

刘彦佩

半闲数学集锦

**Semi-Empty Collections
in Mathematics by Y.P.Liu**

第十编

时代文化出版社

刘彦佩

半闲数学集锦

Semi-Empty Collections
in Mathematics by Y.P.Liu

第十编



时代文化出版社

半闲数学集锦（第十编）

作 者：刘彦佩

出版单位：时代文化出版社

地 址：香港湾仔骆克道骆基中心23楼C座

编辑设计：北京时代弄潮文化发展有限公司

地 址：北京市海淀区中关村创业大街25号家谱传记楼

电 话：010-68920114 13693651386

网 址：www.grcsw.com

印 刷：京冀印刷厂

开 本：880×1230 1/16

版 次：2016年9月第1版

书 号：ISBN 978-988-18455-0-4

定 价：全套 1890.00元（共22编）



版权所有 翻印必究

第十编序

本编除文 10.01[074]—10.03[076] 外, 余下的就是专著 *General Theory of Map Census*[419](10.04—10.26).

前者为后者只是提供一些相关的素材, 后者的完成, 显示各种途径从平面发展到曲面, 而且仍给我们留下一系列有待完备的问题.

第 1、专著 183(7.11—7.26) 是专著 [419](10.04—10.26) 的前身, 但前者的重点在平面地图, 而后者则强调非平面地图, 以及如何在平面的基础上, 导出非平面. 因此, 书名不得不重新拟定.

第 2、在 10.06 中, 选用了 7.13 的主要内容, 精简或删去冗余, 增加三个新定理, 即定理 1.3.5、定理 1.5.2 和定理 1.6.4. 在提取平面和曲面, 各种计数方程时, 它们都广被利用.

第 3、在 10.07 中, 只提到由外平面地图, 可以产生亏格非零曲面上的, 存在一个面, 它的边缘过所有顶点, 的地图.

第 4、在 10.08 中, 对于亏格非零曲面上的三角化, 提供了根据平面圆盘上的三角化, 通过圆盘边缘, 适当地粘合, 生成的研究路线.

第 5、虽然 7.15 讨论的平面三角化与 7.16 的三正则地图内容不同, 因为这两个对象的对偶性, 可以从一个转换到另一个, 没有采用 7.16, 而是添加新的 10.09, 讨论平面和非零小亏格曲面上的四角化. 特别是所得到的差分方程, 在以后的研究中, 对于简化与核定在小亏格曲面上, 四正则地图的计数结果, 将会起到好作用.

第 6、在 10.10 中, 对于可定向曲面(含球面, 或等价地, 平面)上的 Euler 地图, 建立了一个偏微分介子泛函方程. 它的一个解, 就是一个顶点剖分计数函数. 通过这个方程特殊情形下的一个解, 可以确定这类地图, 有限计数参数(或不变量)的一个计数函数.

第 7、对于曲面(含球面, 或等价地, 平面)上的不可分离地图, 在 10.11 中, 提出一种, 由不可分离平面地图, 产生的路径, 取得了一些基本结果. 不过, 对于无桥(即无割棱)曲面地图, 却导出了一个偏微分介子泛函方程, 它的一个解, 就是这类地图的一个顶点剖分计数函数.

第 8、对于曲面(可定向与不可定向)上的无环地图, 在 10.12 中, 导出了这类地图, 以根点次和度为参数的计数函数, 所满足的一个偏微分方程. 对于可定向曲面, 也相仿地, 得到一个对两个变元的偏微分方程. 有趣的是, 这两个方程属于一个类型, 只在一些项的系数, 差一个常数.

第 9、对于在可定向曲面, 或所有曲面上, 的一般地图, 在 10.13 中, 都得到了两个变元的计数函数, 所满足的对其一个变元的偏微分方程. 这两个方程也是同一个类型, 只有两项的系数都差一个常数.

第 10、在 10.14 中, 对于一类双不可分离地图, 在所有可定向曲面上, 色

和函数(或着色计数函数), 导出了一个差分方程. 这个方程的一个解, 就是这个色和函数.

