新世纪

新世纪普通高等教育
公共基础类课程规划教材

高等数学习题解

（第二版）

主　编　王榕国

大连理工大学出版社

新世纪

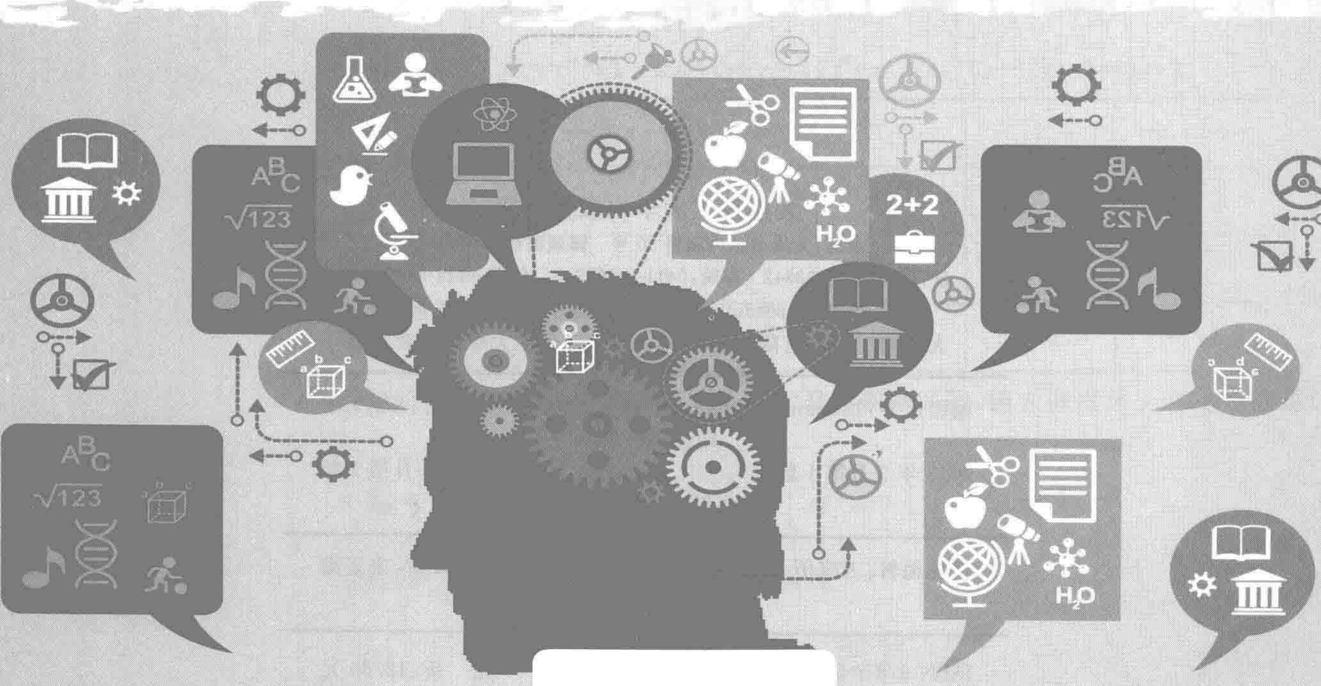
新世纪普通高等教育
公共基础类课程规划教材

高等数学习题解

GAODENG SHUXUE XITIJIE

（第二版）

主　编　王榕国
副主编　黄加增　胡世录　高　微



大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题解 / 王榕国主编. — 2版. — 大连 : 大连理工大学出版社，2016.8
新世纪普通高等教育公共基础类课程规划教材
ISBN 978-7-5685-0495-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 179613 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023
发行:0411-84708842 邮购:0411-84708943 传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm 印张:19.75 字数:453 千字
印数:1～1400
2013 年 9 月第 1 版 2016 年 8 月第 2 版
2016 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑:王晓历 责任校对:宋云霞
封面设计:张 莹

