

XINBIAN
SHUZH TIANQI YUBAO

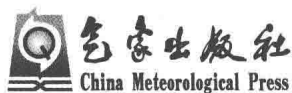


新编 数值天气预报

刘宇迪 周毅 韩月琪 王举 编著

新编数值天气预报

刘宇迪 周 毅 韩月琪 王 举 编著



内 容 简 介

本书系统地讲述了数值天气预报的基本原理和方法,并介绍了近年来数值天气预报领域的一些新进展和新成果。全书分为十一章,内容包括大气运动方程组、有限差分法、变量配置、正压和斜压原始方程模式、初始条件与边界条件、谱模式、常用球面网格及离散方法、物理过程参数化、资料同化基本理论与方法以及集合预报等。

本书可作为高等学校气象专业以及相关专业的高年级本科生和研究生教材,也可作为气象、海洋和天文等部门科研和业务人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

新编数值天气预报 / 刘宇迪等编著. — 北京 :
气象出版社, 2016. 8

ISBN 978-7-5029-6377-4

I. ①新… II. ①刘… III. ①数值天气预报
IV. ①P456. 7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 179277 号

XINBIAN SHUZHIZH TIANQI YUBAO

新编数值天气预报

出版发行: 气象出版社

地 址: 北京市海淀区中关村南大街 46 号

邮政编码: 100081

电 话: 010-68407112(总编室) 010-68409198(发行部)

网 址: <http://www.qxcbs.com>

E-mail: qxcbs@cma.gov.cn

责任编辑: 黄红丽

终 审: 邵俊年

责任校对: 王丽梅

责任技编: 赵相宁

封面设计: 博雅思企划

印 刷: 三河市百盛印装有限公司

开 本: 720 mm×960 mm 1/16

印 张: 30

字 数: 612 千字

彩 插: 4

版 次: 2016 年 8 月第 1 版

印 次: 2016 年 8 月第 1 次印刷

定 价: 78.00 元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等,请与本社发行部联系调换

前 言

本书是在2003年气象出版社出版的《数值天气预报基础》和2002年气象出版社出版的《现代数值天气预报》基础上,增加部分内容后重新修订而成,可作为高等学校气象专业的高年级本科生和研究生教材,其中第1章至第6章的内容为本科生课程的教学内容,侧重讲述数值天气预报的基本原理和方法;第7章至第11章为研究生课程的教学内容,重点介绍了近年来数值天气预报领域的一些新进展和新成果。希望通过对这些内容的学习,能够使读者系统掌握数值天气预报最常用的基本概念和处理方法,具备从事数值天气预报业务和科研工作的基本技能。

全书共分为十一章,主要内容有:数值天气预报的基础知识,包括各种坐标系中的大气运动方程组和地图投影的相关内容;数值计算方法,主要讨论有限差分法和谱方法求解偏微分方程数值解的基本原理和方法,重点介绍了变量配置相关内容;数值天气预报模式,重点介绍正压原始方程模式和斜压原始方程模式;初值条件、边界条件和资料同化,包括模式初值形成的原理和方法、水平侧边界条件的类型和给定方法;模式物理过程的处理方法,着重介绍了模式中微物理过程、积云对流、边界层过程和地表面的处理方法;集合预报,重点介绍了初值扰动和模式扰动的原理方法以及预报结果的检验方法。

第1章至第5章、第8章和第11章由刘宇迪编写,第6和第7章由周毅编写,第9章由刘宇迪、周毅和王举编写,第10章由韩月琪和周毅编写,最后由刘宇迪统稿。本书在选材上力求反映近年来数值预报领域的新技术、新方法和新成果。在每一章后面增加了复习思考题,并在附录中给出了标准大气中重力加速度、气压、气温、空气密度随高度的变化和常数表,以供查阅。本书还附有编写组编写的在Arakawa A,B,C和D以及LE网格上离散的正压原始方程模式、同时(超)张弛法的程序、由二十面体网格转换到经纬网格的程序、基于区域逐步分析集合变分资料同化方法程序等Fortran代码,供参考学习,可通过气象出版社网站下载,网址链接:<http://www.qxchs.com/ebook/xbsztqyb/mdata.html>。在本书的编写和出版过程中,得到了解放军理工大学气象海洋学院各级领导和气象出版社的大力支持,特别是几位审稿人提出了许多宝贵的建议和修改意见,在此,谨向他们表示诚挚的谢意。

