学府考研

十年专注·只做考研

2018

高·等·数·学
基础过关900题

◎ 李昌兴 主编

数学全程答疑

下载答疑APP

基础薄弱考生专用

考研数学复习必备·基础过关配套习题

西北工业大学出版社

学府考研

十年专注·只做考研

GAODENG SHUXUE JICHU GUOGUAN 900 TI

高等数学基础过关900题

李昌兴 主编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是严格按照最新《全国硕士研究生入学统一考试大纲》(数学)的要求编写的.本书对考研高等数学部分所要求的知识点进行全面阐述,并对考试重点、难点以及常考知识点进行深度剖析,同时,优化设计一定数量的练习题,能够使考生巩固所学知识,提高实际解题能力,实现知识掌握与习题解答的统一.本书中设置的习题具有较好的前瞻性与预测性,对每一道题目给出考点分析,进行详细解答,尽可能给出多种解题方法,并进行解题方法、技巧的归纳总结,以开阔考生的视野,达到触类旁通、举一反三的效果.

本书可作为备战2018年研究生入学考试的学生、提前备战2019年研究生入学考试的学生的辅导用书,也可供从事本专业教学的教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学基础过关900题 / 李昌兴主编. —西安 :西北工业大学出版社,2017.4
ISBN 978-7-5612-5309-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①李… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第090118号

策划编辑:杨　军
责任编辑:何格夫

出版发行:西北工业大学出版社
通信地址:西安市友谊西路127号　　　**邮编:**710072
电　　话:(029)88493844　88491757
网　　址:www.nwpup.com
印 刷 者:西安东江印务有限公司
开　　本:787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张:29
字　　数:707千字
版　　次:2017年4月第1版　　　2017年4月第1次印刷
定　　价:59.80元

风雨考研路　学府伴你行

“学府考研”是学府教育旗下专业从事考研辅导的品牌！

“学府考研”是一个为实现人生价值和理想而欢聚一堂的团队。2006 年从 30 平方米办公室起步，历经十年，打造了一个考研培训行业的领军品牌。如今学府考研已发展成为集考研培训、图书编辑、在线教育为一体的综合性教育机构，扎根陕西，服务全国。

学府考研的辅导体系满足了考研学子不同层面的需求，主要以小班面授教学、全日制考研辅导、网络小班课为核心，兼顾大班教学、专业课一对一辅导等多层次辅导。学府考研在教学中的“讲、练、测、评、答”辅导体系，解决了考研辅导“只管教，不管学”的问题，保证学员在课堂上听得懂，课下会做题。通过定期测试，掌握学员的学习进度，安排专职教师答疑，保证学习效果。总结多年教学实践经验，学府考研逐渐形成了稳定的辅导教学体系，尽量做到一个学员一套学习计划、一套辅导方案，大大降低了学员考取目标院校的难度。在公共课教学方面实现零基础教学，在专业课方面，建立了遍及全国各大高校的研究生专业信息资源库，解决考生跨院校、跨专业造成的信息不对称、复习资料缺乏等难题。

