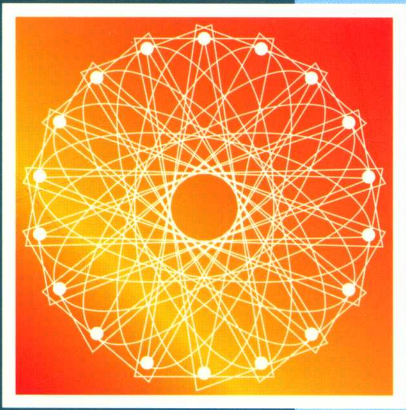
问题解决的数学建模方法与分析研究

WENTI JIEJUE DE SHUXUE JIANMO FANGFA YU FENXI YANJIU

刘常丽/著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

问题解决的数学建模方法与分析研究

刘常丽/著

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn
·北京·

内 容 提 要

数学模型是近些年发展起来的新学科，是数学理论与实际问题相结合的一门科学。本书主要论述了数学建模的理论及应用，将数学建模的过程贯穿全书各类问题的分析和讨论中，阐述了如何使用数学模型来解决实际问题，因此，具有重要的理论意义和实际应用价值。本书主要内容包括：问题解决的初等数学及简单优化方法建模、问题解决的数学规划方法建模、问题解决的微分方程方法建模、问题解决的差分方程方法建模、问题解决的概率方法建模、问题解决的图与网络方法建模、问题解决的其他方法建模等。本书内容丰富新颖，条理清晰，是一本值得学习研究的著作。

图书在版编目（CIP）数据

问题解决的数学建模方法与分析研究 / 刘常丽著
. -- 北京 ：中国水利水电出版社，2017.5
ISBN 978-7-5170-5365-1

Ⅰ. ①问… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①数学模型 Ⅳ. ①O141.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第079795号

责任编辑：杨庆川　陈　洁　　　封面设计：马静静

书　　名	问题解决的数学建模方法与分析研究 WENTI JIEJUE DE SHUXUE JIANMO FANGFA YU FENXI YANJIU
作　　者	刘常丽　著
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：(010)68367658（营销中心）、82562819（万水）
经　　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京鑫海胜蓝数码科技有限公司
印　　刷	三河市佳星印装有限公司
规　　格	170mm×240mm　16开本　20印张　358千字
版　　次	2017年5月第1版　2017年5月第1次印刷
印　　数	0001—2000册
定　　价	68.00元

前　言

近年来，数学建模方法在各领域中的应用越来越广泛，通过数学建模解决实际问题正在逐渐地成为人们的一种行为习惯．从日常生活、生产实践到社会管理，数学量化的思想和手段都得到了较多地体现，或简单，或复杂，数学建模的方法及其解决的实际问题都在不断地发展．从初等数学方法到现代数学理论，从传统的数学应用领域到现代经济、生态及信息等社会领域，数学建模方法也越来越多元化，数学建模所面临的实际问题越来越丰富、越来越复杂．数学建模之所以能发挥重要作用，关键在于数学建模的本质特征：既来源于实践又应用于实践，它利用数学的理论方法对实际问题进行描述、分析、解释和模拟．数学建模在科学技术发展中的重要作用越来越受到数学界和工程界的普遍重视，它已成为现代科技工作者必备的重要能力之一．

人才培养的关键在教育，为了科学技术发展的需要，培养高质量、高层次科技人才，数学建模已经在大学教育中逐步开展．全面提高大学生的数学水平，关系到各行各业高级专门人才的创新精神、综合素质的培养，关系到我国未来科学技术的发展和国际竞争力的提高，是百年树人大业中的重要环节．

作者基于多年的数学建模教学与数学建模竞赛培训、指导工作，参考了国内外各类数学建模书籍，撰写了本书．本书对数学建模方法与分析研究做了详细地介绍，全面而系统地介绍数学建模的基本理论与方法，主要内容为初等数学及简单优化方法建模、线性规划方法建模、微分方程建模、差分方程方法建模、概率方法建模、图与网络方法建模等，共 8 章，每章编有结合实际问题的数学建模案例分析，帮助读者更好地理解数学建模，提高他们学习数学的兴趣和应用数学的意识与能力，使他们在以后的工作中能经常性地想到用数学思想与方法去解决问题，提高他们充分利用数学、计算机软件及当代高新科成果的意识，能将数学、计算机有机地结合起来解决实际问题．

本书在撰写过程中，参考了国内外各类数学建模书籍，特向其作者表示深切的谢意。

鉴于作者水平有限，且数学建模用到的数学知识包罗万象，很难完整地反映在我们篇幅有限的书中，疏漏之处在所难免，诚望读者指正.

