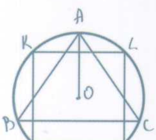

无穷大的历史演变与希尔伯特第一问题探讨

蔡 立 / 著

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

无穷大的历史演变
与
希尔伯特第一问题探讨

蔡　立／著

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

连续统假设是现代数学中的一大难题，又被称为希尔伯特第一问题。本书分为上、下两篇，上篇主要讲述无穷大的历史演变和连续统问题的来龙去脉，同时还对康托、希尔伯特、哥德尔和科恩等人的工作进行分析讨论。下篇主要阐述作者处理连续统问题的基本思想以及根据这一思想作者所做的研究工作。

本书适用面较广，具有高等数学基础知识的读者均可阅读本书。

图书在版编目(CIP)数据

无穷大的历史演变与希尔伯特第一问题探讨/蔡立著. —上海：上海交通大学出版社，2016

ISBN 978-7-313-14972-5

Ⅰ.①无… Ⅱ.①蔡… Ⅲ.①连续统假设—研究②希尔伯特问题—研究

Ⅳ.①O144②O177.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 112606 号

无穷大的历史演变与希尔伯特第一问题探讨

著　　者：蔡　立

出版发行：上海交通大学出版社

地　　址：上海市番禺路 951 号

邮政编码：200030

电　　话：021-64071208

出 版 人：韩建民

印　　制：凤凰数码印务有限公司

经　　销：全国新华书店

开　　本：787mm×960mm　1/16

印　　张：15.25

字　　数：227 千字

版　　次：2016 年 7 月第 1 版

印　　次：2016 年 7 月第 1 次印刷

书　　号：ISBN 978-7-313-14972-5/O

定　　价：68.00 元

谨将本书献给我的母校、献给我的老师、献给我大学时的同窗——北京航空学院5系77级的全体同学，我的这项研究工作就是从大学时代开始的。

没有任何问题能像无穷那样深深地触动人们的情感，很少有别的概念能像无穷那样激励人们的理智产生富有成果的思想，然而，也没有任何其他概念能像无穷那样需要加以阐明。

——希尔伯特

横看成岭侧成峰，
远近高低各不同。
不识庐山真面目，
只缘身在此山中。

——苏东坡

PREFACE 前　言

作者从事基础科学研究30余年，这些年来主要研究的问题都涉及一个概念，这就是无穷大。无穷是人类最早得到的几个抽象概念之一，几千年来，人们对它的思索连绵不断：无穷激发了艺术家的想象、引起哲学家的思索、推动了宇宙学家的探索，同时，无穷也使数学家们出现了不合。自古以来，在是否承认无穷这一问题上，人们就一直存在着争论。

一种观点认为，无穷是在永远延伸的进程，无穷是潜在的，不可能作为一个固定的整体而存在，这种观点被称为"潜无穷"。自亚里士多德以来，潜无穷观在数学界占据统治地位长达两千多年，直到19世纪康托创立集合论，人们才在无穷的认识上前进了一大步。在康托的集合论中，他提出了一个与潜无穷相对立的观点——实无穷，这种观点认为：无穷是一个已经构造完成了的整体，可以当做一个现成的实体去认识。

自此之后，数学家和哲学家由于无穷观的不同，分成了两派：克罗内科、庞加莱、布劳威尔等都主张潜无穷；而康托、戴德金、希尔伯特等则支持实无穷的观点。可以说，这两种不同的无穷观，是迄今为止哲学界和数学界诸多不同流派观点分歧的一个主要根源。

本书将从无穷概念的起源开始，对无穷大的历史演变进行考察，探讨无穷这一观念是如何让数学家们感到困惑，又是如何一次又一次地引发数学危机的，我们将看到，数学史上的三次数学危机都与无穷有关。同时，我们还对康托集合论，特别是其中的基数理论进行了研究探讨，在集合论中，康托遗留了

一个著名难题——连续统假设，这个问题正是本书讨论的重点。

连续统假设是现代数学中的一大难题，它是 1878 年由康托首先提出来的，1900 年，希尔伯特在他的著名演讲中列举了 23 个未解决的数学问题，连续统假设是其中的第一个问题。虽然，100 多年来，许多数学家为了解决这一问题付出了不懈的努力，但这个问题至今仍未解决。