由于编写的时间比较仓促,书中肯定有不少错误和疏漏之处,恳请读者批评指正,提出修改意见。

编著者

2016年1月3日

目 录

前 言

第 1 章 大气运动方程组	(1)
1.1 基本方程组	(1)
1.2 静力情况下垂直坐标变换	(11)
1.3 非静力情况下垂直坐标变换	(21)
1.4 地图投影坐标系	(29)
1.5 地图投影放大系数	(33)
复习思考题	(39)
第 2 章 有限差分法	(41)
2.1 有限差分和截断误差	(42)
2.2 平流方程初值问题的数值解	(44)
2.3 相容性、收敛性、稳定性	(51)
2.4 分析计算稳定性方法	(53)
2.5 有限离散下的误差	(58)
2.6 时间差分格式	(68)
2.7 原始方程模式的时间积分方案	(81)
2.8 平滑与滤波	(90)
2.9 非线性计算不稳定	(92)
2.10 椭圆型方程与张弛法	(94)
2.11 守恒差分格式的构造	(97)
2.12 模式的网格设计	(102)
复习思考题	(114)
第 3 章 变量配置	(116)
3.1 水平变量配置对惯性重力波的影响	(116)
3.2 水平变量配置对 Rossby 波的影响	(127)
3.3 静力模式中垂直网格计算频散性	(139)
3.4 非静力模式中垂直网格计算特性	(147)
3.5 三维网格计算频散性	(162)
3.6 空间分辨率和空间差分精度对水平网格性能的影响	(191)

复习思考题	(202)
第4章 正压原始方程模式	(203)
4.1 历史回顾	(203)
4.2 过滤模式	(205)
4.3 正压原始方程模式	(211)
4.4 正压原始方程模式的物理属性	(213)
4.5 守恒空间差分格式的构造	(218)
4.6 正压原始方程模式的计算方案	(229)
复习思考题	(232)
第5章 斜压原始方程模式	(233)
5.1 模式方程组及其积分关系	(233)
5.2 垂直差分格式的构造	(237)
5.3 水平气压梯度力的计算方法	(245)
5.4 斜压原始方程模式计算方案	(249)
5.5 WRF 模式简介	(252)
复习思考题	(257)
第6章 初始条件与边界条件	(259)
6.1 初值处理的必要性	(259)
6.2 静力初始化方法	(260)
6.3 动力初始化方法	(262)
6.4 正规初始化方法	(267)
6.5 变分初始化方法	(271)
6.6 初始化方法的比较与存在的问题	(275)
6.7 水平侧边界条件	(277)
复习思考题	(282)
第7章 谱模式	(283)
7.1 谱方法基础	(283)
7.2 球面谱模式的基础知识	(288)
7.3 离散傅里叶变换与勒让德变换	(294)
7.4 正压涡度方程谱模式	(302)
复习思考题	(306)
第8章 常用球面网格及离散方法	(307)
8.1 球面网格	(307)
8.2 阴阳网格及其处理方法	(313)

8.3 二十面体六边形网格与地转适应	(324)
复习思考题	(345)
第9章 物理过程参数化	(346)
9.1 平均运动方程组和次网格过程	(346)
9.2 大尺度凝结降水的计算方法	(348)
9.3 积云对流参数化	(351)
9.4 边界层过程的处理方法	(375)
9.5 地表面的处理方法	(388)
9.6 云微物理过程	(396)
复习思考题	(402)
第10章 资料同化基本理论与方法	(403)
10.1 概述	(403)
10.2 资料处理与质量控制	(406)
10.3 逐步订正法	(410)
10.4 资料同化的理论基础	(415)
10.5 最优插值	(418)
10.6 三维与四维变分资料同化	(421)
10.7 下降算法	(427)
10.8 集合卡尔曼滤波	(431)
10.9 集合变分同化方法	(432)
10.10 大气遥感资料的同化与快速辐射传输算子	(434)
复习思考题	(437)
第11章 集合预报	(438)
11.1 集合预报的初始扰动技术	(440)
11.2 集合预报模式扰动的发展	(448)
11.3 集合预报产品	(450)
11.4 质量评估检验方法	(451)
复习思考题	(459)
参考文献	(460)
附录 A:标准大气中重力加速度、气压、气温、空气密度随高度的变化 ...	(478)
附录 B:常数表	(480)