第 11、对于一类双不可分离地图, 在 10.15 中, 求得一个, 在所有可定向曲面上, 范色和函数, 所满足的差分方程. 对于非零小亏格曲面, 尚还未引起多少较普遍性的新研究.

第 12、在 10.16 中, 全部内容都是新的. 从图在曲面上的嵌入与地图的关系, 直接从一类图在曲面上的嵌入的计数, 导出曲面地图的计数. 或反之.

第 13、对于几类局部定向地图, 10.17 提供了, 通过平面地图的计数, 直接导出曲面地图的计数. 这就是从平面到曲面的研究路线的一种实现.

第 14、在 10.18 中, 根据嵌入的联树表示, 通过寻求从小亏格, 生成大亏格曲面的地图数, 直到确定一类地图的亏格多项式. 自然, 导致在任何给定亏格曲面上, 所讨论地图的计数.

第 15、在 10.23 中, 对于一些图类, 提供了小亏格曲面上, 根地图, 无根地图, 以及嵌入的列表.

其他部分, 即除 10.19—10.20 都是新的外, 10.04—10.05, 10.19—10.17, 以及 20.21—10.22 和 10.24—10.26 是伴随改变的.

刘彦佩
2015 年 7 月
於北京上园村

第十编目录

10.01[074]	Enumeration of simple planar maps.....	4533
10.02[075]	关于有根外平面地图的面剖分	4541
10.03[076]	Enumeration of rooted non-separable outerplanar maps	4545
专著[419]	<i>General Theory of Map Census</i>	4547
10.04	Preface	4549
10.05	Contents	4550
10.06	Chapter 1 Preliminaries	4554
10.07	Chapter 2 Outerplanar maps	4592
10.08	Chapter 3 Triangulations	4620
10.09	Chapter 4 Quadrangulations	4650
10.10	Chapter 5 Eulerian maps	4673
10.11	Chapter 6 Nonseparable maps	4698
10.12	Chapter 7 Simple maps	4727
10.13	Chapter 8 General maps	4761
10.14	Chapter 9 Chromsum equations	4792
10.15	Chapter 10 Polysum equations	4821
10.16	Chapter 11 Maps via embeddings	4843
10.17	Chapter 12 Locally oriented maps	4858
10.18	Chapter 13 Genus polynomials of graphs	4871
10.19	Chapter 14 From rooted to unrooted	4888
10.20	Chapter 15 From planar to nonplanar	4897
10.21	Chapter 16 Chromatic solutions	4911
10.22	Chapter 17 Stochastic behaviors	4939
10.23	Appendix Atlas of super maps for small graphs	4967
10.24	Bibliography	5004
10.25	Subject index	5024
10.26	Author index	5030

Enumeration of Simple Planar Maps¹

Liu Yanpei

RUTCOR, Rutgers University, USA
and
Institute of Applied Mathematics
Academia Sinica
Beijing, China

Abstract. On the enumeration of rooted simple planar maps, the first discussion was in a recursive way related to the functional equation for enumerating rooted general planar maps (Acta Math. Appl. Sinica, English Series 2(1985), 101–111). Then, an explicit expression was found (J. Math. res. and Expos. 4:3(1984), 37–46). Recently, a functional equation has been derived from the more general case of face partition (Submitted for publication). This paper provides another functional equation for enumerating rooted simple planar maps with the valency of the root-vertex and the edge number as indices, from which the results obtained before are extracted more directly and more simply.

On enumerating simple planar maps, of course, the first step is for rooted ones, the author's paper [1] discussed by recursive formulae. And, in [2], an explicit expression was presented. However, in both papers, all the results were related to the functional equation for enumerating rooted general planar maps. In [3], a functional equation was obtained as a corollary of the one for face partition. Interestingly, this paper provides another functional equation for rooted simple planar maps more directly and more simply than those have existed.