本书由两部分组成，第一部分首先对无穷大的历史和连续统问题的来龙去脉进行了考察。连续统问题是集合论乃至数学基础中的一个极具吸引力的问题，在过去的 100 多年里，它吸引了许多著名的数学家对其进行研究，其中康托、希尔伯特、哥德尔和科恩对连续统问题的贡献最大，因此，在本书的第一篇里，我们对这几个人的工作进行了重点讨论。另外，目前国内出版的一些有关连续统问题的著作，大都只介绍外国学者的工作，很少谈及中国学者的工作，为了弥补这一缺陷，在本书的第一篇，我们将用很大的篇幅来介绍中国学者在这一领域所做的工作以及这些工作对作者的影响，然后在此基础上，阐述作者对解决连续统问题的看法。

本书的第二篇将在第一篇工作的基础上，介绍作者在这一领域所做的研究工作，若想证明连续统假设，必须注意以下几个问题：

(1) 把自然数和集合这两个概念之间的关系颠倒一下。

目前，许多关于数学基础方面的书，包括罗素的《数学原理》和希尔伯特的《数学基础》，都把集合作为数学的基础，然后把数的概念放到集合的上面，利用集合来定义自然数。由此带来的一个问题是，当人们研究集合论时，由于数的概念没有形成，因此，人们只能用纯逻辑推理的方法处理集合问题，数学中一种最重要的方法，解析数学的方法无法在集合论中使用。本书提出的一个重要思想是：把集合和数这两个概念之间的关系颠倒一下，即把数放到集合的下面，先将数的概念从有限扩展到无穷，然后，再构建集合理论，这样在研究集合论问题时，既可以用逻辑演绎的方法研究集合，也可以用解析数学的方法研究问题，只有这样连续统问题才有希望得以解决。

(2) 解决连续统问题必须引入极限方法。

连续统问题简单地说是问在一条直线上有多少个点？由于点和数之间存在一一对应关系，因此，在研究连续统问题时，必须把它与实数理论联系起来；

而实数理论建立在极限概念的基础上，所以，若想证明连续统假设，我们必须引入极限的思想和方法。

(3) 只需定义一个无穷大数就够了。

测量物体长度只需要使用一种长度单位，同样的道理，研究连续统问题也只需引入一个无穷大数就够了，并以此为基础“形成一个数字变量的函数”，把其他的无穷大数，都与一个数字变量的函数联系起来。

以往人们在对连续统假设的研究中，由于忽视了上面几个问题，从而导致了连续统问题长期无法解决，本书将证明如果注意了上面几个问题，就可以给出连续统假设的一个证明。

作者以为连续统问题之所以 100 多年来一直没有解决，原因就在于数学家们把这一问题限定在一个十分狭小的范畴内，企图用纯逻辑推理的方法证明这一问题。作者以为，连续统问题是不能用纯逻辑推理的方法证明的，若想解决这一问题，需要用解析数学的方法进行“计算”，而要做到这一点，就必须改变对数学基础的认识，把数和集合这两个概念之间的关系颠倒一下，以便把解析数学的方法引入到集合论中来，这就是作者对解决连续统问题的一个基本看法，也是本书重点阐述的一个观点。

连续统假设是一个著名的数学难题，作者不敢说能够解决这一问题，也不敢说书中的观点完全正确。现在，把这些观点整理成书，与大家分享，如果作者的这些观点以及所做的工作，对于最终解决连续统问题有所帮助，作者会感到由衷的高兴。

1977 年高考距今已经 38 年了，“三十八年过去，弹指一挥间”。作为恢复高考后的第一届大学生，许多人已经进入了退休生活，开始撰写回忆文章了。回首往事，感慨万千，由于每个人的经历不同，对过去的感觉也有所不同。然而，对于我们这届学生来说，有一点是共同的，1977 年的高考改变了我们的命运。

在过去的 30 年里，我能够安安静静地从事自己喜爱的科学研究工作，首先，我应该感谢时代，感谢时代对我的关顾。同时，感谢我的母校——北京航空航天大学，感谢母校老师对我多年的培养和教育；感谢我的大学同学，我们