作　者

2017 年 3 月

目　　录

第1章　引　　言

随着计算机技术的迅猛发展，特别是计算机在高速、智能、小型、价廉四个方面的迅速发展（运算速度与智能程度为衡量计算机性能的最重要的两个指标），数学模型的应用已经渗透到从自然科学到工程技术及工农业生产，从经济活动到社会生活的各个领域.

1.1　数学建模的概念

1.1.1　数学模型

数学模型就是对实际问题的一种数学表述，是针对或参照某种问题（事件或系统）的特征和数量相依关系，采用形式化语言，概括或近似表达出来的数学结构. 数学模型常常能帮助人们更好地了解一种行为或规划未来. 可以把数学模型看作为了研究一种特定的实际系统或人们感兴趣的行为而设计的数学结构. 如图 1-1 所示，从模型中，人们能得到有关该行为的数学结论，而阐明这些结论有助于决策者规划未来.

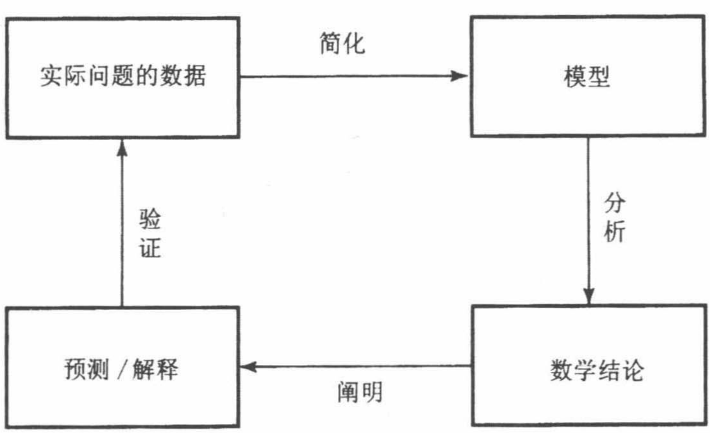


图 1-1　从考察实际数据开始的建模过程的流程图

1.1.2 数学建模

数学建模就是建立数学模型，建立数学模型的过程就是数学建模的过程. 通俗地说，就是用数学知识和方法建立数学模型解决实际问题的过程.

建立数学模型解决实际问题的思维方法可用图 1-2 表示.

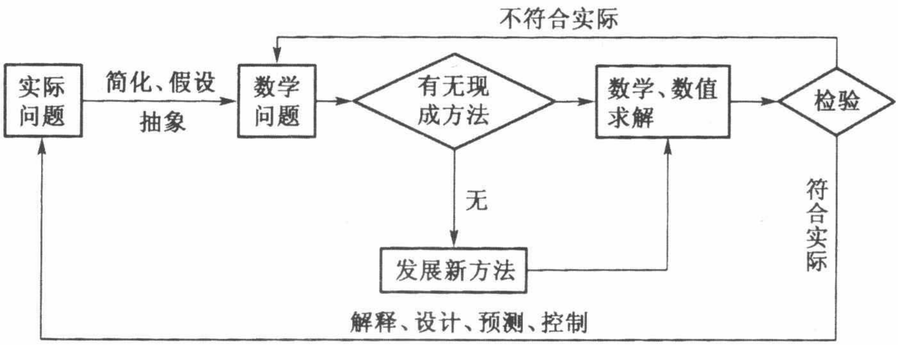


图 1-2 数学建模流程图

数学建模就是通过对实际问题的分析、抽象和简化，明确实际问题中最重要的变量和参数，通过某些规律建立变量和参量间的数学模型. 再用精确的或近似的数字方法求解，这样的过程经多次执行和完善就是数学建模的全过程.

1.2 数学建模的基本方法和步骤

数学建模的方法大体上可分为机理分析和测试分析两种. 机理分析方法是指人们根据客观事物的特征，分析其内部机理，弄清其因果关系，并在适当的简化假设下，利用合理的数学工具得到描述事物特征的数学模型；测试分析方法是指人们一时得不到事物的机理特征，便通过测试得到一串数据，再利用数理统计等知识，对这些数据进行处理，从而得到最终的数学模型.

