高等学校经济与管理类系列教材

概率与统计

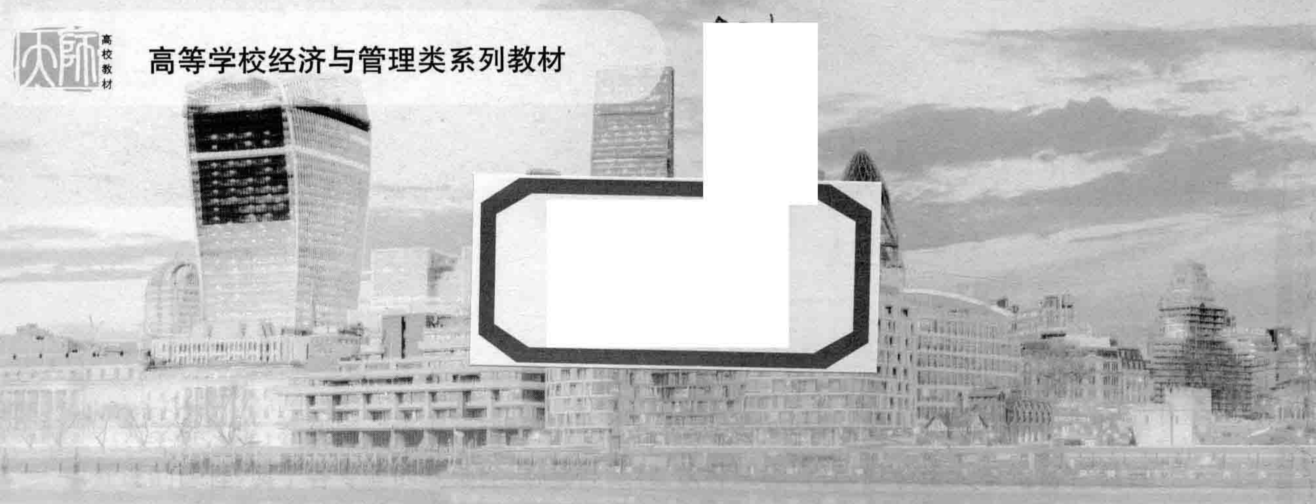
（第二版）

主　编◇李继根

副主编◇赵　岚　刘　翔

华东师范大学出版社

高等学校经济与管理类系列教材



概率与统计（第二版）

主　编◇李继根

副主编◇赵　岚　刘　翔

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率与统计/李继根主编. —2 版. —上海：华东师范大学出版社，2016
ISBN 978-7-5675-5875-5

Ⅰ.①概… Ⅱ.①李… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 275638 号

概率与统计(第二版)

主　　编　李继根
项目编辑　孙小帆
审读编辑　李　娜
封面设计　俞　越

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　常熟高专印刷有限公司
开　　本　787×1092　16 开
印　　张　19
字　　数　422 千字
版　　次　2016 年 11 月第 2 版
印　　次　2016 年 11 月第 1 次
书　　号　ISBN 978-7-5675-5875-5/O·273
定　　价　38.80 元

出 版 人　王　焰

(如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社客服中心调换或电话 021-62865537 联系)

前 言

大家都知道，在我国，“概率与统计”是一门由各大学的数学系或者基础部面向全校学生开设的课程，属于各专业的基础性、必修性课程. 这种课程设置，似乎让大家觉得它与自己的专业隔着万水千山，是遥不可及的“水中花，镜中月”.

要想取到随机性的“真经”，的确需要“踏平坎坷成大道”，历经“九九八十一难”，方能“驯服偶然”. 因为除了需要许多微积分知识之外，本课程更需要较强的思辨能力，以领悟一些“玄而又玄”的东西. 但如果非要说它与你的专业（尤其是经管类专业）“风马牛不相及”，那就有些井底之蛙的味道了.

概率论处理的是随机现象，而随机性的中心思想就是不可预测性. 人们通常认为概率论肇始自 350 余年前的“赌徒之问”，即 1651 年德 · 梅雷（de Mere）向帕斯卡（Pascal）提出的“赌金分配问题”. 后来，惠更斯（Huygens）也对此产生了极大的兴趣，并深刻地指出，这个问题“绝不仅仅是赌博问题而已，其中实际上包含了很有趣、很深刻的理论基础”.

事实上，赌金分配问题仅仅是概率论诞生的导火索，推动概率论形成的本质性因素是社会实践的需要，具体体现在两个方面：一是源于经济上人们对公平获利的思考；另一个则是人们对于公正的期望. 当时西欧的商业气氛日渐浓厚，特别是航海商业，是极其冒险的事业（例如莎士比亚（Shakespeare）的《威尼斯商人》中，就涉及这方面的描写），形同赌博，这导致高利贷、买空卖空等投机性活动日趋频繁，也催生了保险业的快速发展，进而产生了对“风险计算工具”的期望. 在法律与宗教界，自然也就产生了“松绑”的讨论，即是否应将商业中的冒险从宗教禁律中免除，从而允许人们在契约允许的条件下公平地追求合理的利润. 当然，作为交换，“赌博的参与者”即契约的合伙人也必须心甘情愿地交换他们的“期望”. 因此，问题的焦点就集中在保证期望公平上：只有该契约的合伙人对预期收益即“风险的代价”拥有平等的期望，这份契约才是公平的.