一起度过了最美好的大学时光，我的这项研究工作就是从大学时代开始的。正因为如此，每当回忆往事时，我总是心存感激。

最后，愿将本书献给我的母校、献给我的老师、献给我的大学同学，以表达我完稿之际的心情。

蔡　立

2016 年元月于北京中关村

目　录

CONTENTS

第一篇　无穷大的历史演变与连续统假设的来龙去脉…………………… 001

第 1 章　无穷概念的起源与第一次数学危机 / 003

第 2 章　第二次数学危机与数学分析的严格化 / 011

第 3 章　实数理论的建立 / 019

第 4 章　康托集合论的建立过程 / 026

第 5 章　集合论的悖论与第三次数学危机 / 034

第 6 章　公理集合论的建立 / 043

第 7 章　康托与克罗内克之间的冲突以及康托理论批评者的观点 / 047

第 8 章　康托遗留的一个数学难题——连续统假设 / 056

第 9 章　一个数学梦想的破碎 / 063

第 10 章　公理化方法的诞生和欧几里得几何原理中的家丑 / 067

第 11 章　非欧几何学的建立与数学的无矛盾性研究 / 074

第 12 章　希尔伯特计划以及希尔伯特关于连续统假设的“证明概要” / 083

第 13 章　哥德尔的工作以及连续统问题研究的后续进展 / 094

第 14 章　两位中国数学家的工作以及作者对哥德尔工作的辩证解读 / 107

第 15 章　对数学方法的历史考察以及两种数学方法的对比 / 121

第 16 章　作者解决连续统问题的基本思想 / 133

第二篇　对希尔伯特第一问题的探讨 …………………………………… 141

第 17 章　自然数、整数和有理数 / 143
第 18 章　康托的实数理论 / 153
第 19 章　实数的公理系统以及表示方法 / 160
第 20 章　实数的进一步扩张 / 166
第 21 章　用“理想元素”的方法将实数域扩张成为超实数域 / 172
第 22 章　集合的基本概念与集合代数 / 178
第 23 章　关系、映射和序集 / 184
第 24 章　康托的基数理论 / 190
第 25 章　康托基数理论存在的问题以及连续统假设的困难所在 / 197
第 26 章　ω 基数理论 / 201
第 27 章　连续统假设的证明 / 207
第 28 章　总结：证明连续统假设的 3 个关键点 / 215

参考文献 ……………………………………………………………… 223

人名索引 ……………………………………………………………… 229

第一篇

无穷大的历史演变
与连续统假设的来龙去脉

无穷是人类最早得到的几个抽象概念之一。希尔伯特曾经说过:“没有任何问题能像无穷那样深深地触动人们的情感,很少有别的概念能像无穷那样激励人们的理智产生富有成果的思想,然而,也没有任何其他概念能像无穷那样需要加以阐明”。

自古以来,在是否承认无穷这一问题上,人们就一直存在着争论。一种观点认为,无穷是在永远延伸的进程,无穷是潜在的,不可能作为一个固定的整体而存在,这种观点被称为“潜无穷”。

自亚里士多德以来,潜无穷观在数学界占据统治地位长达两千多年,直到19世纪康托创立集合论,人们才在关于无穷的认识上大踏步地前进了。在康托的集合论中,提出了一个与潜无穷相对立的观点——实无穷,这种观点认为:无穷是一个已经构造完成了的整体,可以当做一个现成的实体去认识。

自此之后,数学家和哲学家由于无穷观的不同,而分成了两派,可以说,这两种不同的无穷观,是迄今为止哲学界和数学界诸多不同流派观点分歧的一个主要根源。

本篇,让我们从无穷概念的起源开始,对无穷的历史进行一番考察,看一看无穷这一观念是如何让数学家们感到困惑,又是如何一次又一次地引发数学危机的,我们将看到,数学史上的3次数学危机都与无穷有关。同时,我们还对康托集合论的创建过程进行了考察,介绍了康托提出的一个著名数学问题——连续统假设,这个问题是本书研究的重点。

连续统问题是集合论乃至数学基础中的一个极具吸引力的问题,在过去的100多年里,它吸引了许多著名的数学家对其进行研究,其中康托、希尔伯特、哥德尔和科恩对连续统问题的研究

贡献最大，另外，弗雷格对康托超穷数理论的批评以及鲁滨孙创立的非标准分析理论，对于我们今天研究无穷大问题和连续统假设都有重要的参考价值，因此在本篇，我们对这几个人的工作进行了重点的分析和讨论。