第1章 大气运动方程组

一切天气现象都与大气运动息息相关。尽管大气运动很复杂,但大气运动必须遵循某些基本物理定律。支配大气运动状态和热力状态变化的基本物理定律有:动量守恒定律(即牛顿第二定律),质量守恒定律,气体实验定律,热力学第一定律和水汽守恒定律等。这些定律的数学表达式,构成了描写大气运动基本规律的方程组,称为基本方程组。在给定的初始条件和边界条件下,通过数值积分基本方程组,便可得到未来时刻气象要素的空间分布,这就是数值天气预报。本章将依据动力气象学给出的大气运动基本方程组,给出基本方程组在常用的坐标系中的具体形式。

大气运动不论在空间上还是在时间上都有宽广的尺度谱,利用严谨的基本方程组试图同时预报出不同尺度的大气运动状态几乎是不可能的。其实,任何理论仅是对客观事物的近似描写,气象学者们处理数值天气预报具体问题时,在不失去大气主要特征的情况下常把非常复杂的实际大气理想化、简单化,并称之为“模式大气”。例如,对于大气大尺度运动的短时间的数值预报,早期常把实际大气视为绝热的,无摩擦的干燥大气。随着数值预报的发展,“模式大气”中虽然考虑了非绝热过程,考虑了水汽过程,然而对实际大气仍做了相当简化。描写“模式大气”的动力学热力学方程组,称之为“大气模式”。在本章中,将给出预报大尺度运动短期演变的基本方程组,讨论与其有关的一些问题,这是建立各种“大气模式”的基础。

1.1 基本方程组

1.1.1 运动方程

对于惯性参考系,牛顿第二定律可写成

$$\frac{d_a \mathbf{V}_a}{dt} = \sum_i \mathbf{f}_i \quad (1.1)$$

下标 a 表示在惯性参考系中观测到的量, $\mathbf{V}_a$ 为空气微团的绝对速度, $\frac{d_a \mathbf{V}_a}{dt}$ 为绝对加速度,而

$$\frac{d_a}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_a \cdot \nabla$$

$\sum_i f_i$ 表示单位质量空气所受的合外力。人们总是在地球上观察大气运动,而地球以常值角速度 Ω 绕地轴旋转着,所以任何一个固定在地球上并与地球一同旋转的参考系,乃是一旋转参考系。相对旋转参考系的运动称为相对运动。相对速度记作 V_3 ,则有

$$V_a = V_3 + \Omega \times r \quad (1.2)$$

r 为以地心为原点的空气微团的位置矢量。(1.2)式表明,一个空气微团的绝对速度为其相对速度和由于地球自转而产生的牵连速度的矢量和。

令 i, j, k 表示在惯性参考系中沿一直角坐标系中坐标轴的单位矢量, i', j', k' 为在旋转参考系中沿直角坐标系中坐标轴的单位矢量,则任一矢量 A 在两种参考系中可表示为

$$A = A_x i + A_y j + A_z k = A'_x i' + A'_y j' + A'_z k'$$

它的全导数为

$$\begin{aligned} \frac{d_a A}{dt} &= \frac{dA_x}{dt} i + \frac{dA_y}{dt} j + \frac{dA_z}{dt} k \\ &= \frac{dA'_x}{dt} i' + \frac{dA'_y}{dt} j' + \frac{dA'_z}{dt} k' + A'_x \frac{di'}{dt} + A'_y \frac{dj'}{dt} + A'_z \frac{dk'}{dt} \end{aligned}$$