“学府考研”的使命是帮助每一个信任学府的学员都能考上理想院校。

学府文化的核心是“专注文化”。

“十年专注，只做考研”。因为专业，所以深受万千考研学子信赖！

“让每一个来这里的考研学子都成为成功者”。正是这种责任，让学府考研快速成为考生心目中当仁不让的必选品牌。

人生能有几回搏，三十年太长，只争朝夕！

同学们，春华秋实，为了实现理想，努力吧！

学府考研总部 | 全国统一客服电话 | 400-090-8961
陕西 · 西安友谊东路75号新红锋大厦三层

学府官方微博　　　　学府官方微信

致学府图书用户

亲爱的学府图书用户：

您好！欢迎您选择学府图书，感谢您信任学府！

“学府图书”是学府考研旗下专业从事考研教辅图书研发的图书公司！

为了更好地为您提供“优质教学、始终如一”的服务，对于您所提出的宝贵意见与建议，我们向您深表感谢！

若我们的图书质量或服务未达到您的期望，敬请您通过以下联系方式进行告知。我们珍视并诚挚地感谢您的反馈，谢谢您！

在此祝您学习愉快！

学府图书全国统一客服电话：400-090-8961

学府图书质量及服务监督电话：15829918816

学府图书总经理投诉电话：张城 18681885291 投诉必复！

您也可将信件投入此邮箱：34456215@qq.com 来信必回！

图书微博　　图书微信　　图书微店

前　言

数学是全国硕士研究生入学统一考试工学类、经济类和管理类考生的必考科目，分值等同于专业课程，其重要程度不言而喻.数学考试成绩的优劣是关系到考生能否取得硕士研究生入学复试资格的一把“金钥匙”，而高等数学又是考研数学中的重要组成部分.要想获得优异的成绩，考生除了具备不懈努力的“韧劲”、四两拨千斤的“巧劲”之外，还需掌握必要的应试技能.笔者深知任何一本辅导用书都不能确保考生顺利通过考研，但“工欲善其事，必先利其器”，好的辅导用书一定可以帮助考生在考研前进的道路上披荆斩棘，做到事半功倍.本书就是为考生在考研基础复习阶段量身定制的辅导用书.

在本书编写过程中，严格按照教育部考试管理中心编撰的最新《全国硕士研究生入学统一考试大纲》(数学)的要求，同时汲取国内同类教材的精华，并融入笔者多年来考研辅导教学的新成果和新理念.本书着重突出以下几个特色.

(1)习题选编紧扣考试大纲.习题选编紧紧围绕最新数学考试大纲，做到有的放矢、分散难点、突出重点、难易兼备，选编了拓展性好的基础训练题和适量的考研真题，还选编了具有考研前瞻性和新颖性的题型，屏蔽了偏题、怪题和难题.

(2)选编习题内容覆盖全面.选编习题涵盖了数学考研大纲的所有知识点和考点，针对重要知识点和考点编撰了多个题目，通过这些习题的训练来帮助考生熟悉基本定理、基本公式的运用，建立考研数学知识的基本架构.

(3)选编习题精解详略得当.在习题精解部分指出了每道题目的大纲考点、解析思路、答案解析，旨在使考生熟悉考研大纲的要点和重点、掌握考研命题的规律和特点、明确命题的意图、开拓考生的解题视野、强化复习的针对性.答案解析力争做到可读性与示范性的协调统一，以提高考生做题的规范性和有效性，避免“小题大做”“大题小做”现象的发生.

(4)选编习题涵盖基本方法.笔者细心考虑到考研试题常用解答方法.如客观试题作答中的推演法、图示法、赋值法、排除法、逆推法等，通过比较各种方法在不同类型题目中的解答效率，考生能够系统掌握客观性试题解答的技能.另外，在名师评注中，适时指出常用解答方法的适用对象和基本思想，结合具体问题分析相关概念、相关理论之间的有机联系，实时给出一些重要的结论，以

及一些常见错误的辨析，题目拓展，解题方法的归纳总结等.

本书分为精编习题与习题精解两部分，其内容包括函数与极限、一元函数微分学、一元函数积分学、向量代数和空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数以及微分方程.

本书适用于考研数学一、数学二和数学三，并对不同数学种类的不同考试内容给出了标注说明.

建议考生在使用本书时，不要就题论题，而是通过对题目的作答、比较、思考和总结，发现题目设置和解答的规律，特别要弄清楚命题者的意图，真正掌握应试技能，取得满意的成绩.

本书在笔者多年的考研辅导教学经验积累的基础上，借鉴和参阅了大量国内同类优异的辅导资料，得到了有益的启迪和教益，谨向有关作者表示感谢！

本书虽经笔者深思熟虑和反复推敲，但疏漏及不妥之处在所难免，恳请读者和广大同仁批评指正，以使本书在教学实践中不断完善.

编　者

2017 年 1 月

目　录

第一部分　精编习题

第一章　函数与极限 …… 1
第二章　一元函数微分学 …… 9
第三章　一元函数积分学 …… 23
第四章　向量代数与空间解析几何(数学一) …… 40
第五章　多元函数微分学 …… 44
第六章　多元函数积分学 …… 54
第七章　无穷级数(数学一、数学三) …… 70
第八章　微分方程 …… 78

第二部分　习题精解

第一章　函数与极限 …… 83
第二章　一元函数微分学 …… 113
第三章　一元函数积分学 …… 186
第四章　向量代数与空间解析几何(数学一) …… 261
第五章　多元函数微分学 …… 277
第六章　多元函数积分学 …… 324
第七章　无穷级数(数学一、数学三) …… 396
第八章　微分方程 …… 434
参考文献 …… 453

第一部分　精编习题

第一章　函数与极限

一、选择题

1. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}+\ln(x^2-x-2)$ 的定义域是(　　).