目前，国内出版的一些有关连续统问题的著作，大都介绍外国学者的工作，很少介绍中国学者的工作，为了弥补这一缺陷，本篇将用较大的篇幅介绍中国学者在这一领域所做的工作以及这些工作对作者的影响，然后在此基础上，阐述作者对解决连续统问题的看法。

第1章 无穷概念的起源与第一次数学危机

1.1 无穷概念的起源

在无穷还没有成为数学研究对象之前，它已经在一些哲学先知们的心中回荡。按照克莱因《古今数学思想》的观点，现代数学起始于希腊古典时期。在公元前5世纪和6世纪间，古希腊人发现了无穷。这个概念与人类的直觉有矛盾，以致使古代哲学家和数学家深感困惑，这一发现引起了人们对它的恐惧，并导致了发现者因此而死，由此还引发了第一次数学危机[1]。

古希腊哲学有4大学派：米利都学派、毕达哥拉斯学派、埃利亚学派以及雅典学派。其中毕达哥拉斯学派同无穷的概念有着千丝万缕的联系。

毕达哥拉斯(Pythagoras，约公元前580—前500年)是古希腊的哲学家和数学家，生于希腊东部的萨摩岛，曾师从于泰勒斯，后游历过埃及、波斯、印度等地，学习天文学、几何学、语言学和宗教，逐渐形成了自己的思想体系，他所创立的学派被称为毕达哥拉斯学派。

该学派重视自然和社会中不变因素的研究，把几何、算术、天文学、音乐称为“四艺”，在其中追求宇宙的和谐及其规律。他们提倡用数学解释一切，认为“万物皆数”，并将数学从具体事物中抽象出来建立了自己的理论体系。这一学派还把逻辑学的思想方法与几何学结合起来，对几何问题进行了逻辑推理

和证明，促进了几何学的发展。毕达哥拉斯学派研究了三角形的内角和、5 种正多面体、黄金分割法、还发现了比例中项定理。除此之外，他们在数学上还有一个重要发现，这就是毕达哥拉斯定理，也就是勾股定理。

毕达哥拉斯学派有一种习惯，把一切发明都归于学派的领袖，而且秘而不宣，以致后人不知这些发明是何人在何时发明的。他们很重视数学，企图用数来解释一切，宣称数是宇宙万物的本源，他们研究数学的目的并不在于实用，而是为了探索自然的奥秘。他们认为，宇宙的本质是数的和谐。毕达哥拉斯学派有一个信条：宇宙间的一切现象都可以归结为整数或整数之比。

毕达哥拉斯学派把数（即现在所说的有理数）与几何量等同起来，他们认为所有的几何量：长度、面积、体积、长度比、面积比、体积比等均可用整数或整数比来表示。然而，毕达哥拉斯的一个弟子却发现，正方形的对角线与其一边之比不能用整数之比表达，这就是著名的希帕索斯悖论，又叫$\sqrt{2}$悖论，因为是希帕索斯首先发现这个悖论的，希帕索斯是毕达哥拉斯的弟子[2]。

实际上希帕索斯发现了$\sqrt{2}$不是一个有理数，希帕索斯是用归谬法证明这一问题的，与现在中学代数中的证明相类似，这里不妨作一简要的介绍。

假设$\sqrt{2}$是一个有理数，那么，它可以表示为

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q} \tag{1-1}$$

式中，p 和 q 都是整数且没有公约数。对式(1－1)两边平方，然后同乘以 q^2，得

$$2q^2=p^2 \tag{1-2}$$

上式左边是一个偶数，因此右边 p^2 也是一个偶数。由于奇数的平方仍然是一个奇数，于是得出 p 一定是一个偶数。令 $p=2p_1$，将它代入式(1－2)得

$$q^2=2p_1^2 \tag{1-3}$$

同理可得 q 也是偶数，即 p 和 q 有公约数 2，这与前面“p 和 q 都是整数且没有公约数”相矛盾，由此证明$\sqrt{2}$不是一个有理数。

希帕索斯发现$\sqrt{2}$是一个不可公度的量，用现代的眼光看，他发现了第一个无理数，这个发现应该是对数学的一大贡献。然而在当时，人们只接受整数和分数，如果用小数来表示，分数是有限小数或无限循环小数，例如，$\frac{1}{2}=0.5$，$\frac{2}{3}=0.6666\cdots$。而无理数则不同，无理数是无限不循环小数，因而无理数需要用无限多位的小数来表示。由于这个发现涉及无穷，而且还推翻了毕达哥拉斯学派的信条，动摇了建立在任意两条线段都可公度的信念基础上的许多数学成果。