ISBN 978-7-5685-0495-9 定 价:42.80 元

前　言

《高等数学习题解》(第二版)是新世纪普通高等教育教材编审委员会组编的公共基础类课程规划教材之一。

本教材是阙树福主编的全国高等农林院校"十一五"规划教材《高等数学》的配套辅导书，它有助于辅导读者学好主教材或其他要求相近的教材，达到大纲要求，满足有关专业的需要。

本教材共7章：函数、极限和连续，一元函数微分学，一元函数积分学，微分方程，空间解析几何与向量代数，多元函数微积分学，无穷级数。书末附有16套模拟试卷及参考答案。

本教材由具有长期教学和辅导经验的一线教师编写，对每一章节的习题均做了详细的解答。编者认为学生需要熟练基本运算，完成一定数量的习题，才能培养和提高综合运用能力及解决实际问题的能力。读者应结合阙树福主编的《高等数学》教材，对其中的题目先进行周密思考、独立解答，久思不得其解时，再阅读本教材中的提示、分析或解答，找出自己疏漏或错误之处，切不可不经独立思考而照抄答案。

本教材由福建农林大学东方学院王榕国担任主编，福建农林大学东方学院黄加增、胡世录、高微担任副主编，福建农林大学尤添革、罗桂生、官明友、阙树福、赖尾英参加了教材的编写工作。

由于时间仓促和作者水平所限，书中难免有不妥和疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

2016年8月

所有意见和建议请发往：dutpbk@163.com
欢迎访问教材服务网站：http://www.dutpbook.com
联系电话：0411-84708445　84708462

新世纪

目　录

第1章

函数、极限和连续

1.1 函数

习题 1-1

1. 将点 3 的$\frac{1}{5}$邻域用集合表示.

解 根据邻域的概念可得

$$\mathring{U}\left(3,\frac{1}{5}\right)=\left\{x\,|\,3-\frac{1}{5}<x<3+\frac{1}{5}\right\}=\left\{x\,\middle|\,\frac{14}{5}<x<\frac{16}{5}\right\}.$$

2. 判断下列各对函数是否相同,并说明理由.

(1) $f(x)=|x|$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$； (2) $f(x)=\sin x$ 与 $g(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$.

解 (1) $f(x)=|x|$ 定义域 $x\in\mathbf{R}$,值域$[0,+\infty)$；$g(x)=\sqrt{x^2}$,定义域 $x\in\mathbf{R}$,值域$[0,+\infty)$,所以函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同.

(2) $f(x)=\sin x$,定义域 $x\in\mathbf{R}$,值域为$[-1,1]$；$g(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$,定义域 $x\in\mathbf{R}$,值域为$[0,1]$. 因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的值域不同,所以函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不同.

3. 求下列函数的定义域:

(1) $f(x)=\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{1-x^2}$； (2) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1\\ x^2-1, & 1<|x|<2\end{cases}$.

解 (1) 要使函数 $f(x)=\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{1-x^2}$ 有意义,需 $x+3\geqslant 0$ 且 $1-x^2\neq 0$,解得 $x\geqslant -3$ 且 $x\neq\pm 1$. 所以 $f(x)$ 的定义域为$[-3,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(2) 要使函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1\\ x^2-1, & 1<|x|<2\end{cases}$ 有意义,需 $1-x^2\geqslant 0$. 由 $|x|\leqslant 1$ 且 $1<|x|<2$,解得 $-2<x<2$. 所以 $f(x)$ 的定义域为$(-2,2)$.

4. 已知 $y=f(x)$ 的定义域为$[0,1]$,求下列函数的定义域:

(1) $f(x^2)$； (2) $f(x+1)$； (3) $f(\lg x)$； (4) $f(\sin x)$.

解 (1) 因为 $x^2\in[0,1]$,即 $-1\leqslant x\leqslant 1$,所以 $f(x^2)$ 的定义域为$[-1,1]$.

(2) 因为 $(x+1)\in[0,1]$,即 $-1\leqslant x\leqslant 0$,所以 $f(x+1)$ 的定义域为$[-1,0]$.