$\frac{di'}{dt}$ 是地球自转引起的 i' 的矢端速度,有

$$\frac{di'}{dt} = \Omega \times i'$$

类似有

$$\frac{dj'}{dt} = \Omega \times j', \quad \frac{dk'}{dt} = \Omega \times k'$$

由此可得

$$\frac{d_a A}{dt} = \frac{dA}{dt} + \Omega \times A \quad (1.3)$$

根据(1.3)式,令 $A = V_a$,于是有

$$\frac{d_a V_a}{dt} = \frac{dV_a}{dt} + \Omega \times V_a$$

将(1.2)式代入,得

$$\frac{d_a V_a}{dt} = \frac{d(V_3 + \Omega \times r)}{dt} + \Omega \times (V_a + \Omega \times r)$$

或

$$\frac{d_a V_a}{dt} = \frac{dV_3}{dt} + 2\Omega \times V_3 + \Omega \times (\Omega \times r) \quad (1.4)$$

上式表明,绝对加速度等于相对加速度、科氏加速度、向心加速度的矢量和。

单位质量微团所受的外力有气压梯度力($-\nabla_3 p/\rho$),地球引力($\mathbf{g}_a$)和摩擦力($\mathbf{F}$)。则旋转参考系中相对运动方程的矢量形式为

$$\frac{d\mathbf{V}_3}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla_3 p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_3 - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \mathbf{g}_a + \mathbf{F} \quad (1.5)$$

式中 $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_3$ 称科氏力, $-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ 称惯性离心力,两者常被称为“视示力”,以区别于真实力。地心引力与惯性离心力,只是空气微团的坐标函数,可将两力合并在一起

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_a - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$$

$\mathbf{g}$ 称为重力。于是,(1.5)式可写成

$$\frac{d\mathbf{V}_3}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla_3 p + \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_3 + \mathbf{F} \quad (1.6)$$

1.1.2 连续方程

质量守恒定律的数学表达式称连续方程。考虑一有限物质体积元,取笛卡尔(Cartesian)坐标,体积元体积为 $\delta\tau = \delta x \delta y \delta z$,空气微团密度为 ρ ,则该有限体积元中空气质量为 $\rho \delta\tau = \rho \delta x \delta y \delta z$,由质量守恒定律,有

$$\frac{d\rho \delta\tau}{dt} = 0$$

即有

$$\delta x \delta y \delta z \frac{d\rho}{dt} + \rho \delta y \delta z \frac{d\delta x}{dt} + \rho \delta x \delta z \frac{d\delta y}{dt} + \rho \delta x \delta y \frac{d\delta z}{dt} = 0$$

“d”代表全微分,“ δ ”是微差符号,这是两种完全不同性质的运算,“d”和“ δ ”运算可调换次序,即有

$$\frac{d\delta x}{dt} = \delta \frac{dx}{dt} = \delta u, \quad \frac{d\delta y}{dt} = \delta v, \quad \frac{d\delta z}{dt} = \delta w$$

u, v, w 分别为沿 x, y, z 轴的速度分量,故上式可改写为

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

取 $\delta x, \delta y, \delta z \rightarrow 0$ 的极限,有

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

或写成

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3 = 0 \quad (1.7a)$$

其中

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$\nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3$ 即速度散度。由推导中可看出

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3 = \frac{1}{\delta\tau} \frac{d\delta\tau}{dt}$$

这表明速度散度是物质体积元的体积在运动中的相对膨胀率。由高斯定律有

$$\int_{\delta\tau} \nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3 d\tau = \int_{\sigma} \mathbf{V}_3 \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

σ 是物质体积元边界闭合曲面, 取 $\delta\tau \rightarrow 0$ 的极限有

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3 = \lim_{\delta\tau \rightarrow 0} \frac{\int_{\sigma} \mathbf{V}_3 \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{\delta\tau}$$

$\int_{\sigma} \mathbf{V}_3 \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ 是通过边界闭合曲面的净流量, 所以速度散度又可解释为单位体积中净流量。

连续方程还可以改写为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_3 \cdot \rho \mathbf{V}_3 = 0 \quad (1.7b)$$