至于统计活动，最著名的则是公元 1085 年，征服者威廉（William the Conqueror）下令作出“对英格兰的描述”. 于是，田地的所有者、面积、牛羊的只数等信息被收集后编辑成《末日审判书》. 在德国，康令（H. Conring）从 1660 年起，以“国势学”为题，在大学讲授政治活动家应具备的知识，开创了国势学派. “国势学”主要研究“国或多数国家的显著事项”，以文字叙述为主，主要用对比分析的方法（后来又加入了图表）研究国家的组织、领土、人口、资源财富和国情国力，并比较各国实力的强弱. 再后来，阿肯瓦尔（G. Achenwall）在哥廷根大学开设“国家学”课程；并著有《近代欧洲各国国势学纲要》（1749 年），书中给国势学起了一个新名称“STATISTIK”，成为“Statistics”（统计学）的来源.

与此同时，在英国，格朗特（J. Graunt）开创了以“社会数字”引导政策研究的先河. 他在小册子《根据死亡公报做出的自然和政治观察》（1662 年）中，采用了不少新颖独特的数字资料整理、表示和估算方法. 配第（W. Petty）则写成《政治算术》（完成于 1676 年）一书，

明确宣称要“采用数字、重量、尺度等语言表达自己的想法”，开创了政治算术学派.

“政治算术”与“国势学”之间虽然存在互相借鉴的情形，但最终却爆发了长达百余年的争论. 通过争论，人们明确意识到，此时的统计学必须要引入新的数学工具，才能获得真正的突破. 这个工具，就是概率论.

政治算术的工作也吸引了一些数学家. 雅各布·伯努利(Jacob Bernoulli)积极思考如何在不确定情形中应用“机会的理论”进行推理. 在他撰写的《猜度术》(1713 年，未完稿)的第四卷中，给出了著名的“伯努利大数定理”. 特别指出的是，第四卷的题目是“前面的研究对于民事、道德和经济问题的应用”，遗憾的是他没来得及讨论这些应用就撒手人寰了.

随着笛卡尔(Descartes)的理性精神的传播，以及微积分的产生和发展，理性成为时代的旋律. 法国的伏尔泰(Voltaire)等理性主义者坚信人的推理可以作为知识来源的理论基础. 而关于宗教和哲学的不断纷争也使得许多人转而接受以洛克(J. Locke)为代表的经验主义的观点，即人们在日常生活中的实际判断不是基于确定的知识，而是基于从经验中得来的概率性知识. 出于护教的目的，化学家波义耳(R. Boyle)等皇家学会成员开始折衷这两种观点，由是确定了“实用的理性”的信念：我们必须相信所有充分可能的事物，不管它是万有引力定律还是上帝的存在. 由此波义耳等人认为，人们在生活中最理性的做法就是将自己的期望最大化，无论是商业还是宗教. 为了拯救生命，可以锯掉坏疽腿；为了巨大的收益前景，可以投资一个高风险的商业冒险. 这使得期望在理性推理中的作用被广泛认可，成了“合乎理性的判断的测量”.

以理性精神为指导，人们也希望在道德科学(当时的社会科学)中，研究“理性人”(在处理事务和各种行为中以富有经验和智慧而闻名的人)的个体举止和行为，以得到一些明确的规则，用以引导芸芸大众. 可是 1738 年彼得堡悖论中数学计算与实际常识的抵牾，使得人们开始怀疑概率论中的期望，进而导致人们失去了数学有效性的判别标准. 丹尼尔·伯努利(Daniel Bernoulli)由是区分了两种期望：一种就是“数学期望”，仍对应“事件的值与事件的发生概率的乘积”；另一种则是“道德期望”，即经济学中的“效用”. 后来拉普拉斯更进一步从数学分析的角度，将数学期望看成道德期望的极限.

自 1799 至 1815 年，在雄心勃勃的拿破仑(Napoleon Bonaparte)的统治下，法国科学史出现了最辉煌的年代. 在学生拿破仑的支持下，拉普拉斯(Laplace)也创造了自己的辉煌，最终成为“法国的牛顿(Newton)”. 在概率论上，他贡献了集大成之作《分析概率论》(1812 年)，标志着概率论从“组合概率”向“分析概率”的彻底转变. 在书中，他以“等可能性”为基础，建立了古典概率的定义(事件的概率等于有利情况的数目除以所有可能情况的数目)，进而演绎出了概率的基础理论. 书中以极大的篇幅讨论了概率论的各种应用，涉及自然科学、天文学、大地测量学、人口统计、保险、决策论、道德期望、证言可信度和判决的概率等. 当然，最重要的是书中彻底证明了棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理，即二项分布收敛于正态分布，从而创立了连续型概率论，开创了概率论的新时代.

19 世纪后半叶至 20 世纪初，人类世界发生了翻天覆地的变化：非欧几何的横空出世，使得数学丧失了确定性，之后建基于集合论的宏伟大厦又遭到了“集合论悖论”的灭顶

之灾，数学从此被赶出"伊甸园"；几百年来一直被奉为圭臬的牛顿体系，被爱因斯坦(Einstein)的相对论所颠覆；人们一直坚信不移的人的"理性假设"，也被弗洛伊德(Freud)的"人类的本质是非理性的"所摧毁；至于人类的信仰，波德莱尔(Baudelaire)笔下的"巴黎"这朵"恶之花"终于让尼采(Nietzsche)大声喊出"上帝死了"；后来，艾略特(T. S. Eliot)更是以长诗《荒原》(1922 年)彻底传递出了"西方一代人精神上的幻灭"……在这样的背景下，人们越来越关注风险和不确定性. 在经济学领域，奠基于无风险假设和"理性人"假设的古典经济学已经无法解释当时的经济现象，于是应运而生了关于风险的卓越思想.