(3)因为 $\lg x\in[0,1]$,即 $1\leqslant x\leqslant 10$,所以 $f(\lg x)$的定义域为$[1,10]$.

(4)因为 $\sin x\in[0,1]$,即 $x\in[2k\pi,(2k+1)\pi]$,$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$,所以 $f(\sin x)$的定义域为$[2k\pi,(2k+1)\pi]$,$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

5. 设分段函数 $f(x)=\begin{cases}1-2x, & 若|x|\leqslant 1\\ x^2+1, & 若|x|>1\end{cases}$,求下列函数值:$f(0)$,$f(-1)$,$f\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

解 (1)当 $x=0$ 时,$f(x)=1-2x$,所以 $f(0)=1$;

(2)当 $x=-1$ 时,$f(x)=1-2x$,所以 $f(-1)=3$;

(3)当 $x=\dfrac{3}{2}$时,$f(x)=x^2+1$,所以 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{13}{4}$.

6. 火车站收取行李费的规定如下:当行李不超过 50 千克时,按基本运费计算,如从北京到某地每千克收费 0.15 元.当超过 50 千克时,超重部分每千克按 0.25 元收费.试求北京到某地的行李费 y(元)与行李重量 x(千克)之间的函数关系式,并画出图形.

解 依题意得,行李费 y(元)与行李重量 x(千克)之间关系如下:

$$y=\begin{cases}0.15x, & 0<x\leqslant 50\\ 0.15\times 50+(x-50)\times 0.25, & x>50\end{cases}=\begin{cases}0.15x, & 0<x\leqslant 50\\ -5+0.25x, & x>50\end{cases}.$$

图形略.

7. 试确定函数 $f(x)=4-x^2$ 在指定区间上是有界还是无界:

(1)$(1,3)$; (2)$(-\infty,+\infty)$.

解 $f(x)=4-x^2$,定义域 $x\in\mathbf{R}$.

(1)因为 $x\in(1,3)$时,存在 $f(x)=-5$,对 $\forall x\in(1,3)$,总有$|f(x)|\leqslant 5$.所以 $f(x)=4-x^2$在$(1,3)$上有界.

(2)因为 $x\in(-\infty,+\infty)$时,对于任意的 k 总能找到 $x_0\in(-\infty,+\infty)$,使得$|f(x_0)|>k$,所以$f(x)=4-x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$上无界.

8. 写出 $f(x)=\begin{cases}1-x, & -1<x\leqslant 0\\ 1+x, & 0<x\leqslant 1\\ 2, & 其他\end{cases}$ 的单调区间.

解 (1)当$-1<x\leqslant 0$ 时,令 $1-x=0$,$x=1\notin(-1,0]$.取$-1<x_1<x_2\leqslant 0$,所以 $x_1-x_2<0$.因为

$$f(x_1)-f(x_2)=x_2-x_1>0$$

所以 $f(x)$在$(-1,0]$上单调递减,所以$(-1,0]$是单调递减区间.

(2)当 $0<x\leqslant 1$ 时,令 $x+1=0$,$x=-1\notin(0,1]$.取 $0<x_1<x_2\leqslant 1$,所以 $x_2-x_1>0$.因为

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2-x_1>0$$

所以 $f(x)$在$(0,1]$上单调递增,所以$(0,1]$是单调递增区间.

9. 判定下列函数的奇偶性:

(1)$f(x)=\log_2\cos x$; (2)$f(x)=\cos x+\dfrac{\sin x}{x}$;

(3)$f(x)=x^2-2x+1$; (4)$f(x)=\arcsin(\sin x)$.

解　(1)因为

$$f(-x)=\log_2\cos(-x)=\log_2\cos x=f(x)$$

所以 $f(x)=\log_2\cos x$ 是偶函数.

(2)因为

$$f(-x)=\cos(-x)+\frac{\sin(-x)}{-x}=\cos x+\frac{\sin x}{x}=f(x)$$

所以 $f(x)=\cos x+\dfrac{\sin x}{x}$是偶函数.