1.1.3 状态方程

在 100 km 高度以下, 大气是一种成分几乎不变化的混合气体。有些成分的微小变化可能是重要的, 但本书中除了考虑水汽变化外, 其他成分的微小变化都略去不计。在正常温度和气压变化范围内, 空气完全可以认为是一种成分不改变的理想气体。由理想气体实验定律, 可得状态方程为

$$p = \rho RT \quad (1.8a)$$

式中 R 为干空气比气体常数, $R = 287 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ 。对于湿空气, 比气体常数 $R_w = (1 + 0.61q)R$, q 为比湿, 若引进虚温 T_v , $T_v = (1 + 0.61q)T$, 则湿空气状态方程可写成

$$p = \rho R_w T = \rho R T_v \quad (1.8b)$$

一般情况下不计 T 与 T_v 的差别, 但在积分静力方程计算等压面高度时, 考虑水汽含量是完全必要的。

1.1.4 热力学方程

热力学第一定律描述了能量守恒原理。能量守恒是指一系统中能量变化完全是由于通过这个系统边界能量净输送所引起的。对于气象问题可以不考虑电能、磁能、化学能, 适用于理想气体的热力学第一定律的形式为

$$c_v \frac{dT}{dt} = -p \frac{d\alpha}{dt} + Q \quad (1.9a)$$

式中 c_v 为定容比热, $c_v = 717 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$, $c_v dT/dt$ 为单位质量理想气体的内能变化率, $-p d\alpha/dt$ 为理想气体压缩功率, Q 为非绝热加热率, (1.9a) 式称热力学方程。利用状态方程 $p\alpha = RT$, 注意到 $c_p = c_v + R$, c_p 为定压比热, $c_p = 1004 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$, (1.9a) 式可改写为

$$c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = Q \quad (1.9b)$$

令 $Q=0$, 则描写干绝热过程方程为

$$c_p d\ln T - R d\ln p = 0 \quad (1.9c)$$

对上式积分, 设初状态为 p, T , 终态为 p_{00}, θ , 这里 $p_{00} = 1000 \text{ hPa}$, 则有

$$\theta = T \left(\frac{p_{00}}{p} \right)^{R/c_p}$$

上式取对数微分有

$$c_p d\ln \theta = c_p d\ln T - R d\ln p$$

所以, 对于干绝热过程, 根据 (1.9c) 式热力学方程可简单地写成

$$\frac{dc_p \ln \theta}{dt} = 0$$

而非绝热过程, 若定义 $s = c_p \ln \theta$, s 称比熵, 则热力学方程又可写成

$$\frac{ds}{dt} = \frac{Q}{T} \quad (1.9d)$$

1.1.5 水汽方程

考虑一物质体积元 $\delta\tau$, 水汽密度为 ρ_w , 设体积元中有水汽的源或汇, 若单位时间内, 源为每单位体积中提供的水汽质量为 S , 由水汽守恒定律有

$$\frac{d}{dt}(\rho_w \delta\tau) = S \delta\tau$$

即有

$$\frac{d\rho_w}{dt} + \rho_w \frac{1}{\delta\tau} \frac{d\delta\tau}{dt} = S$$

而

$$\frac{1}{\delta\tau} \frac{d\delta\tau}{dt} = \mathbf{V}_3 \cdot \mathbf{V}_3$$

于是有

$$\frac{d\rho_w}{dt} + \rho_w \mathbf{V}_3 \cdot \mathbf{V}_3 = S$$

比湿 q 定义为 $q = \rho_w / \rho$, 代入上式有

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho q) + \mathbf{V}_3 \cdot \rho q \mathbf{V}_3 = S$$

利用连续方程,可得常用的水汽方程为

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{V}_3 \cdot \nabla_3 q = \frac{S}{\rho} = S_1 \quad (1.10)$$

式中 S_1 为水汽源,即单位时间内为单位质量空气提供的水汽量。

1.1.6 闭合方程组

(1.6), (1.7), (1.8), (1.9), (1.10) 式构成大气运动基本方程组为

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{V}_3}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla_3 p + \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_3 + \mathbf{F} \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3 = 0 \\ c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = Q \quad \left(\alpha = \frac{1}{\rho} \right) \\ \frac{dq}{dt} = S_1 \\ p = \rho R T \end{cases} \quad (1.11)$$

若 $\mathbf{F}, Q, S_1$ 是已知函数,基本方程组是闭合的。若考虑的模式大气是绝热、无摩擦、干燥大气,则 $\mathbf{F}, Q, S_1$ 为零,水汽方程也就不考虑了,未知场变量为 $\mathbf{V}_3, p, \rho, T$, 方程组仍是闭合的。