Now let S be the set of all the rooted simple planar maps. And, for $S \in S$, let $m(S)$ be the valency of the root-vertex, and $n(S)$ be the number of edges of S . The purpose here is to determine the functional equation satisfied by the generating function

$$g = g(x, y) = \sum_{S \in S} x^{m(S)} y^{n(S)}; \quad h = g(1, y), \quad (1)$$

for enumerating the maps in S .

Firstly, we partition S into two parts: $S = S(I) + S(II)$ such that $S(I)$ consists of the only map which is the vertex map. The main difficulty is how to decompose $S(II)$. In order to do this, we have to investigate what the set $S(II)(R) = \{S \bullet R | S \in S(II)\}$ looks like, where $S \bullet R$ is the resultant map of contracting the root-edge R of S . For a map $S \in S(II)$, let the cycle $(e_0, e_1, \dots, e_{m(S)-1})$ be the rotation at the root vertex. Here, $e_0 = R$, and e_i is

¹This research was supported in part by the National Science Foundation of China and by the U.S. National Science Foundation under Grant Number 85 03212 and was completed during the author's stay at RUTCOR - Rutgers University's Center for Operations Research

said to be the i^{th} edge of S , $0 \leq i \leq m(S) - 1$. Further, we introduce a new operation Γ on a map S such that $\Gamma_i(S)$ is the resultant map of splitting the i^{th} edge of S into a double edge with a new face whose boundary consists of only the double edge. The new bivalent face of $\Gamma_i(S)$ is denoted by $f_S(\Gamma_i)$. Easily to see $\Gamma_i(S) \notin \mathcal{S}$.

In addition, one kind of maps important for our purpose is what to be called nearly simple planar maps which are simple save only for one edge, the double edge with the root-edge, which the boundary of the root-face consists of. Let $\hat{\mathcal{S}}$ be the set of all rooted nearly simple maps.

Lemma 1. Let $\hat{\mathcal{S}}(R) = \{S - R | S \in \hat{\mathcal{S}}\}$. Then we have

$$\hat{\mathcal{S}}(R) = \mathcal{S} - \mathcal{S}(I). \quad (2)$$

For two maps S_1, S_2 , let $(e'_0, e'_1, \dots, e'_{m(S_1)-1})$ be the rotation at the root-vertex of S_1 . The angle $\langle e'_i, e'_{i+1} \rangle$ on the rotation is said to be the i^{th} angle of S_1 , $i = 0, \dots, m(S_1) - 1$. We define $S_1 \diamond S_2$ to be $S_1 \cup S_2$ provided $S_1 \cap S_2 = \{v\}$, the common root-vertex of S_1 and S_2 . Further, $S_1 \diamond_i S_2$ stands for $S_1 \diamond S_2$ when S_2 is in the inner domain of the face to which the i^{th} angle S_1 is incident. We may precisely define $\diamond = \diamond_0$. And, it is easily seen that for S_1, S_2, S_3 , we have $S_1 \diamond_i S_2 \diamond_j S_3 = (S_1 \diamond_i S_2) \diamond_{i+j} S_3$ which shows neither associative nor commutative as shown in Fig. 1. Therefore, we have to indicate that the order of doing the operations is from right to the left.

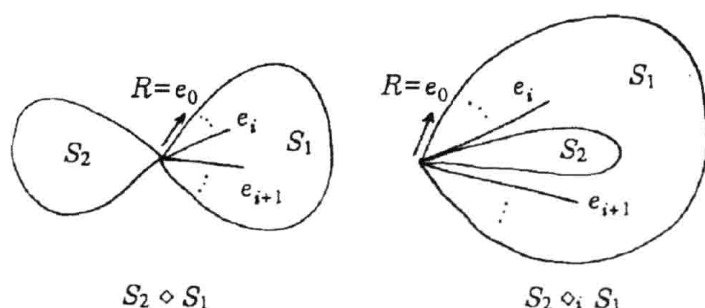


Figure 1.