面对$\sqrt{2}$这个不可公度量，古希腊人陷入了困惑，据说，希帕索斯得出这一结果时正在船上，毕达哥拉斯学派的人就因为这一发现，将希帕索斯投入海里，因为，他的发现否定了毕达哥拉斯学派的信条：宇宙间的一切现象都可以归结为整数或整数之比。还有一种说法是，毕达哥拉斯本人已经知道不可公度比的存在，但他要封锁这一消息，而希帕索斯因泄密而被处死。

总之，由希帕索斯的这一发现导致了西方数学史上一场大的风波，这就是人们所说的第一次数学危机。

1.2　第一次数学危机的解决

希腊数学大体可以分为两个时期，即古典时期和亚历山大时期。古典时期的学术中心几经迁移，最早是在小亚细亚的爱奥尼亚的米利都城，其后学术中心迁至意大利南部的埃利亚；以后则移至雅典，其著名的学派是柏拉图(Plato，公元前 427—前 347 年)学派，他在雅典建立一个学院，该学派因此也被称为学院派。亚里士多德是他的学生，欧几里得也受过这个学派的教育。把几何学系统化为一门演绎科学即一个逻辑推理体系，这个思想就来自这一学派。从这个意义上说，柏拉图学派是希腊各学派中对数学影响最大的。

第一次数学危机发生后，古希腊人意识到，直觉不是绝对可靠的，推理论证才是可靠的。于是，证明的思想在希腊人心中扎下了根，进而，古希腊人发展了逻辑理论，并产生了公理化的思想。

在发展这些科学思想的过程中，柏拉图起到了重要的作用。柏拉图于公元前 387 年在雅典成立学园，它在好多方面像现代的大学。在柏拉图的学园里，数学这门学科占有重要地位。柏拉图学派把数学当作进入哲学的阶梯，他们非常重视演绎证明。柏拉图学派研究了棱柱、棱锥、圆柱和圆锥；他们还知道正多面体最多只有 5 种。他们最重要的发现是圆锥曲线，此外，他们还对不可公度量进行了研究。

柏拉图认为，真、善、美、公正和智慧等，都存在于理念世界中，学习数学不仅是为了求真，同时也为了求善和求美。“美”是一个很难的问题，希腊数学对美学的贡献也是无与伦比的，不过这不是作者力所能及的领域，克莱因在《西方文化中的数学》一书中对此有很好的阐述。希腊的建筑构形简单、均匀，讲究比例和协调，如雅典祭祀雅典娜的庙，即巴台农庙是希腊庙宇的典范。几何学中的黄金分割在希腊人看来，是美的秘密所在[3]。

总之，柏拉图认为，上帝永远把一切都几何化，柏拉图的上帝是几何学家，他按几何学的原理设计了宇宙，因此，研究几何就是认识宇宙。同时，人们通过研究数学也不断地塑造自己，使自己成为更高尚、更丰富也更有力量的人。这就是柏拉图的思想，他的这一思想对后来的数学发展产生了深远的影响[4,5]。

古希腊数学家欧多克索斯（Eudoxus，公元前 403—前 355 年）曾加入过柏拉图学派，他在数学上的一大贡献是关于比例的新理论，他首先应用了穷竭法，这是确定曲边形面积和曲面体体积的有力方法，穷竭法也是近代微积分思想的渊源。

欧多克索斯建立的比例论，从形式上解决了希帕索斯悖论。欧多克索斯的基本思路是，把数和量这两个概念严格区分开，在数的领域只承认整数及其比值，用现在的话说就是只承认有理数；而在几何中，允许任意两个线段进行比较，不管它们是否可公度。经过这样的处理后，所有的几何量都可以比较大小，为处理无理量提供了逻辑依据，也消除了由希帕索斯悖论引起的第一次数学危机，从而也拯救了希腊数学。

欧多克索斯的著作现在已经失传，他的比例论被保留在欧几里得《几何原本》的第 5 卷中，其要点是：