首先是奈特(Frank Knight)的开拓性成果. 在 1921 年出版的《风险、不确定性和利润》一书中，他用"风险"表示可度量的不确定性，而用"不确定性"表示不可度量的风险. 具体地说，风险的特征是概率估计的可靠性，以及因此将它作为一种可保险的成本进行处理的可能性. 估计的可靠性来自所遵循的理论规律或稳定的经验规律，对经济理论的目的来说，整个概率问题的关键点是，只要概率能够用这两种方法中的任一种以数字表示，不确定性就可以被排除. 与可计算或可预见的风险不同，不确定性是指人们缺乏对事件的基本知识，对事件可能的结果知之甚少，因此，不能通过现有理论或经验进行预见和定量分析. 他进而指出，利润理论之所以得以成立，正是因为真正的"不确定性"，而不是"风险". 奈特区分风险与不确定性的哲学意义在于：风险是一种人们可知其概率分布的不确定，但是人们可以根据过去推测未来的可能性；而不确定性则意味着人类的无知，因为不确定性表示着人们根本无法预知没有发生过的将来事件，它是全新的、唯一的、过去从来没有出现过的. 遗憾的是，奈特的成果没有成为当时的主流理论，后来更被凯恩斯(John Maynard Keynes)的光辉所遮蔽，因为在凯恩斯眼里，奈特的研究仅仅只配得上一个脚注而已.

近年来，越来越多的学者开始认识到：凯恩斯 1921 年出版的《概率论》或许才是最能代表他思想原创性的著作，而闻名遐迩的《就业、利息与货币通论》(1936 年出版，以下简称《通论》)仅仅是《概率论》的应用而已.

《概率论》一书是凯恩斯在他 1909 年的博士论文的基础上修改而成，最终完稿于 1913 年. 在书中，凯恩斯反对将概率与频率等同起来，因为频率是事后发生结果的统计总结，因此频率理论采用的是归纳法. 基于剑桥的逻辑归纳传统，他用术语"命题"(proposition)取代了常用术语"事件"，因为他认为，应当将概率作为逻辑和演绎推理来理解，它与信念度(他称之为"论据的权重")有关，而与事后结果无关，而"命题"能够反映人们对未来事件发生概率的信心程度. 他提出，只有在特定的情况下，才能够用精确的数值("点估计")来表示概率，而在更多的情况下只能得出概率在一定范围内的"区间估计". 他从代数关系的角度创建了"a/h"的概念，其中 a 表示命题自身，h 代表可得到的与命题相关的信息. 以这个方式，他首次用数学语言描述了某种结果的可能性和对结果有影响的未知信息(也许是不可知的)之间的复杂关系.

《概率论》中的最基本命题是"概率是不可定义的"，与之等价的命题就是"许多概率是不可计算的". 因为在凯恩斯眼中，概率的主观性和客观性不可分离，概率是一种我们"认

识到"的"真正的客观"关系. 他指出，从我们的认识和推理能力来说，概率是主观的，然而概率关系又是"独一无二和客观的"，因而大家都会领悟到同样的概率关系. 概率是一种信念，所有事后结果所提供的证据不会改变概率本身，只会改变我们判断这个概率时所具有的信心程度. 对概率的讨论涉及一个本质问题：人们生活在一个不确定的世界，是否能真正成为自己的主宰. 为了解决这个问题，凯恩斯提出"理性主义"的方法，概率的不可定义并不意味着概率的不可知，理性能对概率有所推断. 事实上，由于人们总是在不具备充分的客观基础的情况下来全面地评价行为后果，因此他的解决方法的核心就是在知识状态给定的情况下有足够理由相信某一事件发生的信心程度.

我们面对的到底是一个确定性世界，还是一个不确定性的世界？从凯恩斯对概率的理解来看，他认为世界本质上是个可感知但却又充满不确定性的世界，或者说世界在某个短暂的时期可以看作是确定的，但从长期来看是不确定的，我们要做的就是在一个不确定的世界中把握住我们所能把握的. 这种世界观反映在经济学上，就是他批判自由放任主义，并提出政府干预理论，并不是要将政府的职能极度扩大，而是希望政府通过提供信息和服务，帮助人们做出更好的理性选择. 而他之所以将自己的著作称为通论（即一般理论），就是因为确定性世界可以看作不确定性世界的一个特殊表现形式，因此古典经济学所针对的不过是现实世界中的特例.

经济问题与统计学本就密切相关，因为经济学通常都与经济数据密切相关，而统计学就是研究数据的学科.《通论》出版之后，尽管凯恩斯不断警告人们不要把他的理论形式化，但在数学的规范化和统计学的定量化的渗透和影响下，人们已经能够对经济假设进行定量分析和统计检验，经济学已经迈上了"经济科学数量化"的康庄大道，诞生了计量经济学和金融经济学等发展方向. 事实上，所谓计量经济学就是"从实际数据出发，应用统计学方法建立经济学模型，研究经济现象，阐明经济学原理". 随着计算机的飞速发展和诺贝尔经济学奖的设立，这种趋势被日益凸显出来. 众所周知，1969 年的首届诺贝尔经济学奖就颁给了计量经济学的创始人弗里希（Ragnar Frisch）和奠基人丁伯根（J. Tinbergen）. 前者在 1935 年，通过一个带随机项的差分——微分混合方程组，首创了描述经济周期的数学模型；后者则在 1936 年为荷兰建立了含有 24 个联立方程的国民经济计量经济学模型，并用以研究经济周期的波动等问题. 这为 1980 年的经济学奖获奖者、计量经济学之父克莱因（L. R. Klein）等人的工作奠定了基础. 在成名作《凯恩斯革命》（1950 年）中，克莱因第一次完整地把凯恩斯的经济理论表述为数学形式，从而创立了宏观计量经济学，并提出了适用于大规模计量经济模型的全新的统计方法和计算方法.