Lemma 2. For $S \in \mathcal{S}(II)(R)$, there exists an integer $k \geq 0$ with maps $S_0 \in \mathcal{S}$, $S_i \in \hat{\mathcal{S}}$, $1 \leq i \leq k$, in company with integers $i_0, 0 \leq i_0 \leq m(S_0) - 1, i_j, 1 \leq i_j \leq m(S_j) - 2$ such that

$$S = \Gamma_{i_0}(S_0) \diamond_{i_0} \Gamma_{i_1}(S_1) \diamond_{i_1} \cdots \Gamma_{i_{k-1}}(S_{k-1}) \diamond_{i_{k-1}} S_k. \quad (3)$$



Figure 2.

Let $\mathcal{S}(A) = \{S | S \in \mathcal{S} \text{ and } S \bullet R \in \mathcal{S}\}$. And, for a map S , let $\delta_i S$ denote the resultant map of splitting the root-vertex v_r of S into v_r' and v' with the new edge (v_r', v') as the root-edge such that $i = m(\delta_i S)$, for $1 \leq i \leq m(S) + 1$ as shown in Fig. 2.

Lemma 3. For $\mathcal{S}(A)$, we have

$$\mathcal{S}(A) = \sum_{S \in \mathcal{S}} \{\delta_1(S), \delta_2(S), \dots, \delta_{m(S)+1}(S)\} \subseteq \mathcal{S}(II). \quad (4)$$

Furthermore, let $\mathcal{S}_k(II)(R) = \{S | S \in \mathcal{S}(II)(R) \text{ and } S = \Gamma_{i_0}(S_0) \diamond_{i_0} \dots \diamond_{i_{k-2}} \Gamma_{i_{k-1}}(S_{k-1}) \diamond_{i_{k-1}} S_k \text{ as indicated in (3)}\}$. Then, the following two lemmas may be found.

Lemma 4. For $k = 0$, we have

$$\mathcal{S}_0(II) = \mathcal{S}. \quad (5)$$

Lemma 5. For $k > 0$, we have

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_k(II)(R) = \sum_{S_0 \in \mathcal{S} - \mathcal{S}(I)} \sum_{i_0=0}^{m(S_0)-1} \prod_{j=1}^k \sum_{S_j \in \mathcal{S}} \sum_{i_j=1}^{m(S_j)-2} \{\Gamma_{i_0}(S_0) \diamond_{i_0} \Gamma_{i_1}(S_1) \diamond_{i_1} \\ \dots \diamond_{i_{k-2}} \Gamma_{i_{k-1}}(S_{k-1}) \diamond_{i_{k-1}} S_k\}. \end{aligned} \quad (6)$$

In what follows, we have to introduce another operation denoted by $\triangleright$. For two maps S_1, S_2 , $S_1 \triangleright S_2$ means $S_1 \cup S_2$ provided $S_1 \cap S_2 = \{R\}$, the common root-edge, and S_2 is in the inner domain of the finite face incident to the root-edge of S_1 . Thus, from Lemma 5, by splitting the root-vertex, we may obtain the following lemma as shown in Fig. 3.

Lemma 6. For $\mathcal{S}(II)$ we have

$$\mathcal{S}(II) = \mathcal{S}(A) + \sum_{k>0} \delta \mathcal{S}_k(II)(R), \quad (7)$$

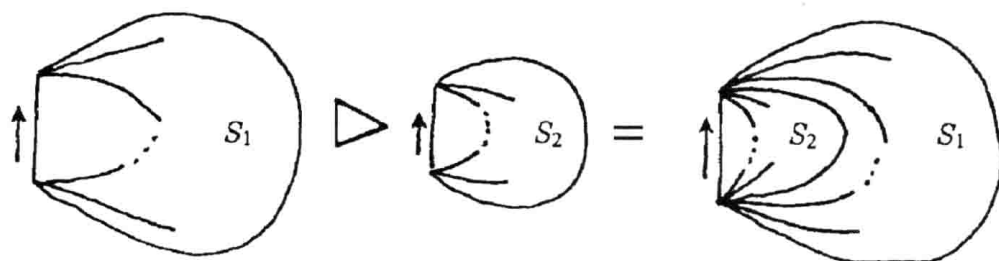


Figure 3.