建立数学模型需要的步骤没有固定的模式，下面是按照一般情况，提出的一个建立模型的大体过程，如图 1-3 所示.

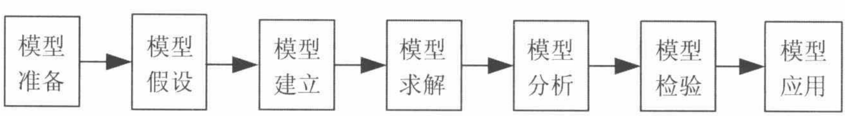


图 1-3 数学建模的基本步骤

1.3　数学建模解决实际问题

数学建模是连接数学和实际问题的纽带，它应用数学知识解决实际问题.学习数学建模要注意在思考方法和思维方式上的转变，以适应复杂的实际问题，要培养团队意识，良好的交流合作和准确表达的能力也是非常重要的.

1.3.1　录像机计数器的用途

一盘录像带从头至尾用时 183 分 30 秒，计数器 0000 变到 6152，现在录像机计数器为 4580，问剩下的一段能否录下 1 小时的节目.

(1)问题分析

①读数并非均匀增长，而是先快后慢.

②录像机的工作原理见图 1-4.

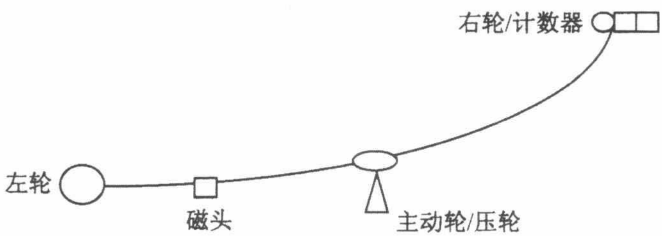


图 1-4　录像带工作原理

(2)目标

找出计数器 n 与录像带转过的时间 t 之间的关系 $t = f(n)$.

(3) 模型假设

① 录像带的线速度(单位时间通过磁头的长度)是常数 v.

② 计数器 n 与右轮的转数 m 成正比，即 $m = kn$，k 为比例系数.

③ 录像带的厚度是常数 w，空右轮的半径 r.

(4) 模型建立

方法一

右轮转盘转到第 i 圈时其半径为 $r+iw$，周长为 $2\pi(r+wi)$，m 圈总长度等于录像带转过的长度 vt，即

$$\pi\sum_{i=1}^{m}2(r+wi)=vt$$

由于 $w \ll r$，将 $m=kn$ 代入得

$$t=\pi\frac{wk^2}{v}n^2+2\pi\frac{rk}{v}n$$

方法二

右轮面积的变化 = 录像带转过的长度 × 厚度

$$\pi[(r+kwm)^2-r^2]=wvt$$

方法三

自 t 到 $t+\mathrm{d}t$，录像带在右轮上缠绕的长度为

$$v\mathrm{d}t=2\pi k(r+kwn)\mathrm{d}n$$

两边积分得

$$v\int_0^t\mathrm{d}t=2\pi k(r+kwn)\mathrm{d}n$$

因此

$$t=\pi\frac{wk^2}{v}n^2+2\pi\frac{kr}{v}n$$

本例中，r、w、v、k 为待定系数，应该给出相应测量方法.

事实上，

$$t=an^2+bn$$

只需确定两个参数 a 和 b. 理论上只需两组数据即可，但是实际上因 w 较小，很小的误差对结果的影响很大，通常应有足够的数据验证. 表 1-1 是一组相关数据.

表 1-1　t 与 n 的相关数据

t/ 分	0	20	40	60	80	100	120	140	160	183.5
n/ 转	0	1153	2045	2800	3466	4068	4621	5135	5619	6152

经数据处理得

$$a=2.50\times10^{-6},b=1.445\times10^{-2}$$

即可得到 t 与 n 的关系式.

(5) 模型检验

应从另一组数据进行检验，并计算误差.

(6) 模型应用

当 $n=4580$ 时，将 n 值代入得 $t=118.5$ 分，剩下一段录像带还可录

$183.5 - 118.5 = 65$(分).