《通论》问世 15 年后，冯·诺依曼（John Von Neumann）和摩根斯顿（Oskar Morgenstern）的《博弈论与经济行为》（1953 年）正式出版. 博弈论的出现为风险和不确定性带来了新的含义，它使人们认识到，不确定性的真正起源来自于他人的意图，我们认为会带来最大收益的选择往往也是风险最大的决策，因为这种决策有可能引发输家的强烈抵抗.

在金融经济学即研究市场经济中最重要的交易（证券交易）的经济学之中，概率论也

给投资风险的量化带来了“革命”. 1952 年，时年 25 岁的马科维茨(Harry Markowitz)在《证券组合的选择》一文中，“发展了一个在不确定条件下选择资产组合的严格化、操作性强的理论”，首次提出了证券组合的最优选择理论和均值——方差分析方法，并论证了投资的多样化(通俗地说就是“不要把鸡蛋放在一个篮子里”)是对付投资方差(即风险)的最佳武器，从而将风险提升到了和预期收益相同的高度. 后来他的学生夏普(William F. Sharpe)提出和研究了“资本资产定价模型(CAPM)”，完善了马科维茨的资产选择理论. 他们的理论被誉为“华尔街第一次革命”，他们也因此获得了 1990 年的经济学奖. “华尔街第二次革命”则来自金融衍生证券的期权定价理论，是由 1997 年的经济学奖获得者斯科尔斯(Myron S. Scholes)和布莱克(Fischer Black)在《期权定价和公司债务》(1973 年)一文中提出的. 在该文中，他们开创了关于风险管理的客观的、定量的分析方法，并导出了著名的布莱克-斯科尔斯公式. 他们的工作，也大大促进了许多数学学科在金融经济学中的应用和发展.

在《驯服偶然》一书中，著名的概率史专家哈金(I. Hacking)为我们展示了导致西方社会发生巨大变化的概率性革命，并将几千年来决定论思想何以在 19 世纪末被侵蚀，归结为当时雪崩般出现的统计数字. 无独有偶，黄仁宇在《资本主义与二十一世纪》里侧重分析了资本主义的技术性格，将资本主义综合为一种组织和运动，并提出，每一个国家要奋斗成资本主义，必须要“使整个国家能在数目字上管理”. 而“中国社会不能在数目字上管理，由来已久，其以道德代替法律”，更是“阻塞低层社会里各种经济因素公平而自由的交换”，因此“中国不能产生资本主义”，因为“一只走兽，除非脱胎换骨，否则不能兼任飞禽”. 在《给讨厌数学的人:数学的奥秘 & 生活》中，日本的思想大师小室直树也指出:“数学逻辑、形式逻辑学的付之阙如，导致资本主义和近代民主主义骨干的失落.”而如今，随着互联网的蓬勃发展，面对传感器、搜索引擎和“云计算”等带来的海量数据，如何应对“大数据时代”的汹涌波涛，从而抓住大数据的机遇，更是被越来越多的公司乃至国家提升到战略的层面.

当然，我们也要对数学在经济学中的作用保持清醒的头脑. 在《通论》发表的当年，凯恩斯的学生希克斯(J. R. Hicks)就用一套联立方程式表述了凯恩斯的理论，并于次年发表了著名的 IS - LM 曲线图. 可是审稿时凯恩斯却对收到的论文沉默了半年之久，因为他从不认为风险可以被精确地计算，在他眼里，任何数学模型都无法容纳不确定性. 事实上，数学模型的使用就隐含着我们已承认自己已经生活在一个确定性的世界之中，因此有人认为将《通论》简化成“曲线图和代数碎片”是一大悲剧. 2008 年爆发的金融危机表明，我们不能仅仅将风险简单地看成数字，更不能机械地运用概率法则和不确定性的量化.

根据本书的使用对象和我们对概率统计与经济学之间关系的上述理解，我们在编写过程中，突出了以下特点:

首先是关于离散/连续随机变量与一维/多维的内容安排. 我们之所以将离散型随机变量与连续型随机变量分开处理，是因为我们觉得，从一维到二维的推广，比起从离散到

连续的跨越，要容易和自然得多，应当更符合学习者的心理. 同时，连续型随机变量这个难点的后移，也能推迟乃至减少学习者对概率统计的“吐槽”. 当然，这种安排也使得第三章的篇幅较大.

其次是穿插了大量概率统计的历史知识. 根据我们的教学实践，在教学中融入数学史，不仅极大地提高了学生的学习兴趣，更能通过历史和哲学的分析，加深乃至提高学生对相关知识的理解和掌握. 为此，我们在书中加入了重要的思想和人物的介绍，以及一些富有趣味性和思辨性的问题，比如从惠更斯到拉普拉斯、从《末日审判书》到凯特勒、二项分布的正态近似、奈曼与皮尔逊的故事、三门问题、圣彼得堡悖论、帕累托分布、正态魅影，等等.

再者就是注重启发式教学，力争将“冰冷的美丽”转变成“火热的思考”. 以定义开头，继之以定理和公式，再辅以应用，这似乎成了数学类教材的典型模式. 这种形式化的编书方式，经常让学生觉得数学概念就像孙悟空一样，是从石头缝里蹦出来的. 对这种“空降部队”，学生从心理上难以接受，也使得从问题出发抽象出数学知识再回到问题这种丰富多彩的数学思维活动被“掐了两头，只剩中间”，变成了纯粹的逻辑推理，从定理到定理，从结论到结论. 作为面向非数学类学生的教材，如果也采取这种模式，对学生而言，无异于梦魇.

事实上，作为启发式教学的重要辅助工具，教材必须充分反映学生的思维过程，要通过一系列启发性的问题和各种各样的尝试和想法，让学生在观察、比较和推理中形成结论. 我们在本书中，充分注意学生已有的基础和经验，注重采用多种方式自然地引入数学基本概念和基本方法.