(3)$f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$,定义域 $x\in\mathbf{R}$,值域恒大于 0. 因为 $f(-x)\neq f(x)$, $f(-x)\neq -f(x)$,所以 $f(x)=x^2-2x+1$ 既不是奇函数也不是偶函数.

(4)因为

$$f(-x)=\arcsin[\sin(-x)]=\arcsin(-\sin x)=-\arcsin(\sin x)=-f(x)$$

所以 $f(x)=\arcsin(\sin x)$是奇函数.

10. 设 $f(x)$是定义在$(-l,l)$内的任意函数,$f(x)$不恒为零,证明:

(1)$F(x)=f(-x)+f(x)$是偶函数;

(2)$F(x)=f(x)-f(-x)$是奇函数.

证明　(1)因为

$$F(-x)=f(x)+f(-x)$$

所以

$$F(x)-F(-x)=f(-x)+f(x)-f(x)-f(-x)=0$$

即 $F(x)=F(-x)$,所以 $F(x)$是偶函数.

(2)因为

$$F(-x)=f(-x)-f(x)$$

所以

$$F(x)+F(-x)=f(x)-f(-x)+f(-x)-f(x)=0$$

即 $F(x)=-F(-x)$,所以 $F(x)$是奇函数.

11. 求下列函数的反函数:

(1)$f(x)=\dfrac{2x-1}{1-x}$;　　(2)$f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2\\ 12x-16, & x>2\end{cases}$.

解　(1)因为 $y=f(x)=\dfrac{2x-1}{1-x}$,所以 $x=\dfrac{y+1}{2+y}$,将 x、y 互换,得 $f(x)=\dfrac{2x-1}{1-x}$的反函数为 $y=\dfrac{x+1}{2+x}$.

(2)当 $x<-1$ 时,$f(x)=1-2x^2$,其值域 $w_1=(-\infty,-1)$. 从 $y=f(x)=1-2x^2$,解得 $x=-\sqrt{\dfrac{1-y}{2}}$,将 x、y 互换,得

$$y=-\sqrt{\frac{1-x}{2}},x\in(-\infty,-1)$$

当$-1\leqslant x\leqslant 2$时，$f(x)=x^3$，其值域$w_2=[-1,8]$.从$y=f(x)=x^3$，解得$x=\sqrt[3]{y}$，将x、y互换，得

$$y=\sqrt[3]{x},x\in[-1,8]$$

当$x>2$时，$f(x)=12x-16$，其值域$w_3=(8,+\infty)$.从$y=f(x)=12x-16$，解得$x=\frac{y+16}{12}$，将x、y互换，得

$$y=\frac{x+16}{12},x\in(8,+\infty)$$

综上所述，$f(x)$的反函数为

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{\frac{1-x}{2}}, & x<-1\\ \sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x\leqslant 8\\ \frac{x+16}{12}, & x>8\end{cases}$$

12. 设$f(x)=2^x$，$g(x)=\sqrt{x}$，求：

(1)$f[f(x)]$；(2)$f[g(x)]$；

(3)$g[g(x)]$；(4)$g[f(x)]$.

解 (1)$f[f(x)]=2^{2^x}$；

(2)$f[g(x)]=2^{\sqrt{x}}$；

(3)$g[g(x)]=\sqrt{g(x)}=\sqrt{\sqrt{x}}=(x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{4}}$；

(4)$g[f(x)]=\sqrt{2^x}=2^{\frac{x}{2}}$.

13. 将下列函数分解成基本初等函数的复合：

(1)$f(x)=\arctan x^2$；(2)$f(x)=\mathrm{e}^{\sin 2x}$；

(3)$f(x)=\lg\sin\sqrt{x}$；(4)$f(x)=(\sin\ln x)^2$.

解 (1)因为函数$f(x)=\arctan u$，而$u=x^2$，所以函数$f(x)=\arctan x^2$是由$f(x)=\arctan u$，$u=x^2$复合而成.