1.3.2 椅子能否在不平的地面放稳问题

椅子问题来源于日常生活,其问题是:四条腿长相同的方椅放在不平的地面上,是否能使它四脚同时着地呢?

在简单的条件下,答案是肯定的?其证明体现了想象力所发挥的卓越作用.

1.模型假设

对椅子和地面作出如下假设:

(1) 椅子

四腿长相同,并且四脚连线呈正方形.

(2) 地面

略微起伏不平的连续变化的曲面.

(3) 着地

点接触:在地面任意位置处,椅子应至少有三只脚同时落地.

上述假设表明椅子是正常的,排除了地面有坎以及有剧烈升降等异常情况.

2.模型建立

该问题的关键是要用数学语言把条件及结论表示出来,需运用直观和空间的方式来思考.将椅脚连线构成的正方形的中心称为椅子中心,椅子处于地面任一位置,总可想象为椅子中心处于该位置 —— 某直角坐标系的原点 O 处,如图1-5所示.而用 A、B、C、D 表示椅子四脚的初始位置.椅子总能着地,则意味着通过调整,四脚能达到某一平衡位置,使四脚与地面距离均为零.这可想象为使椅子以原点 O 为中心旋转角度,此时四脚位置变为 A'、B'、C'、D'.

显然,椅子位置可用 θ 来表示,而椅脚与地面距离应是 θ 的连续函数,记 A、C 两脚,B、D 两脚与地面的距离之和分别为 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$,则该问题易归结如下:已知连续函数 $f(\theta) \geqslant 0, g(\theta) \geqslant 0$,且若 $f(\theta)g(\theta) = 0$,则一定存在 $\theta_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,使得

$$f(\theta_0) = g(\theta_0) = 0$$

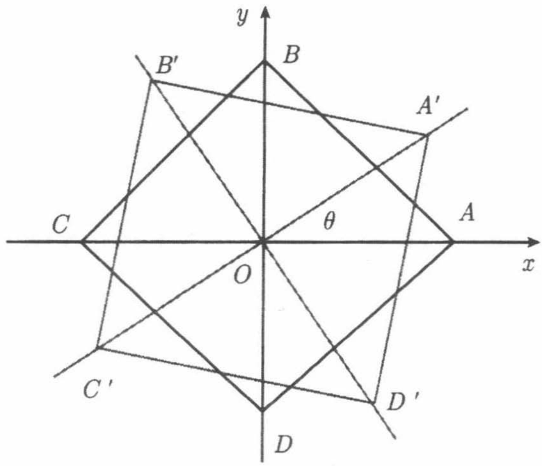


图 1-5　用 θ 表示椅子的位置

3. 模型求解

令 $\theta=\frac{\pi}{2}$（即旋转 90°，对角线 AC 与 BD 互换），则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$. 定义 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，得到 $h(0)\cdot h\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$. 根据连续函数的零点定理，则存在 $\theta_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得

$$h(\theta_0)=f(\theta_0)-g(\theta_0)=0$$

结合条件 $f(\theta)g(\theta)=0$，从而得到

$$f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$$

即 4 个点均在地面上.

1.3.3　其他问题

虽然不能说数学建模是万能的，但是数学建模能解决的问题和所涉及的领域在不断地扩大. 下面列举一些身边的实际问题，它们都可以通过数学建模适当地解决.

1. 棋子游戏

15 颗棋子分三堆，每堆分别有 3 颗、5 颗、7 颗，两人依次从中取走棋子，规定每次只能从一堆中取，至少要取走一颗，多取不限，取到最后一颗棋子

为胜. 问先取者是否有必胜方法?

2. 空气清洁

设车间容积为 V m^3,其中有一台机器每分钟能产生 r m^3 的二氧化碳,为了清洁车间里的空气,降低空气中二氧化碳的含量,用一台风力为 K m^3/min 的鼓风机通入含二氧化碳为 $m\%$ 的新鲜空气,来降低车间里空气的二氧化碳含量. 假定通入的新鲜空气能与原空气迅速均匀混合,并以相同的风量排出车间. 又设鼓风机开始工作时车间空气中含 $x_0\%$ 的二氧化碳. 问经过 t min 后,车间空气中含百分之几的二氧化碳?最多能把车间空气中二氧化碳的百分比降低到多少?