最后就是 Matlab 软件的引入和加“*”处理的编写安排. 概率统计课程中必须引入计算机软件，目前已是业界共识，关键是引入什么软件. 考虑到简单实用和学生长远发展的需要，我们采用了功能强大的 Matlab 软件来进行辅助计算. 有条件的情况下，教师可在教学中进行课堂演示，也可以安排学生自学. 另外考虑到教学要求、课时安排以及不同层次学生的学习要求，我们对部分内容(其中包括概率统计的历史知识)、部分定理的证明，以及部分例题和习题做了加“*”处理. 教学中教师可酌情处理.

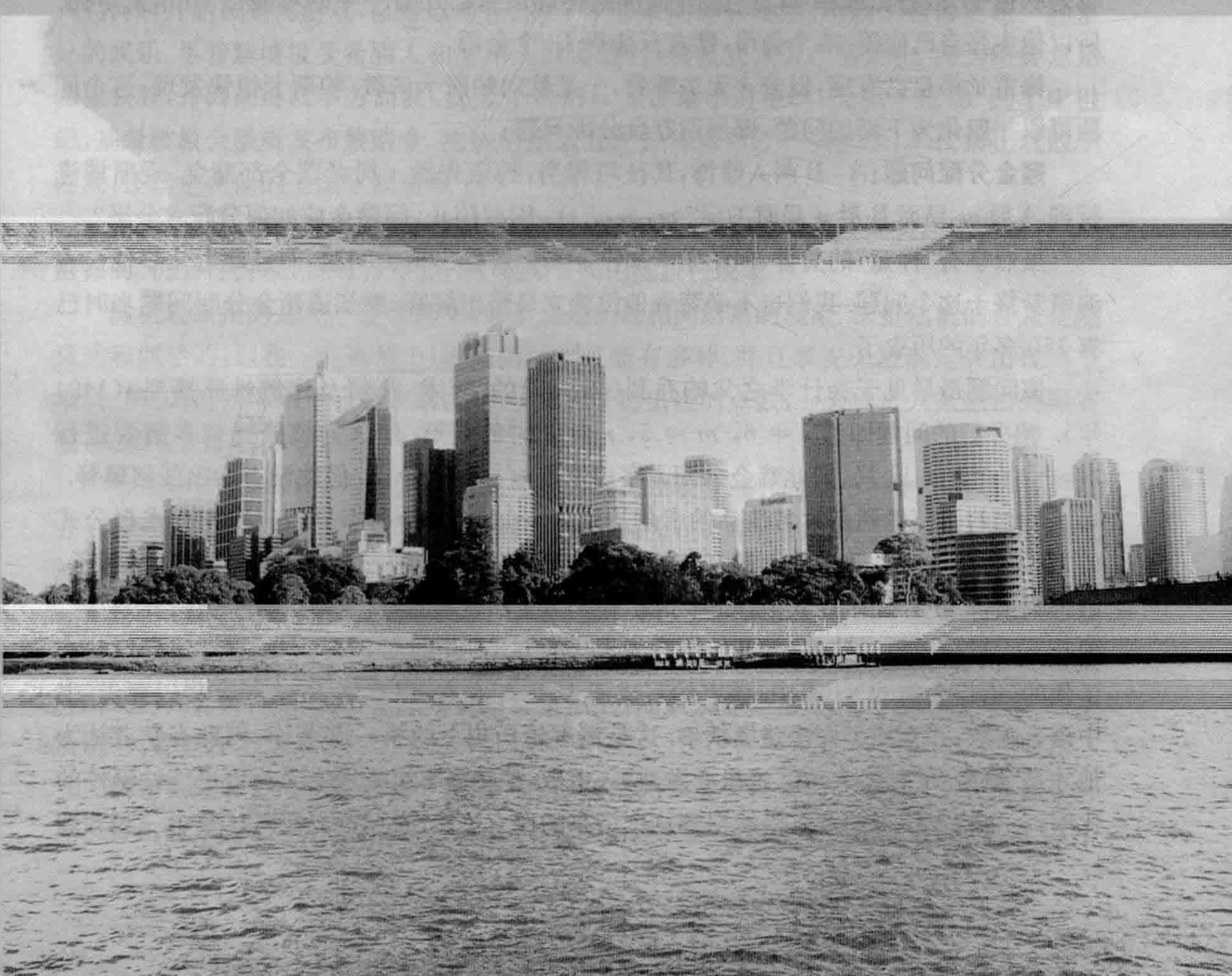
本书由李继根主编，副主编是赵岚、刘翔，黄小杰参与了编写。非常感谢教育部宝钢优秀教师奖获得者、上海大学商学院教授倪中新博士在出国进修前夕的宝贵时间里，审阅了大部分书稿，并提出了许多宝贵的意见和建议. 还要感谢华东理工大学数学系系主任、博士生导师李建奎教授对本教材的编写所给与的关心和支持. 书中不当乃至谬误之处，敬请各位方家高手来函批评指正.

编者

2013 年 8 月

目录

第 1 章 随机事件与概率



1.1 随机事件及其运算

1.1.1 赌徒之问*

公元 1651 年，数学家帕斯卡(Pascal)在外出旅游途中，偶遇嗜赌如命的贵族子弟德·梅雷(de Mere). 梅雷靠用纸牌和骰(读 tóu)子打赌谋生于贵族圈内，是数学史上有名的职业赌徒(他还不是最有名的). 虽然梅雷对许多问题半知半解，但他的聪明以及生活经历足够他提出一些有趣的问题.