(2)因为函数$f(x)=\mathrm{e}^t$，而$t=\sin u$，$u=2x$，所以函数$f(x)=\mathrm{e}^{\sin 2x}$是由$f(x)=\mathrm{e}^t$，$t=\sin u$及$u=2x$复合而成.

(3)因为函数$f(x)=\lg u$，而$u=\sin t$，$t=\sqrt{x}$，所以函数$f(x)=\lg\sin\sqrt{x}$是由$f(x)=\lg u$，$u=\sin t$及$t=\sqrt{x}$复合而成.

(4)因为函数$f(x)=u^2$，而$u=\sin t$，$t=\ln x$，所以函数$f(x)=(\sin\ln x)^2$是由$f(x)=u^2$，$u=\sin t$及$t=\ln x$复合而成.

14. 设$f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{1+x^4}$，求$f(x)$.

解 因为$f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{1+x^4}$，所以

$$\frac{1}{f\left(x-\frac{1}{x}\right)}=\frac{1+x^4}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2,$$

从而

$$f(x)=\frac{1}{x^2+2}.$$

15. 某企业生产一种产品，其固定成本为 1 000 元，单位产品的变动成本为 18 元，市场需求函数为 $q=90-p$，p 为产品价格，求总利润函数.

解　依题意得，市场需求量为 q，则变动成本 $C_0=18q$. 因为 $q=90-p$，所以 $p=90-q$，总收益函数

$$R(q)=pq=q(90-q),$$

从而总利润函数

$$L(q)=R(q)-C_0-1\,000=q(90-q)-18q-1\,000=-q^2+72q-1\,000.$$

1.2　数列的极限

习题 1-2

1. 写出以下数列的前四项：

(1) $x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$;　　(2) $x_n=(-1)^n\sin\frac{n}{4}\pi$;

(3) $x_n=\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}$.

解　(1) 当 $n=1$ 时，$x_1=\sqrt{2}-1$;

当 $n=2$ 时，$x_2=\sqrt{3}-\sqrt{2}$;

当 $n=3$ 时，$x_3=2-\sqrt{3}$;

当 $n=4$ 时，$x_4=\sqrt{5}-2$.

(2) 当 $n=1$ 时，$x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

当 $n=2$ 时，$x_2=1$;

当 $n=3$ 时，$x_3=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

当 $n=4$ 时，$x_4=0$.

(3) 当 $n=1$ 时，$x_1=m$;

当 $n=2$ 时，$x_2=\frac{m(m-1)}{2}$;

当 $n=3$ 时，$x_3=\frac{m(m-1)(m-2)}{6}$;

当 $n=4$ 时，$x_4=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{24}$.

2. 观察下列数列 $\{y_n\}$ 当 $n\to+\infty$ 时的变化趋势，判断它们是否收敛，在收敛时指出它们的极限：

(1)$y_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$；　　(2)$y_n=\sin\frac{n\pi}{2}$；

(3)$y_n=\frac{n-2}{n+2}$；　　(4)$y_n=2^{(-1)^n}$；

(5)$y_n=2+(-1)^n\frac{1}{n}$；　　(6)$y_n=\ln\frac{1}{n}$；

(7)$y_n=\begin{cases}\frac{1-2^n}{2^n}, & n\text{ 为奇数}\\ \frac{1+2^n}{2^n}, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$；　　(8)$y_n=\begin{cases}\frac{2^n-1}{2^n}, & n\text{ 为奇数}\\ \frac{2^n+1}{2^n}, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$.