where the following notation is employed

$$\delta S_k(II)(R) = \sum_{S_0 \in S-S(I)} \sum_{i_0=0}^{m(S_0)-1} \prod_{j=1}^{k-1} \left(\sum_{S_j \in \hat{S}} \sum_{i_j=1}^{m(S_j)-2} \right) \sum_{S_k \in \hat{S}} \sum_{i_k=2}^{m(S_k)} \quad (8)$$

$$\{\delta_{i_0+1} \Gamma_{i_0}(S_0) \triangleright \delta_{i_1+2} \Gamma_{i_1}(S_1) \triangleright \dots \triangleright \delta_{i_{k-1}+2} \Gamma_{i_{k-1}}(S_{k-1}) \triangleright \delta_{i_k} S_k\}.$$

Now, we are allowed to discuss how to determine the cooresponding generating functions $g_{S(I)}$, $\hat{g}$, g_A , g_k , $k > 0$, and g_{II} , of $S(I)$, $\hat{S}$, $S(A)$, $\delta S_k(II)(R)$, and $S(II)$ related to g respectively.

Lemma 7. For $S(I)$, we have

$$g_{S(I)} = 1. \quad (9)$$

Lemma 8. For $\hat{S}$, we have

$$\hat{g} = xy(g-1). \quad (10)$$

Proof: By using Lemma 1, and noticing that for $S \in \hat{S}$, $m(S) = m(S-R) + 1$, $n(S) = n(S-R) + 1$, from Lemma 7, the lemma follows.

Lemma 9. For $S(A)$, we have

$$g_A = \frac{xy}{1-x}(h-xg). \quad (11)$$

Proof: By using Lemmas 3 and 4, we find

$$g_A = y \sum_{S \in \hat{S}} (x + x^2 + \dots + x^{n(S)+1}) y^{m(S)}$$

$$= xy \sum_{S \in \hat{S}} \frac{1 - x^{m(S)+1}}{1-x} y^{m(S)},$$

from which, the lemma is obtained.

Lemma 10. For $\delta S_k(II)(R)$, we have

$$g_k = x^2 y \left(\frac{h-g}{1-x} \right)^2 \left(1 + \frac{xh-g}{1-x} \right)^{k-1}, \quad k \geq 1. \quad (12)$$

Proof: From Lemmas 6, 7, and 8, we may derive

$$\begin{aligned} g_k &= xy \left(xy \sum_{S \in S-S(I)} (1+x+\cdots+x^{m(S)-1}) y^{n(S)} \right) \\ &\quad \times \left(x^{-1} y^{-2} \sum_{S \in S} xy(x+x^2+\cdots+x^{m(S)-2}) y^{n(S)} \right)^{k-1} \\ &\quad \times \left(x^{-1} y^{-2} \sum_{S \in S} (x+x^2+\cdots+x^{m(S)-1}) y^{n(S)} \right) \\ &= x^2 y^2 \frac{(h-1)-(g-1)}{1-x} x^{-1} y^{-2} \frac{x\hat{h}-\hat{g}}{1-x} \left(x^{-1} y^{-1} \frac{x^2\hat{h}-\hat{g}}{1-x} \right)^{k-1}. \end{aligned}$$

By using $x\hat{h}-\hat{g} = xy(h-g)$, and $x^2\hat{h}-\hat{g} = xy(1-x+xh-g)$, the lemma is proved.

Lemma 11. For $S(II)$, we have

$$g_{II} = \frac{xy}{1-x}(h-xg) + x^2 y \frac{(h-g)^2}{(1-x)(g-xh)}. \quad (13)$$

Proof: On account of $g_{II} = \sum_{k \geq 0} g_k$, and $g_A = g_0$, we find, from Lemmas 9 and 10, that

$$g_{II} = \frac{xy}{1-x}(h-g) + x^2 y \left(\frac{h-g}{1-x} \right)^2 \sum_{k \geq 0} \left(1 + \frac{xh-g}{1-x} \right)^k.$$

After evaluating the summation, the lemma is obtained.

On the basis of $g = g_{S(I)} + g_{II}$, and Lemmas 7 and 11, we may finally deduce the following theorem.