梅雷问题：一次梅雷和赌友掷骰子，各押赌注 24 个金币，以先赢 4 局定胜负，即梅雷若先掷出四次“6 点”，或赌友先掷出四次“4 点”，就算赢了对方，赌局结束. 赌了一段时间后，梅雷已掷出了两次“6 点”，赌友也掷出了一次“4 点”. 这时，梅雷奉命要立即去晋见国王，赌博被迫中断. 那么这 48 个金币的赌金两人应该怎么分配呢?

最不济的方法类似于数据库更新操作的事务回滚，即两人各自拿回自己的赌注，就当这次赌博没有发生一样. 这样做，梅雷当然不答应，赌友也不好意思占这个便宜. 赌友提议说，梅雷掷出的“6 点”数是自己掷出的“4 点”数的两倍. 这样，自己所得应该是梅雷的一半，即得 16 个金币，而梅雷得 32 个金币. 梅雷争辩说，即使下一次赌友掷出“4 点”，两人也是秋色平分，各自收回 24 个金币，何况这样的话自己还有一半的可能得 48 个金币呢? 所以他主张自己应得 36 个金币，赌友只能得 12 个金币.

梅雷觉得自己有理，但苦于无法解释，于是就向帕斯卡请教. 帕斯卡很快发现，这个问题可以一般化为下面的问题，即所谓**赌金分配问题**：

赌金分配问题：A, B 两人赌博，其技巧相当，约定先胜 s 局者获全部赌金. 现赌博进行到 A 胜 m 局而 B 胜 n 局时 ($0 \leqslant m, n < s$)，因故停止，问赌金应如何分配才公平?

虽然享有“神童”的美誉，但帕斯卡却没能马上解答出梅雷问题，而且此后几年他一直魂牵梦绕于这个问题. 我们也不必苛责他没能立马给出解答，要知道赌金分配问题当时已有 150 多年的历史了.

该问题最早见于会计学之父帕乔利(Pacioli)的《算术、几何及比例性质摘要》(1494 年). 帕乔利的问题即为 $s = 6$, $m = 5$, $n = 2$ 时的情形. 他认为该赌博最多需要进行 $2(s-1)+1 = 11$ 局，因此赌金分配方案应该是 $m : n = 5 : 2$. 但他没有给出任何解释.

后续的研究者则是大名鼎鼎的卡尔达诺(Cardano，又译为卡丹)，三次方程求根公式的“发现者”. 他才是数学史上最有名的赌徒，因为他自称“每天无时无刻不在赌”，从骰子、纸牌到象棋，他都能乐在其中. 即便如此，他仍大量输钱，还经常输掉“衣服、戒指和领结”. 他花了大量精力思考赌博，并开始用较为现代的方式研究这种机会游戏. 这些思考反映在了他的《论机会游戏》一书中. 该书约写成于 1526 年左右，但直到 1663 年才得以面世. 书中语言幽默，并穿插了许多赌场轶事. 这是概率论历史上的第一部著作，因此有学者认为他才是“概帮”的创始人. 在《论机会游戏》一书中，他将概率粗略地定义为等可能性事件的比率：一个特定结果的概率是能得到这个结果的所有可能途径数之和除以“整个一圈”，即

事件的所有可能结果数(骰子的“整个一圈”是6).遗憾的是,由于当时表示概率论所必需的代数符号尚处幼年,只能用“我掷出1或3或5的可能性等于掷出2或4或6的可能性”这样的语言文字来进行描述.

1539年,卡尔达诺通过实例指出帕乔利的分配方案是错误的.他认为,在帕乔利的问题里,A只要再赢一局,便可以结束赌局.如果比赛不中断的话,对A来说,再赌下去只有五种可能:第一局胜,第二局胜,第三局胜,第四局胜或者所有四局都输掉.其中对A有利的情形是前四种,因此总赌金应按照$(1+2+3+4):1=10:1$的比例来分配.卡尔达诺虽然指出了正确的方向,即需要分析的不是已经赌过的次数,而是剩下的次数,但遗憾的是,他的结果是错的.

赌金分配问题最终是由帕斯卡和费马(Fermat)共同解决的.两位高手在1654年7～10月就这个问题展开了一系列通信,其中运用了组合理论,使用了加法定理、乘法定理和全概率公式,还引进了“值”(赌注乘以获胜概率)的概念,由此而初创“概帮”(“概帮”的说法源自华科杨志鸿老师).

1.1.2　随机现象与随机事件

在人类社会的早期阶段,囿于当时的认知水平,人们只能将偶然性看成是神的意志的体现,从而通过抛距骨、掷骰子、抽签等占卜仪式,让被求的神有表达其意愿的机会.至于人们何时开始玩赌博游戏,已难以考证.到了罗马帝国建立初期,用骰子赌博更是一种常见的娱乐.尽管赌博极受希腊人和罗马人的宠爱,但却被犹太人严格禁止.因为赌徒总是希望获胜,并因此得以不劳而获,犹太学者们认为这是不道德的,类似于抢劫.到了中世纪,基督教教会屡屡发布禁赌令.法国的路易九世甚至颁布过一项法令,不仅禁止玩骰子游戏,还禁止在他的王国里制造骰子.

随着帕斯卡和费马对“赌金分配问题”的彻底解决,人们才开始逐渐关注赌博这种“不道德的”机会性游戏,并把目光投向了更加宏大的随机性现象.

随机现象指的是在一定条件下,并不总是出现相同结果的现象.这里随机的含义是随意的和偶然的,即在一定条件下,事情的结果可能有多种,并且事先无法确定会出现哪个结果.例如,抛硬币落下后朝上的一面,投掷骰子后出现的点数,一天内进入某超市的顾客数,人的死亡年龄和方式.

与之相对照,只有一个结果的现象则称为**确定性现象**.例如,硬币一定会落下,日升东方,人一定会死的(我们之所以屡屡提到死亡,是因为在概率论的历史上,人口问题与国家的财富和经济上的保险关系非常密切).