地球接近于正球体,研究包围在地球周围大气运动,采用球坐标最适宜。球坐标系的原点即地心,取 λ, φ, r 为坐标, λ 为经度, φ 为纬度(余纬), r 为径向长度。 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, 分别为与纬圈相切指向东、与经圈相切指向北、与球面垂直指向天顶为正向的单位矢量。以 u, v, w 表示速度在三个方向上的分量,则

$$\mathbf{V}_3 = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$$

而

$$u = r \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt}, \quad v = r \frac{d\varphi}{dt}, \quad w = \frac{dr}{dt}$$

这样可将矢量形式运动方程(1.6)分解为以下三个标量方程

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \cos \varphi \partial \lambda} + 2\Omega v \sin \varphi - 2\Omega w \cos \varphi + \frac{uw \tan \varphi}{r} - \frac{uw}{r} + F_\lambda \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \varphi} - 2\Omega u \sin \varphi - \frac{u^2 \tan \varphi}{r} - \frac{vw}{r} + F_\varphi \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g + 2\Omega u \cos \varphi + \frac{u^2 + v^2}{r} + F_r \end{aligned}$$

而连续方程(1.7a)可写成

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{r \cos \varphi \partial \lambda} + \frac{\partial (v \cos \varphi)}{r \cos \varphi \partial \varphi} + \frac{\partial (wr^2)}{r^2 \partial r} \right) = 0$$

热力学方程,水汽方程,状态方程形式不变(以上推导过程参看《动力气象学教程》,吕美仲)。

这些方程可做以下传统的简化:因 $r = z + a$, z 为位势高度, $a = 6371$ km 为地球半径,在所感兴趣的大气运动范围内 $z \ll a$,因而当 r 处于方程中各项系数的地位时,可以近似取 $r \cong a$,但因 $dr/dt = d(z+a)/dt = w$,因此,当 r 处于微商地位时,则不能取 $r \cong a$,这一近似称之为薄层近似。采用这一近似后,沿 i, j, k 方向的微小曲线距离如用 $\delta x, \delta y, \delta z$ 表示则有

$$\delta x = r \cos \varphi \delta \lambda \cong a \cos \varphi \delta \lambda, \quad \delta y = r \delta \varphi \cong a \delta \varphi, \quad \delta z = \delta r$$

V_3 的三个分量取为

$$u \cong a \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt} = \frac{dx}{dt}, \quad v \cong a \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}$$

而

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &\cong \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{a \cos \varphi \partial \lambda} + v \frac{\partial}{a \partial \varphi} + w \frac{\partial}{\partial r} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

体积元 $\delta \tau$ 取

$$\delta \tau = r^2 \cos \varphi \delta \lambda \delta \varphi \delta r \cong a^2 \cos \varphi \delta \lambda \delta \varphi \delta z$$

对地轴的绝对角动量 J 取为

$$J = r \cos \varphi (u + \Omega r \cos \varphi) \cong a \cos \varphi (u + \Omega a \cos \varphi)$$

注意到取近似后简化方程应不违背基本物理定理和物理概念,例如, i 方向标量运动方程似乎可简化成

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{a \cos \varphi \partial \lambda} + 2\Omega \sin \varphi v - 2\Omega \cos \varphi w + \frac{uv}{a} \tan \varphi - \frac{uw}{a} + F_\lambda$$

实际上这一方程已违背绝对动量守恒原理,不难证明 i 方向的运动方程可改写为

$$\frac{d}{dt} [r \cos \varphi (u + \Omega r \cos \varphi)] = r \cos \varphi \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \cos \varphi \partial \lambda} + F_\lambda \right)$$

取薄层近似后,绝对角动量已简化为 $a \cos \varphi (u + \Omega a \cos \varphi)$,于是绝对角动量守恒原理应表示为

$$\frac{d}{dt} [a \cos \varphi (u + \Omega a \cos \varphi)] = a \cos \varphi \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{a \cos \varphi \partial \lambda} + F_\lambda \right)$$

将上式展开,则有

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{a \cos \varphi \partial \lambda} + 2\Omega \sin \varphi v + \frac{uv}{a} \tan \varphi + F_\lambda$$