Theorem 1. g satisfies the quadratic functional equation as follows:

$$g^2 - (xh + xy(1-x)h + 1)g + xh = 0. \quad (14)$$

From the equation, we may easily extract two parametric expressions of y and h with ξ as the parameter. In fact, the only thing we have to do is to solve the following equations simultaneously:

$$\begin{cases} (\xi h + \xi(1 - \xi)yh + 1)^2 - 4\xi h = 0; \\ (\xi h + \xi(1 - \xi)yh + 1)(h + (1 - \xi)yh - \xi y h) - 2h = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Thus, we may find the expression as follows:

$$y = \frac{(\xi - 1)^2}{(2\xi - 1)}; \quad h = \frac{(2\xi - 1)^2}{\xi^3}. \quad (16)$$

By introducing the substitution

$$t = \frac{2\xi - 1}{\xi}, \quad (17)$$

we have

$$y = \frac{(t - 1)(2 - t)}{t^2}; \quad h = t^2(2 - t), \quad (18)$$

which is what we found in [2]. And, noticing that

$$H(y) = \frac{d}{dy} h = t^4, \quad (19)$$

we may, by using Lagrangian inversion, obtain $H(y)$ as a power series of y in which, fortunately, all the coefficients are a summation with all the terms positive. Finally, by integrating $H(y)$, the following theorem is again deduced.

Theorem 2. For $h(y)$, we have

$$h = 1 + y + 2y^2 + \sum_{n \geq 3} \frac{y^n}{n!} \left(\sum_{i=0}^{n-2} \frac{4(2n+1)!(2n-i-4)!}{i!(n-i-2)!(2n-i+1)!} \right). \quad (20)$$

Of course, Eq. (14) allows us to go further to determine what the generating function $g = g(x, y)$ looks like. We might discuss in detail for this case if the space permitted here. However, it seems to be much difficult to find a summation-free formula in this case.

Moreover, a summation-free form of the formula (20) has not been found as well although it looks to be not much complicated. And we may also express (20) with integrals as follows:

$$h = 1 + y + 2y^2 + \sum_{k \geq 3} \frac{2(2n+1)!}{n!(n-1)!} \Psi_{n-2}^{(5)}(1) y^n, \quad (21)$$

where

$$\Psi_n^{(k)}(x) = \int_0^x \Psi_n^{(k-1)}(t) dt; \quad (22)$$

$$\Psi_n^{(1)}(x) = \int_0^x t^n (1+t)^n dt, \quad (23)$$

for $n \geq 1, k \geq 1$. Easily to see that $\Psi_n^{(k)}(x)$ is a polynomial of x of order $2n+k$. However, it seems to be still unknown what the summation-free form of $\Psi_n^{(1)}(1)$ is up to now.

REFERENCES

1. Liu Yanpei, Acta Math. Appl. Sinica, Eng. Series 2 (1985), 101–111.
2. Liu Yanpei, J. Math. Res. and Expos. 4:3 (1984), 37–46.
3. Liu Yanpei, *An enumerating equation of simple planar maps with face partition*, submitted for publication.

关于有根外平面地图的面剖分*

刘彦佩

(中国科学院应用数学研究所, 北京)

关键词 外平面地图、面剖分、计数

在有根外平面地图依面剖分的计数方面, 除于 1962 年, Tutte 给出了计算组合上不同的有根 Euler 平面地图数目的一个无和公式, 它可以从对偶的观点视为计算有根平面偶地图在面剖分给定之下组合上不同的数目的公式外^[1], 至今尚未发现这种无和公式. 本文提供了计算有根不可分离外平面地图在面剖分给定之下组合上不同的数目的一个无和公式. 更有趣地, 这个公式是通过解一个带有一个线性泛函的非线性的方程直接得到的, 而 Tutte 的那个公式到目前为止尚还不能通过解方程求取. 虽然可以证明, 它所满足的也是一个带有一个线性泛函的非线性, 实际上二次的方程.