解　(1)当 $n\to+\infty$时，$y_n\to0$，所以该数列收敛，其极限为 0；

(2)当 $n\to+\infty$时，$y_n\in[-1,1]$，值不确定，所以该数列不收敛；

(3)当 $n\to+\infty$时，$y_n\to1$，所以该数列收敛，其极限为 1；

(4)当 $n\to+\infty$时，$y_n\to2$(n 为偶数)或 $y_n\to\frac{1}{2}$(n 为奇数)，所以该数列不收敛；

(5)当 $n\to+\infty$时，$y_n\to2$，所以该数列收敛，其极限为 2；

(6)当 $n\to+\infty$时，y_n 无意义，所以该数列不收敛；

(7)当 n 为奇数且 $n\to+\infty$时，$y_n\to-1$；当 n 为偶数且 $n\to+\infty$时，$y_n\to1$，所以该数列不收敛；

(8)当 n 为奇数且 $n\to+\infty$时，$y_n\to1$；当 n 为偶数且 $n\to+\infty$时，$y_n\to1$，所以该数列收敛，其极限为 1.

3. 设数列 $y_n=\frac{n+2}{n+1}$.

(1)估计 $n\to+\infty$时，y_n 的极限 A；

(2)若给定 $\varepsilon=0.01$，问第几项以后不等式$|y_n-A|<\varepsilon$ 恒成立？

(3)若 ε 是任意指定的正数，问哪一项以后，不等式$|y_n-A|<\varepsilon$ 恒成立？

解　(1)当 $n\to+\infty$时，$y_n\to1$，所以 $A=1$；

(2)$|y_n-1|=\left|\frac{n+2}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}$，要使$|y_n-1|<0.01$，即$\frac{1}{n+1}<0.01$，得 $n+1>100$，所以 $n>99$. 因此从第 99 项以后不等式$|y_n-1|<\varepsilon$ 恒成立.

(3)$|y_n-1|=\frac{1}{n+1}$，要使不等式$|y_n-1|<\varepsilon$ 恒成立，即$\frac{1}{n+1}<\varepsilon$，所以 $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$，即从第$\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$项以后不等式$|y_n-1|<\varepsilon$ 恒成立.

4. 用数列极限的 ε-N 定义证明下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1$；　　(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{3n+1}=\frac{2}{3}$；

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{3^n}=0$；　　(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cos2n=0$.

证明　(1)对于任意给定正数 ε，要使

$$\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，不等式 $\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|<\varepsilon$ 恒成立.

(2)对任意给定正数 ε，要使

$$\left|\frac{2n-1}{3n+1}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{-5}{3(3n+1)}\right|=\frac{5}{3(3n+1)}<\varepsilon$$

只要 $n>\frac{5}{9\varepsilon}-\frac{1}{3}$，取 $N=\left[\frac{5}{9\varepsilon}-\frac{1}{3}\right]$，则当 $n>N$ 时，就有不等式 $\left|\frac{2n-1}{3n+1}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$ 恒成立.

(3)对于任意给定正数 ε，要使

$$\left|\frac{1}{3^n}-0\right|=\frac{1}{3^n}<\varepsilon,$$

只要 $n>-\log_3\varepsilon$，取 $N=[-\log_3\varepsilon]$，则当 $n>N$ 时，就有不等式 $\left|\frac{1}{3^n}-0\right|<\varepsilon$ 恒成立.

(4)对于任意给定正数 ε，要使

$$\left|\frac{1}{n}\cos 2n-0\right|=\left|\frac{\cos 2n}{n}\right|<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，就有不等式 $\left|\frac{1}{n}\cos 2n-0\right|<\varepsilon$ 恒成立.

5. 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=a$，证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}|y_n|=|a|$，并举例说明反之未必成立.

证明　因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=a$，所以对 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,N>0$，当 $n>N$ 时有 $|y_n-a|<\varepsilon$. 又因为

$$||y_n|-|a||\leqslant|y_n-a|<\varepsilon$$

从而对于上述条件下有 $||y_n|-|a||<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}|y_n|=|a|$，反之不成立.

如 $y_n=(-1)^{2n+1}$，$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=-1$，$\lim\limits_{n\to+\infty}|y_n|=1$，故反之不成立.

6. 设数列 $\{x_n\}$ 有界，又 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=0$，证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_ny_n=0$.