(A) $(-2,-1)$　　(B) $(-1,2)$

(C) $(-2,-1)\cup(2,+\infty)$　　(D) $(2,+\infty)$

2. 下列选项中,函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同的是(　　).

(A) $f(x)=\ln x^2, g(x)=2\ln x$

(B) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$

(C) $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x), g(x)=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$

(D) $f(x)=1, g(x)=\dfrac{x}{x}$

3. 下列函数为奇函数的是(　　).

(A) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$　　(B) $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$

(C) $f(x)=\sin x+x^2+x+1$　　(D) $f(x)=x^3\sin 3x$

4. 函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是(　　).

(A) 奇函数　　(B) 非奇非偶函数

(C) 既是奇函数又是偶函数　　(D) 偶函数

5. 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 与 $h(x)$ 均为定义在 $(-\infty,+\infty)$ 内的非零函数,且 $g(x)$ 为奇函数, $h(x)$ 为偶函数,则(　　).

(A) $f[g(x)]$ 必为奇函数　　(B) $g[f(x)]$ 必为奇函数

(C) $f[h(x)]$ 必为偶函数　　(D) $h[f(x)]$ 必为偶函数

6. 函数 $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}$ 是(　　).

(A) 有界函数　　(B) 单调函数　　(C) 周期函数　　(D) 偶函数

7. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 内的严格递增函数与严格递减函数,则(　　).

(A) $f[g(x)]$ 是严格递增函数　　(B) $f[g(x)]$ 是严格递减函数

(C) $f(x)g(x)$ 是严格递减函数　　(D) $f(x)g(x)$ 是严格递增函数

8. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是(　　).

(A) 有界函数　　(B) 单调函数　　(C) 周期函数　　(D) 偶函数

9. 函数 $y=e^{x-1}, x\in[0,+\infty)$ 的反函数及其定义域为(　　).

(A) $y=\ln x+1, x\in[e^{-1},+\infty)$　　(B) $y=-\ln x+1, x\in[e^{-1},+\infty)$

(C) $y=\ln x+1, x\in(0,+\infty)$　　(D) $y=-\ln x+1, x\in(0,+\infty)$

10. 设 $f_1(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, f_2(x)=f_1[f_1(x)], f_k(x)=f_1[f_{k-1}(x)](k=2,3,4\cdots)$，则当 $n>2$ 时，$f_n(x)=$(　　).

(A) $\dfrac{nx}{\sqrt{1+x^2}}$　　(B) $\dfrac{nx}{\sqrt{1+nx^2}}$　　(C) $\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$　　(D) $\dfrac{x}{\sqrt{n+x^2}}$

11. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

12. 数列 $\{x_n\}$ 的极限等于 a 等价于(　　).

(A) 对任给 $\varepsilon>0$，在 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内有数列的无穷多项

(B) 对任给 $\varepsilon>0$，在 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内仅有数列的有限多项

(C) 对任给 $\varepsilon>0$，在 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 之外有数列的无穷多项

(D) 对任给 $\varepsilon>0$，在 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 之外仅有数列的有限多项

13. “对任意给定的正数 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，不等式 $|x_n-a|<2\varepsilon$ 都成立”是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的(　　).

(A) 充分条件但非必要条件　　(B) 必要条件但非充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分条件，又非必要条件

14. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq 0$，则当 n 充分大时，下列正确的有(　　).

(A) $|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$　　(B) $|a_n|<\dfrac{|a|}{2}$

(C) $a_n>a-\dfrac{1}{n}$　　(D) $a_n<a+\dfrac{1}{n}$

15. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是(　　).

(A) 无穷小　　(B) 无穷大

(C) 既不是无穷大，也不是无穷小　　(D) 极限存在但不是 0

16. 函数 $f(x)=x\sin x$ 是(　　).

(A) 当 $x\to\infty$ 时的无穷大　　(B) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界

(C) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界　　(D) 当 $x\to\infty$ 时的无穷小

17. 若当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都是无穷小，则当 $x\to x_0$ 时，不一定是无穷小的为(　　).