这就是取薄层近似后的 i 方向运动方程的简化形式,它不违背角动量守恒原理,但方程中含 w 的项应略去。此外,简化方程组还应不违背机械能守恒原理,即要满足

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + gz \right) = -\frac{1}{\rho} \left(u \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + v \frac{\partial p}{a \partial \varphi} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) + uF_\lambda + vF_\varphi + wF_z$$

科氏力和曲率项力都是“视示力”，与 $\mathbf{V}_3$ 垂直不做功。在运动方程 i 方向分量方程简化形式中已略去 $-2\Omega \cos \varphi w$ 和 $-uw/r$ 两项，因此， j 方向上分量方程中要略去 $-vw/r$ ， k 方向上分量方程中要略去 $(u^2 + v^2)/r$ 和 $2\Omega \cos \varphi w$ 项，否则就会导致科氏力、曲率项力做功的结论，所以取薄层近似后的球坐标系中运动方程的简化形式应为

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{a \cos \varphi \partial \lambda} + \frac{uv \tan \varphi}{a} + f_v + F_\lambda \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{a \partial \varphi} - fu - \frac{u^2 \tan \varphi}{a} + F_\varphi \\ \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z \end{cases}$$

这里 $f = 2\Omega \sin \varphi$ ， f 即科氏参数。取薄层近似后连续方程不应违背质量守恒定律。因取薄层近似后流体体积元为 $\delta\tau = a^2 \cos \varphi \delta\lambda \delta\varphi \delta z$ ，所以速度散度简化为

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3 \cong \lim_{\delta\tau \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\delta\tau} \frac{d\delta\tau}{dt} \right) \cong \lim_{\delta\tau \rightarrow 0} \left[\frac{1}{a^2 \cos \varphi \delta\lambda \delta\varphi \delta z} \frac{d}{dt} (a^2 \cos \varphi \delta\lambda \delta\varphi \delta z) \right]$$

展开后就有

$$\nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3 \cong \frac{\partial u}{a \cos \varphi \partial \lambda} + \frac{\partial v}{a \partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{v}{a} \tan \varphi$$

因而简化的连续方程形式为

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{a \cos \varphi \partial \lambda} + \frac{\partial v}{a \partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{v}{a} \tan \varphi \right) = 0$$

简化的热力学方程形式不变。因此，球坐标系中基本方程组取薄层近似后的形式为

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{a \cos \varphi \partial \lambda} + f_v + \frac{uv \tan \varphi}{a} + F_\lambda \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{a \partial \varphi} - fu - \frac{u^2 \tan \varphi}{a} + F_\varphi \\ \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{a \cos \varphi \partial \lambda} + \frac{\partial v}{a \partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{v}{a} \tan \varphi \right) = 0 \\ c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = Q \\ p = \rho RT \end{cases} \quad (1.12)$$

式中

$$f = 2\Omega \sin \varphi \quad (1.13)$$

$$\frac{d}{dt} \cong \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{a \cos \varphi \partial \lambda} + v \frac{\partial}{a \partial \varphi} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.14)$$

这一方程组虽经简化,但仍然十分精确,可称“严谨”的基本方程组,它能描述各类尺度的运动。以上方程组仍然十分复杂,且球坐标系中基本方程组在极点为奇点,不论做解析分析还是进行数值计算都会遇到困难。因此,除了做全球数值预报或研究全球范围内大气运动时必须采用球坐标系外,通常都采用局地直角坐标系。

局地直角坐标系既有球坐标系特点,也有笛卡尔直角坐标系特点。这一坐标系自变量取 x, y, z , 三个坐标方向 i, j, k 与球坐标系相同。局地直角坐标系与球坐标系自变量之间关系为

$$\delta x = a \cos \varphi \delta \lambda, \quad \delta y = a \delta \varphi, \quad \delta z = \delta r$$

在局地直角坐标系中,球面引起的 i, j, k 的空间变化是不考虑的,即将球面的一部分视为平面了,因此,球坐标系运动方程中,含地球曲率的各项均可忽略不计,于是可得局地直角坐标系中的基本方程组形式为

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f v + F_x \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f u + F_y \\ \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \\ c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = Q \\ p = \rho R T \end{cases} \quad (1.15)$$

