将飞机的影子投射在云层上,缓慢地向北移动。这时,我突然想起峨眉山的佛光。既然云层离飞机的高度随着飞机的移动不断变化,会不会在某个时刻云层离飞机的高度恰到好处,在云层上出现佛光呢?观察了一会儿,果然在云层上出现了一个不大的彩色光环,将飞机的影子围在中间。后来我与很多人谈起过佛光的事情,至少遇到 3 个人说他们坐飞机的时候看见过云层上的光环,但是他们都不知道峨眉山的佛光,因此也不知道飞机上看见的这个现象与峨眉山的佛光其实是同一回事。

参考文献

[1] 龚成通. 大学数学应用题精讲[M]. 上海:华东理工大学出版社,2006.
[2] 朱健民,李建平. 高等数学(上)[M]. 北京:高等教育出版社,2013.
[3] 朱健民,李建平. 高等数学(上)[M]. 北京:高等教育出版社,2013.
[4] 龚成通. 大学数学应用题精讲[M]. 上海:华东理工大学出版社,2006.
[5] 姜启源. 数学模型[M]. 2 版. 北京:高等教育出版社,1993.
[6] 李尚志博客:http://math. cncourse. com/mathroller/page/lisz.

第 2 章　导数与微分

2.1　投运物资着陆速度问题

2.1.1　问题提出[1,2]

一架军用运输机正在向一个受灾地区空投应急救援食品与药物(图 2－1)。如果飞机在一长为 200m 的开阔区域的边上立即投下物资,那么物资着陆速度多大?

图 2－1　飞机飞行图[3]

2.1.2　问题分析

这是问题 1.2——物资空投轨迹问题的后续问题,从问题 1.2 中已经知道了货物的运动方程,只需要根据运动方程求其在着陆点的导数即可。

2.1.3　数学问题

如图 2－2 所示,已知货物的运动轨迹为参数方程

$$\begin{cases} x = 40t \\ y = -5t^2 + 120 \end{cases} (单位为\ \mathrm{m}),$$

其中参变量 t 为时间(单位为 s),点 P 为着陆点,求点 P 处货物着陆的速度。

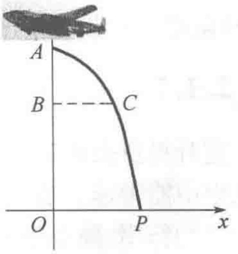


图 2－2　货物的运动轨迹

2.1.4　数学求解

首先,将运动轨迹的参数方程转化为笛卡儿坐标方程 $y = f(x)$,其次,确定到 P 点的