现在, 让我们记 $\mathcal{M}$ 为所讨论的地图的集合. 对于 $M \in \mathcal{M}$, 记

$m(M)$: M 中的根面, 即无限面的次;

$n_i(M)$: M 中次为 i 的非根面, 即有限面的数目, $i \geq 1$.

所谓 $\mathcal{M}$ 的依面剖分的计数函数, 即指

$$g_{\mathcal{M}}(x; y_1, y_2, \dots) = \sum_{M \in \mathcal{M}} x^{m(M)} \prod_{i \geq 1} y_i^{n_i(M)}, \quad (1)$$

或简记 $g_{\mathcal{M}}$. 我们的目的就是求出 $g_{\mathcal{M}}$ 所满足的泛函方程并由此确定出 $g_{\mathcal{M}}$ 的展开式中 $x^m y_1^{n_1} y_2^{n_2} \dots$ 所在项的系数 $A_{\mathcal{M}}(m; n_1, n_2, \dots)$. 当然, 最理想的情况是无和形式:

具体地, 令 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{A}_s$ 和 $\mathcal{B}_s$ 分别为所有一般的、偶的、一般简单的和简单偶的不可分离外平面地图的集合. 当然, 都是有根的. 在一中, 我们首先导出 $A_{\mathcal{A}}(m; n_1, n_2, \dots)$. 然后得到 $A_{\mathcal{B}}(m; n_1, n_2, \dots)$, $A_{\mathcal{A}_s}(m; n_1, n_2, \dots)$ 和 $A_{\mathcal{B}_s}(m; n_1, n_2, \dots)$.

进而, 称根节点的次为 1 的有根平面树为平面植树. 令 $\mathcal{T}_1$ 为所有平面植树构成的集合. 在二中, 我们首先提供了 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{A}$ 之间的一个 1-1 对应, 这实际上给出了文献 [2] 中提出的问题 5.2 的一个解答. 然后, 重新得到了计算依给定的节点剖分确定组合上不等价的平面植树的数目的无和公式. 这个公式在文献 [3, 4] 中可以查到.

一、几个无和公式

对于 $\mathcal{A}$, 我们可以用与文献 [2] 中的引理 2.1—2 相仿的方式进行分解. 首先, 将 $\mathcal{A}$ 分为二类: $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$, 其中 $\mathcal{A}_1$ 仅由一个杆地图组成. 记 $g_{\mathcal{A}_1}$ 和 $g_{\mathcal{A}_2}$ 为它们的相应计数函数, 容易看出, 对于 $\mathcal{A}_1$, 有

本文 1988 年 1 月 5 日收到.

• 国家自然科学基金资助项目.

$$g_{\mathcal{A}} = x^2. \quad (2)$$

为了求 $g_{\mathcal{A}}$ 的表达式, 需引进一个线性泛函 $\mathcal{S}$ 从以 $\{1, y, y^2, \dots\}$ 为基的函数空间到通常的以 $\{1, y_1, y_2, \dots\}$ 为基的线性空间, 使得

$$\mathcal{S}(y^i) = y_i, \quad i \geq 1; \quad \mathcal{S}(1) = 1. \quad (3)$$

然后, 用文献 [2] 中的引理 2.2, 可得

$$g_{\mathcal{A}} = x \mathcal{S} \left(\sum_{k \geq 1} y^{k+1} \prod_{i=0}^{k-1} \left[\sum_{M_i \in \mathcal{A}} x^{m(M_i)-1} \prod_{j \geq 2} y_j^{n_j(M_i)} \right] \right) = x^2 \mathcal{S} \left(\frac{y}{x - y g_{\mathcal{A}}} \right). \quad (4)$$

由 (3) 和 (4) 式, 即得

定理 1.1 $g_{\mathcal{A}}$ 满足如下的泛函方程:

$$g_{\mathcal{A}} = x^2 + x^2 \mathcal{S} \left(\frac{y}{x - y g_{\mathcal{A}}} \right). \quad (5)$$

可以看出, 方程 (5) 是非线性的. 一般而论, 是难以求解的. 但是, 在此情之下我们发现

$$g_{\mathcal{A}} = x^2 + x \sum_{k \geq 1} y_{k+1} (x^{-1} g_{\mathcal{A}})^k. \quad (6)$$

由此出发, 再引进一个函数变换

$$h_{\mathcal{A}} = \frac{g_{\mathcal{A}}}{x}, \quad (7)$$

即可得到如下的关系:

$$h_{\mathcal{A}} = x + \sum_{k \geq 1} y_{k+1} h_{\mathcal{A}}^k, \quad (8)$$

这就使我们能用 Lagrange 反演.