局地直角坐标可视为球坐标系的简化形式。它保持了球面坐标系的框架,但忽略了球面曲率的影响。另一方面,它与笛卡尔直角坐标系也是有差别的,笛卡尔坐标系中 i', j', k' 这三个方向在空间中是不变的,而局地直角坐标系 i, j, k 方向随地而异;笛卡尔坐标系中自变量 x', y', z' 是独立的,而局地直角坐标系中 x, y, z 只是近似独立,对一连续可微的场变量,求混合微商时,微商次序交换所得值并不相等,实际上

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{a^2 \cos \varphi} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda \partial \varphi} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{1}{a^2 \cos \varphi} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda \partial \varphi} + \frac{\tan \varphi}{a^2 \cos \varphi} \frac{\partial f}{\partial \lambda} \end{aligned}$$

两者之间的差值在高纬极地地区很大,但在中低纬地区差值可略去不计,所以局地直角坐标系只适用于研究中低纬有限区域大气运动,也适用于研究中纬度两纬圈构成的纬向通道中的运动。此外,地转参数 $f = 2\Omega \sin \varphi$ 是纬度的函数(是 y 的函数),若

采用局地直角坐标系研究中低纬有限区域的大气运动,只要运动的经向尺度远小于地球半径,可采用 β 平面近似,即取

$$f = f_0 + \beta y \quad \left(\beta = \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\varphi_0} = \frac{2\Omega \cos \varphi_0}{a} \right)$$

β 平面近似的含义为:当 f 处于系数地位时,取 $f \approx f_0$ ($f_0 = 2\Omega \sin \varphi_0$, φ_0 为某一固定纬度,取区域南北纬度的平均值);当 f 处于对 y 微商地位时,取 $\beta = \text{常数}$ 。这样做的好处是:尽管局地直角坐标系中略去了球面效应引起的曲率项,但球面效应引起的 f 随纬度变化对大气运动的影响却部分保留下来了。低纬赤道地区 $f_0 \approx 0$,因而有 $f \approx \beta y = \frac{2\Omega}{a} y$,这就是所谓的赤道 β 平面近似。显然,采用 β 平面近似后,用局地直角坐标系基本方程组研究大气运动将是方便的。

对于大尺度运动,在垂直方向上,气压梯度力与重力基本上相平衡,只要运动的垂直尺度运动小于水平尺度($D \ll L$, D 代表垂直尺度, L 代表水平尺度),就有

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \approx 0$$

上式就是静力平衡方程。因此,研究大尺度运动时,基本方程组中可取静力平衡近似,即以静力平衡方程代替(1.12)式或(1.15)式中的第三运动方程。取静力平衡近似的基本方程组称静力平衡原始方程组。

为了得到基本方程组的确定解,还必须给出初始条件和边界条件,这些条件实际上是对基本方程组的补充与约束,给得不正确,解就可能是不适定的。对于方程组(1.15),初始条件为

$$\begin{cases} \mathbf{V} = \mathbf{V}^0(x, y, z) \\ p = p^0(x, y, z) \\ T = T^0(x, y, z) \end{cases} \quad (1.16)$$

上边界条件,通常认为 $z \rightarrow \infty$ 时场变量有界,常用的上边界条件有

$$p|_{z \rightarrow \infty} = 0 \quad \text{或} \quad (\rho w)|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad (1.17)$$

下边界,即地球表面,认为它是刚体表面,此种情形下,沿壁面各点的空气微团速度应垂直于壁面的法线。设地球表面的方程为 $F(x, y, z) = 0$,则上述条件表示为

$$z = z_s(x, y), \quad \mathbf{V}_3 \cdot \nabla_3 F = 0 \quad (1.18a)$$

因 $F(x, y, z) = z - z_s(x, y) = 0$, z_s 是地形高度,所以下边界条件又可写成

$$z = z_s(x, y), \quad w = u_s \frac{\partial z_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial z_s}{\partial y} \quad (1.18b)$$

上式表明,由于地形表面起伏不平,空气微团将出现强迫垂直运动。

考虑一有限区域的运动,还要给出侧边界条件,这将在以后的章节中给予讨论。