3. 管道包扎

水管或煤气管道经常需要从外部包扎以便对管道起保护作用. 包扎是用很长的带子缠绕在管道外部,如图 1-6 所示. 为节省材料,如何进行包扎才能使带子全部包住管道而且所用带子最节省?

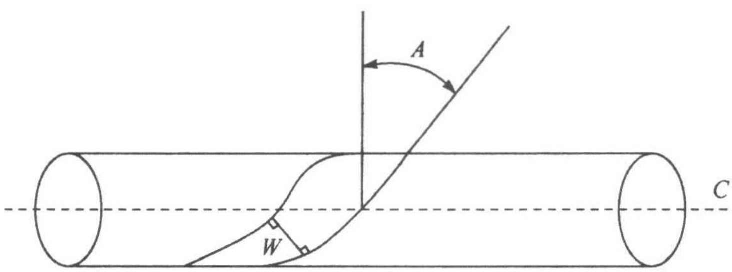


图 1-6 管道包扎示意图

4. 崖高估算

假如你站在崖顶,身上只带了一支具有跑表功能的计算器,你也许会出于好奇心想用扔下一块石头听回声的方法来估计出山崖的高度.

1) 假定你能准确地测定石块下落时间,请推算山崖的高度.

2) 通常是听到回声再按跑表,因此测定的时间中还包含了人的反应时间,反应时间虽然不长,但由于石块落地前的速度已经变得很大,对计算结果的影响仍会较大. 考虑这一问题给出新的推算结果.

3) 所测定的石块下落时间还包括了声音从崖底传回来所需要的时间,即回声时间,考虑回声时间再继续讨论问题.

5. 拥挤的水房

某大学在校学生一万余人，由一个开水房供应开水. 供水时间为早晨6:30到8:00，中午11:00到12:30，下午17:00到18:30. 水房内共有22个水龙头供大家使用. 水房内有约10 m^2 的面积供排队等候打水. 开水锅炉容量较小，送水管道较细，开水的流量受到一定的限制，再加上水管易被水垢堵塞，使水流减小甚至状如细线，致使水房内常有排队的现象. 拥挤的水房成为人们抱怨的一个话题. 我们的问题：水房的设计是否合理？为什么拥挤，拥挤的程度如何？怎样进行改进？

第2章　问题解决的初等数学及简单优化方法建模

数学建模涉及的问题多种多样,由于建模目的、分析方法与所用数学工具的不同,所得数学模型的类型也不尽相同.现实世界中有一些问题,它们的机理较为简单,借助线性、逻辑或静态的方法可建立起数学模型,而使用初等的数学方法即可对其进行求解,一般将这些模型统称为初等模型.判断一个数学模型的优劣主要取决于模型的正确性和实际应用的效果,而与使用的数学理论和方法是否高深无关.在相同的效果之下,用初等方法建立的数学模型可能要优于用高等方法建立的数学模型.通过初等分析进行数学建模的方法很多,常用的有类比分析法、几何分析法、逻辑分析法、量纲分析法等.这些方法主要通过对研究对象特性的认识,分析其因果关系,找出反映内部机理的规律,所建立的模型一般都有明确的物理或现实意义.

2.1　公平席位分配问题

数学向各个领域的渗透可以说是当代科学发展的一个显著特点,代表名额的分配问题就是数学在人类政治活动中的一个应用.它起源于西方所谓的民主政治问题,美国宪法第1条第2款指出:“众议院议员名额……将根据各州的人口比例分配……”.美国宪法从1788年生效以来,200多年中,美国的政治家们和科学家们就如何“公正合理”地实现宪法中所规定的分配原则展开了激烈的争论.虽然设计并实践了许多方法,但没有一种方法能够得到公众普遍的认可.

这个问题可用数学语言表达为:设第 i 方人数为 p_i,$(i=1,2,\cdots,s)$,总人数 $m=\sum\limits_{i=1}^{s}p_i$,待分配的代表名额为 n,问题是如何寻找一组相应的整数 $n_i(i=1,2,\cdots,s)$,使得 $n=\sum\limits_{i=1}^{s}n_i$,其中 n_i 为第 i 方获得的代表名额,并且“尽可能”地接近 $q_i=n\cdot\dfrac{p_i}{p}$,即按人口比例分配应得的代表名额.