证明　由已知可知 $|x_n|\leqslant M$. 对 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,N>0$，当 $n>N$ 时，$|y_n|<\frac{\varepsilon}{M}$. 因为

$$|x_ny_n|\leqslant|x_n||y_n|<M|y_n|<\varepsilon$$

由上述条件可得，$|x_ny_n-0|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_ny_n=0$.

7. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=a$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{k\to+\infty} y_{2k-1}=\lim\limits_{k\to+\infty} y_{2k}=a$.

证明　必要条件：因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=a$，所以对 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,N_0>0$，当 $n>N_0$ 时，$|y_n-a|<\varepsilon$. 令 $N_1=2k-1>N_0$ 时，$|y_{2k-1}-a|<\varepsilon$. $N_2=2k>N_0$ 时，$|y_{2k}-a|<\varepsilon$.

所以上述的 ε 满足条件，可得

$$\lim_{k\to+\infty} y_{2k-1}=\lim_{k\to+\infty} y_{2k}=a.$$

充分条件：由

$$\lim_{k\to+\infty} y_{2k-1}=\lim_{k\to+\infty} y_{2k}=a$$

知，对 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,N_1=2k-1$，当 $n>N_1$ 时，$|y_n-a|<\varepsilon$.

对于上述 $\varepsilon>0$，$\exists\,N_2=2k$，当 $n>N_2$ 时，$|y_n-a|<\varepsilon$.

令 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则 $\exists N>0$，当 $n>N$ 时，$|y_n-a|<\varepsilon$ 恒成立.

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=a$.

1.3 函数的极限

习题 1-3

1. 根据函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to1}(3x-1)=2$； (2) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$；

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}3^x=0$； (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2}{x^2}=3$.

解 (1) 对 $\forall\varepsilon>0$，要使 $|(3x-1)-2|=3|x-1|<\varepsilon$，只要 $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{3}$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$，则当 $|x-1|<\delta$ 时，就有不等式 $|(3x-1)-2|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to1}(3x-1)=2$.

(2) 对 $\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{x^2-4}{x+2}+4\right|=|x+2|=|x-(-2)|<\varepsilon$，只要取 $\delta=\varepsilon$，则当 $|x-(-2)|<\delta$ 时，就有不等式 $\left|\dfrac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right|<\varepsilon$ 成立，所以 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$.

(3) 对 $\forall\varepsilon>0$，要使 $|3^x-0|<\varepsilon$，即 $3^x<\varepsilon$，$x<\log_3\varepsilon$，只要取 $\delta=\log_3\varepsilon$，则当 $x<\delta$ 时，总有 $|3^x-0|<\varepsilon$ 成立，所以 $\lim\limits_{x\to-\infty}3^x=0$.

(4) 对 $\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{3x^2+2}{x^2}-3\right|=\dfrac{2}{|x^2|}<\varepsilon$，只要 $|x|>\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}$，取 $\delta=\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}$，则当 $|x|>\delta$ 就有不等式 $\left|\dfrac{3x^2+2}{x^2}-3\right|<\varepsilon$ 恒成立，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2}{x^2}=3$.

2. 设 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，问 $x\to0$ 时 $f(x)$ 的极限是否存在？

解 因为

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=1,\ \lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)\neq\lim_{x\to0^-}f(x)$$

所以 $x\to0$ 时 $f(x)$ 的极限不存在.

3. 设 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$，问 $x\to0$ 时 $f(x)$ 的极限是否存在？

解 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}}=+\infty$，所以 $x\to0$ 时 $f(x)$ 的极限不存在.

4. 设 $f(x)=\arctan x$，问 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 的极限是否存在？

解 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$. 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$，所以 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 的极限不存在.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x<0\\ x+1, & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}2^x=1$，所以

$$\lim_{x\to 0}f(x)=1$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}(x+1)=2.$$

6. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<0\\ 0, & x=0\\ x, & 0<x<1\\ 1, & 1<x<4\end{cases}$．求 $f(x)$ 在 $x\to 0$ 及 $x\to 1$ 时的左右极限，并判断 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 是否存在.