对于随机现象,如果只观测或实验一次,其结果的确是不可预测和不确定的.但是,人们经过长期实践和深入研究后发现,如果对随机现象进行大量重复实验或观测,各种结果的出现都具有某种规律性.正如马克思所指出的,随机现象是必然性与偶然性的统一,正所谓“大数恒静”.

例如无理数π的小数部分中各数字看似杂乱无章地依次出现,但法国学者统计了计算机算出的π的前100万小数,发现10个数字出现的频率与0.1十分接近,这说明10个

数字应该是均匀地分布在小数部分中的.受此启发,人们进一步发现 e 等无理数也具有这个规律.

概率统计研究的对象就是随机现象.具体地说,概率论就是研究随机现象的统计规律性,用数学语言来描述它们,并尽量给出它们的数学模型;统计则是研究随机现象的数据收集、处理、分析、解释并从中得出结论.其中统计的数据分析阶段需要选择适当的统计方法,而它们都是以概率论为理论支撑的,因此概率论与统计两者密不可分.

为了叙述方便,我们把对在相同条件下可以重复的随机现象的观测或实验统称为**随机试验**,用 E 表示.注意它满足两个条件:

(1) 重复性:在相同的条件下可以重复进行;

(2) 随机性:试验可能会出现哪些结果事先是确定的,但每次试验具体会出现哪一个结果在试验前无法知晓.

与随机试验相比,物理实验和化学实验只能说都是确定性试验.

随机试验的一切可能的结果组成的集合,称为**样本空间**,记为 $\Omega=\{w\}$,其中 w 表示可能出现的不可分解的结果,称为**基本事件或样本点**.

特别要注意的是,我们不考虑基本事件的性质,"不管它是点、线、面,还是桌子、椅子、啤酒瓶".

例 1.1.1 E_1 表示掷一枚骰子,观察出现的点数.显然 $\Omega=\{w_1, w_2, \cdots, w_6\}$,这里 w_i 表示出现点数 i, $i=1, 2, \cdots, 6$.

例 1.1.2 E_2 表示抛两枚硬币,观察正反面出现的情况.显然 $\Omega=\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$,这里 w_1 表示两枚都是正面;w_2 表示第一枚是正面,第二枚则是反面;w_3 表示第一枚是反面,第二枚则是正面;w_4 则表示两枚都是反面.

例 1.1.3 还是考察 E_2,但观察正面出现的次数.可用 w_2 表示两枚都是正面;w_1 表示只有一枚是正面;w_0 表示两枚都是反面.因此 $\Omega=\{w_0, w_1, w_2\}$.注意这里三个基本事件出现的可能性不是完全相等的.

例 1.1.4 E_3 表示掷两枚骰子,观察出现的点数和.显然 $\Omega=\{w_2, w_3, \cdots, w_{12}\}$,这里 w_i 表示出现的点数和为 $i(i=2, 3, \cdots, 12)$.注意这里的基本事件同样不是等可能性的.

例 1.1.5 还是考察 E_3,观察两枚骰子的点数情况.显然第一枚的点数与第二枚无关,因此 Ω 中有 36 个基本事件,即

$$\Omega=\{(i, j) \mid i, j=1, 2, \cdots, 6\},$$

这里 $w=(i, j)$ 表示第一枚的点数为 i 且第二枚的点数为 j.注意$(6, 3)$和$(3, 6)$的含义不一样.

例 1.1.6 E_4 表示相同条件下接连不断地向同一个目标射击,直到击中目标为止.观察射击次数.若 w_i 表示射击 i 次 $(i=1, 2, \cdots)$,则 $\Omega=\{w_1, w_2, \cdots\}$.

例 1.1.7 E_5 表示某公共汽车站每 10 分钟开来一辆公共汽车,观察乘客的候车时间 w.显然 $w\in[0, 10)$,因此 $\Omega=\{w \mid w\in[0, 10)\}$.

从上面几个例子中我们可以看出以下几点:

首先，随机试验大体上可以分为三类：**有限个**可能结果（如 E_1，E_2，E_3）；**无限可列个**可能结果（如 E_4）；**不可列个**可能结果（如 E_5）. 关于可列集下一章会详细解释.

其次，对同一个随机现象，因为试验的目的不同，所得到的样本空间和基本事件也有较大的差别，例如 E_2，E_3.

第三，如何确定基本事件，除了与试验目的有关外，一般还需要凭经验和直觉.

最后，表述样本空间时要注意领会集合语言的实质，而不要仅仅关注形式. 例如，例 1.1.1 中的样本空间 Ω 也可以表示为 $\Omega=\{1, 2, \cdots, 6\}$；例 1.1.2 中的 Ω 则可以表示为 $\Omega=\{HH, HT, TH, TT\}$，其中 H 即 head，表示有头像的一面，T 即 tail，表示无头像的一面. 更简略些，则是 $\Omega=\{11, 10, 01, 00\}$.

借助样本空间和基本事件，更确切地说，借助于集合论的语言，极大地简化了我们的语言叙述和思维过程，尤其是不考虑集合元素本身的性质，与不考虑基本事件的性质相吻合. 这样，借助集合论的语言，我们就为“出身肮脏”的概率论找到坚实的理论依托.

有了样本空间的概念，随机事件就很容易理解了. 所谓**随机事件**（简称**事件**），就是样本空间的一个子集，常用大写字母 A，B，C，…表示. 因此，某个**事件 A 发生或出现**当且仅当相应子集中某个基本事件 w 出现，记为 $w\in A$. 特别地，Ω 自身称为**必然事件**，空集 $\varnothing$ 则称为**不可能事件**.