(A) $|\alpha(x)|+|\beta(x)|$　　(B) $\alpha^2(x)+\beta^2(x)$

(C) $\ln[1+\alpha(x)\cdot\beta(x)]$　　(D) $\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta(x)}$

18. 当 $x\to 0$ 时，下列四个无穷小中，比其他三个更高阶的无穷小是(　　).

(A) x^2　　(B) $1-\cos x$　　(C) $\sqrt{1-x^2}-1$　　(D) $x-\tan x$

19. 当 $x\to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价无穷小的是(　　).

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$　　(B) $\ln(1+\sqrt{x})$　　(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$

20. 当 $x\to 0$ 时，下列式子错误的是(　　).

(A) $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$　　(B) $o(x^2)-o(x^2)=o(x^2)$

(C) $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$　　(D) $o(x)+o(x^2)=o(x^2)$

21. 当 $x\to 0^+$ 时，下列无穷小旳阶从低到高的正确排列是(　　).

(A) $e^{\sqrt{x}}-1,\tan(\sin x),\ln(1+x^2),1-\cos x^2$

(B) $\tan(\sin x),e^{\sqrt{x}}-1,\ln(1+x^2),1-\cos x^2$

(C) $\ln(1+x^2),\tan(\sin x),1-\cos x^2,e^{\sqrt{x}}-1$

(D) $\ln(1+x^2),1-\cos x^2,e^{\sqrt{x}}-1,\tan(\sin x)$

22. 设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $(e^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

23. 已知当 $x\to 0$ 时，$f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则(　　).

(A) $k=1,c=4$　　(B) $k=1,c=-4$　　(C) $k=3,c=4$　　(D) $k=3,c=-4$

24. 下列各式中正确的是(　　).

(A) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=1$　　(B) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=-e$　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=e$

25. 设对任意的 x，总有 $h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-h(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$(　　).

(A) 存在且等于 0　　(B) 存在但不一定等于 0

(C) 一定不存在　　(D) 不一定存在

26. 极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 为(　　).

(A) 2　　(B) 0　　(C) ∞　　(D) 不存在但不为 ∞

27. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x+b}{x-1}, & x\neq 1\\ a, & x=1\end{cases}$，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=A$ 成立，则以下结果正确的是(　　).

(A) $a=4,b=-3,A=4$　　(B) $a=4,A=4,b$ 可取任意实数

(C) $b=-3,A=4,a$ 可取任意实数　　(D) a,b,A 都可能取任意实数

28. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=$(　　).

(A)0　　(B)6　　(C)36　　(D)∞

29. 设$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{95}(ax+1)^5}{(x^2+1)^{50}}=8$,则 a 的值为(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)$\sqrt[5]{8}$　　(D)3

30. 设$f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}+1}$,则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的(　　).

(A) 可去间断点　　(B) 跳跃间断点

(C) 第二类间断点　　(D) 连续点

31. 设$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$,则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的(　　).

(A) 可去间断点　　(B) 跳跃间断点

(C) 第二类间断点　　(D) 连续点

32. 已知函数 $f(x)$,当 $x\neq 0$ 时,$f(x)=\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}$,且 $f(0)=-1$,则 $f(x)$(　　).

(A) 有可去间断点　　(B) 有跳跃间断点

(C) 有无穷间断点　　(D) 没有间断点

33. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内都有定义,$f(x)$ 连续,$g(x)$ 有间断点,且 $f(x)\neq 0$,则下列函数中必有间断点的是(　　).

(A)$g[f(x)]$　　(B)$f[g(x)]$

(C)$[g(x)]^2$　　(D)$\dfrac{g(x)+f(x)}{[f(x)]^2}$

34. 函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$(　　).

(A) 不存在间断点

(B)$x=1$ 是第一类间断点,$x=-1$ 是连续点

(C)$x=\pm 1$ 是第一类间断点

(D)$x=-1$ 是第一类间断点,$x=1$ 是连续点

35. 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的可去间断点的个数为(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D) 无穷多个

36. 下列函数在其定义域内连续的是(　　).

(A)$f(x)=\ln x+\sin x$　　(B)$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leqslant 0\\ \cos x, & x>0\end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x-1, & x>0 \end{cases}$　　(D) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

二、填空题

37. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加，且 $f(f(x))=x$，则 $f(x)=$ ________.