解　因为

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x=0,\ \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1-x}=1$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}1=1$，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$.

7. 根据函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$；

(2) $\lim\limits_{x\to \infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=A$.

证明　(1) 因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，所以对 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立.

由 $0<|x-x_0|<\delta$ 知 $-\delta<x-x_0<\delta$，即当 $x_0-\delta<x<x_0$ 或 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$ 依然恒成立，所以

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A$$

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to \infty}f(x)=A$，所以对 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,M>0$，当 $|x|>M$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立.

即 $|x|>M\Rightarrow x>M$ 或 $x<-M$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$ 依然恒成立，所以

$$\lim_{x\to -\infty}f(x)=\lim_{x\to +\infty}f(x)=A$$

8. 证明：设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$，$c$ 是任意满足 $0<c<A$ 的实数，试证：存在 x_0 的某去心邻域，在该邻域内 $f(x)>c$.

证明　因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$，所以对 $\forall\,\varepsilon=A-2C>0\left(0<C<\dfrac{A}{2}\right)$，$\exists\,\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立，从而 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$. ε 取为 $A-2C$，即 $A-A+2C<f(x)<2A-2C$，$2C<f(x)<2(A-C)$，得 $0<2C<A$ 时有 $2C<f(x)<2(A-C)$，即得 $f(x)>c$，$0<c<A$ 成立.

9. 利用极限的两边夹逼定理证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$.

证明 因为 $3^n\leqslant 1+2^n+3^n\leqslant 3\cdot 3^n$，得 $3\leqslant(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant 3^{1+\frac{1}{n}}$.
又因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}3=3$，$\lim\limits_{n\to+\infty}3^{1+\frac{1}{n}}=3$，所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$.

1.4 无穷小量和无穷大量

习题 1-4

1. 两个无穷小的商是否一定是无穷小？

解 否. 例如 $a=3x$，$b=6x$，当 $x\to 0$ 时，a，b 均为无穷小；但当 $x\to 0$ 时 $\frac{a}{b}$ 不为无穷小.

2. 当 $x\to 0$ 时，下列变量中哪些是无穷小？

(1) $2x^3$；　(2) $\sqrt{5x}$；　(3) $\frac{1}{x}$；

(4) $\frac{x}{2}$；　(5) $1+x$；　(6) $2^{-x}-1$.

解 当 $x\to 0$ 时 (1)、(2)、(4)、(6) 为无穷小. 因为当 $x\to 0$ 时，$2x^3$、$\sqrt{5x}$、$\frac{x}{2}$、$2^{-x}-1$ 的极限为 0.

3. 指出下列各题中，哪些是无穷小？哪些是无穷大？

(1) $f(x)=\frac{x+2}{x^2-1}(x\to 1)$；　(2) $f(x)=\lg x(x\to 0^+)$；

(3) $f(x)=\lg x(x\to+\infty)$；　(4) $f(x)=2^{\frac{1}{x}}(x\to 0^+)$；

(5) $f(x)=2^{\frac{1}{x}}(x\to 0^-)$；　(6) $f(x)=\sin x-1\left(x\to\frac{\pi}{2}\right)$；

(7) $f(n)=\frac{1}{2n^2}(n\to+\infty)$；　(8) $f(n)=\frac{1+(-1)^n}{n}(n\to+\infty)$.

解 无穷小：(5)、(6)、(7)、(8).
无穷大：(1)、(2)、(3)、(4).

(1) 当 $x\to 1$ 时，$\frac{x+2}{x^2-1}\to\infty$；

(2) 当 $x\to 0^+$ 时，$\lg x\to-\infty$；

(3) 当 $x\to+\infty$ 时，$\lg x\to+\infty$；

(4) 当 $x\to 0^+$ 时，$2^{\frac{1}{x}}\to+\infty$；

(5) 当 $x\to 0^-$ 时，$2^{\frac{1}{x}}\to 0$；

(6) 当 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x-1\to 0$；