例 1.1.8　样本空间 Ω 与例 1.1.5 中的相同. 设事件 $A=\{$点数之和为 9$\}$，$B=\{$点数之和为整数$\}$，$C=\{$点数之和为负数$\}$. 显然 B 是必然事件，而 C 则是不可能事件. 前者是因为每次试验必定会出现一个基本事件，而每个基本事件都符合要求，因此 $B=\Omega$；后者则是没有一个基本事件符合要求，因此 $C=\varnothing$. 至于事件 A，则有 $A=\{(6, 3), (5, 4), (4, 5), (3, 6)\}$.

例 1.1.9　样本空间 Ω 与例 1.1.1 中的相同. 设事件 $A=\{$点数为偶数$\}$，$B=\{$点数不少于 5$\}$. 显然 $A=\{w_2, w_4, w_6\}$ 或 $A=\{2, 4, 6\}$，$B=\{5, 6\}$. 注意这两个事件都包含基本事件 w_6.

例 1.1.10（伽利略的发现）　众所周知，意大利科学家伽利略（Galileo）的天文观测强有力地证明了地球不是宇宙的中心. 时人争相传颂：“哥伦布（Columbus）发现了新大陆，伽利略发现了新宇宙”. 他的影响是如此巨大，以致在古稀之年还被罗马教廷请去“喝咖啡”，因为教廷裁决他必须明确宣布“地球是宇宙的中心”.

伽利略撰写了概率史上的第二篇论文《对掷骰子游戏的思考》（写于 1613 年至 1623 年之间）. 在文中，他解决了这样的问题：投掷三枚骰子时，在出现的点数和中，为什么数字 10 比数字 9 要出现得多？

他似乎是当时唯一以数学方式研究随机性的人，而他的解法则简单而直接，因为在处理这一问题时他使用了最先进的数学工具即“计数”. 他列出了点数和为 3～10 的各种情形，发现点数和为 9 的 6 种情形为(1, 2, 6)，(1, 3, 5)，(1, 4, 4)，(2, 2, 5)，(2, 3, 4)和(3, 3, 3)，其排列数为 $6+6+3+3+6+1=25$ 种. 而点数和为 10 的 6 种情形为(1, 3, 6)，(1, 4, 5)，(2, 2, 6)，(2, 3, 5)，(2, 4, 4)，和(3, 3, 4)，其排列数为 $6+6+3+6+3+3=27$ 种.

考虑到投掷三枚骰子总共有 216 种可能的结果，因此这两种点数和之间的差异如此

之小，必定要经过大量观察才能发现. 虽然伽利略在文章开篇即言是有人“命令”他研究骰子(他没说是谁)，但如此发现，还是令人非常惊奇. 我们不禁要问，这个问题到底是何人所提?

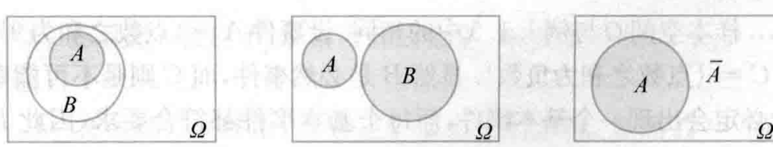
1.1.3 随机事件的关系与运算

运用集合论这个强大武器，对于事件这个概率论的主要讨论对象，就可以定义事件间的关系和运算. 虽然它们在符号上与集合论没什么差别，但要充分注意它们在概率论中的含义.

1. 事件的关系

包含关系与相等关系：如果事件 A 的每一个基本事件都属于事件 B，则称事件 A 包含于事件 B，或称事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 此时，如图 1.1(a)所示，在一次试验中，若事件 A 发生必导致事件 B 也发生，也就是说，若事件 B 不发生必然导致事件 A 也不发生.

特别地，如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等或等价，记为 $A=B$. 此时，在一次试验中，事件 A 与事件 B 要么同时发生，要么同时不发生.



(a) $A\subset B$　　(b) A、B 互斥　　(c) A 的对立事件$\overline{A}$

图 1.1 事件的关系

互斥关系与对立关系：如果事件 A 与事件 B 不可能同时发生，则称事件 A 与事件 B **互斥**或**互不相容**. 此时，如图 1.1(b)所示，在一次试验中，若事件 A 发生必导致事件 B 不发生，同时，若事件 B 发生必然导致事件 A 不发生.

特别地，如果事件 A 与 B 互斥，且样本空间中的任一基本事件要么属于 A 要么属于 B，则称事件 A、B 具有**对立**关系或**互逆**关系，记为 $B=\overline{A}$. 称$\overline{A}$为 A 的逆. 注意，此时也成立$\overline{B}=A$. 如图 1.1(c)所示. 两者仿佛“白天与黑夜”，永远没有共同的基本事件.

2. 事件的运算

事件的交：既属于事件 A 也属于事件 B 的所有基本事件的集合，我们称之为事件 A 与事件 B 的交或积，记为 $A\cap B$ 或 AB. 此时，如图 1.2(a)所示，在一次试验中，事件 AB 表示事件 A 与事件 B 同时发生. 特别地，事件 A 与事件 B 互斥或互不相容当且仅当 $AB=\varnothing$.

事件的并：属于事件 A 或者属于事件 B 的所有基本事件的集合，我们称之为事件 A 与事件 B 的并或和，记为 $A\cup B$ 或 $A+B$. 此时，如图 1.2(b)所示，在一次试验中，事件 $A+B$表示事件 A 与事件 B 至少有一个发生. 特别地，事件 A 与事件 B 对立当且仅当 $AB=\varnothing$ 且 $A+B=\Omega$.

值得注意的是，关系式 $AB\subset A\subset A+B$ 及 $AB\subset B\subset A+B$ 都成立.