38. 设函数 $f(x)=\begin{cases} 2, & |x|<1 \\ 0, & |x|\geqslant 1 \end{cases}$，$g(x)=\begin{cases} 0, & |x|\leqslant 2 \\ 1, & |x|>2 \end{cases}$，则 $f[g(x)]=$ ________，$g[f(x)]=$ ________.

39. 函数 $y=\lg\dfrac{x}{1-x}$ 的反函数为________.

40. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$ ________.

41. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+x+1}}=$ ________.

42. $\lim\limits_{x\to 0^+}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=$ ________.（$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数）

43. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+5x}-\sqrt{1-3x}}{x^2+2x}=$ ________.

44. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\sin x\right)=$ ________.

45. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2x+1}{3x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=$ ________.

46. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=$ ________.

47. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$ ________.

48. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{x^2+1}-1}=$ ________.

49. $\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=$ ________.

50. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$ ________.

51. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]=$ ________.

52. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}-2}{x^2}=$ ________.

53. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$ ________.

54. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=$________.

55. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$________.

56. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}=$________.

57. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 2x}=$________.

58. $\lim\limits_{x\to -\infty}[\sqrt{x^2+2x+\sin x}+(x+2)]=$________.

59. $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)=$________.

60. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$________.

61. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}=$________.

62. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^x-a}(\cos x-b)=5$,则 $a=$________,$b=$________.

三、解答题

63. 确定下列函数的定义域:

(1)$f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$;　　(2) $f(x)=\dfrac{\arccos\dfrac{2x-1}{7}}{\sqrt{x^2-x-6}}$.

64. 设 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$,$f[g(x)]=1-x$,且 $g(x)\geqslant 0$,求 $g(x)$ 及其定义域.

65. 判定函数 $f(x)=(\mathrm{e}^{x+|x|}-1)\ln(1+|x|-x)$ 的奇偶性.

66. 求函数 $y=\begin{cases}x, & -\infty<x<1\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4\\ 2^x, & 4<x<+\infty\end{cases}$ 的反函数.

67. 已知 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,且当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=3x^2+2x-\sin x$,求 $f(x)$ 的表达式.

68. 设 $f(x)$ 满足方程:$af(x)+bf\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\sin x$,其中 $|a|\neq|b|$,求 $f(x)$.

69. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

70. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

71. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}\right)$.

72. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\sin^2 x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\sin x)^{\frac{2}{\sin x}}$.

73. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n})$.

74. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

75. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right]$.

76. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$,试确定常数 a,b.

77. 已知$\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-\sqrt{ax^2-bx+c})=2$,求 a 与 b 的值.

78. 已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]}{2^x-1}=3$,求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

79. 已知$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$,求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

80. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$.

81. 求证：数列$\sqrt{2}$,$\sqrt{2+\sqrt{2}}$,$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$,… 的极限存在.

82. 设 $0<x_1<3$, $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ $(n=1,2,\cdots)$,证明：数列$\{x_n\}$极限存在,并求此极限.

83. 设数列$\{x_n\}$满足 $0<x_1<\pi$,$x_{n+1}=\sin x_n$ $(n=1,2,\cdots)$,证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求该极限.

84. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0\\ ae^{2x}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续,求 a 的值.

85. 问 k 为何值时,$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0\\ k, & x=0\\ \dfrac{e^x-1}{x}, & x>0\end{cases}$ 在其定义域内连续.

86. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,试确定常数 a,b.

87. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$,讨论函数 $f(x)$ 的间断点.

88. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x+2)}{\sin(\pi x)}, & x<0,x\neq -n,n\in\mathbf{N}^{+}\\ \dfrac{\sin x}{x^{2}-1}, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的间断点及其类型.

89. 求极限 $\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，记此极限为 $f(x)$，求函数 $f(x)$ 的间断点并指出类型.

90. 证明：方程 $x=\sin x+2$ 至少有一个小于 3 的正根.

91. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内连续，且 $a<c<d<b$，证明：在 (a,b) 内必存在一点 ξ，使得等式 $sf(c)+tf(d)=(s+t)f(\xi)$ 成立，其中 s,t 为自然数.

92. 证明：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，则在 $[x_1,x_n]$ 上必有 ξ，使 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

93. 证明：若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 必在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

94. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为常数，且满足

$$|a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx|\leqslant|\sin x|$$

证明：$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1$.