为方便, 下面用记号

$$\mathcal{D}_{\xi}^{m=s} = \frac{d^m}{d\xi^m} \Big|_{\xi=\xi}. \quad (9)$$

从而, 可得

$$\begin{aligned} h_{\mathcal{A}} &= x + \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m!} \mathcal{D}_{\xi=s}^{m-1} \left(\sum_{k \geq 1} y_{k+1} \xi^k \right)^m \\ &= x + \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m!} \sum_{N \in \mathcal{A}} \frac{m! s!}{(s-m+1)! \prod_{i \geq 2} n_i!} x^{s-m+1} \prod_{k \geq 1} y_{k+1}^{n_{k+1}}, \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $\mathcal{R} = \left\{ (n_2, n_3, \dots) \mid \sum_{i \geq 2} n_i = m, s = \sum_{k \geq 1} k n_{k+1}, 0 \leq n_i \leq m, i \geq 2 \right\}$. 用 m 代替 $s-m+2$, 由 (7) 式有

$$g_{\mathcal{A}} = x^2 + \sum_{m \geq 2} x^m \sum_{N \in \mathcal{A}} \frac{1}{s+1} \left(\frac{(s+1)!}{(m-1)! \prod_{i \geq 2} n_i!} \right) \prod_{k \geq 2} y_k^{n_k}. \quad (11)$$

定理 1.2 组合上不等价的具有 q 条边, 根面的次为 m , 次为 j , $j \geq 2$ 的非根面有 n_j 个的有根不可分离外平面地图的数目为

$$\frac{(q-1)!}{(m-1)! \prod_{j \geq 2} n_j!}. \quad (12)$$

证 只要注意到

$$s = 2q - m - (s - m + 2) = 2q - s - 2, \quad (13)$$

即 $s = q - 1$. 由 (11) 式, 即可得定理.

通过研究相应地图的性质, 由此定理可得以下的推论.

推论 1.1 组合上不同的具有 q 条边, 根面的次为 $2r$, n_{2i} 个次为 $2i$ 的非根面, $i \geq 1$ 的有根不可分离外平面偶地图的数目为

$$\frac{(q-1)!}{(2r-1)! \prod_{i \geq 1} n_{2i}!}. \quad (14)$$

推论 1.2 组合上不同的具有 q 条边, 根面的次为 m , 和 n_j 个次为 j , $j \geq 3$ 的非根面的有根不可分离简单外平面地图的数目为

$$\frac{(q-1)!}{(m-1)! \prod_{j \geq 3} n_j!}. \quad (15)$$

推论 1.3 组合上不同的具有 q 条边, 根面的次为 $2r$, 和 n_{2i} 个次为 $2i$, $i \geq 2$ 的非根面的有根不可分离简单偶外平面地图的数目为

$$\frac{(q-1)!}{(2r-1)! \prod_{i \geq 2} n_{2i}!}. \quad (16)$$

由推论 1.1—1.3, 我们可直接得到 $g_{\mathcal{A}}$, $g_{\mathcal{A}_s}$ 和 $g_{\mathcal{A}_s}$ 的显式. 而且, 进一步导出一些更一般的情况不致发生更大的困难, 不过在推导上要复杂些. 当然, 通过求和化简也可得到指标较少的计数公式.

二、一个 1-1 对应

本节, 我们首先提供一个在有根不可分离外平面地图和平面植树之间的 1-1 对应. 实际上, 可以规定双方有相同的边数. 然后, 由上面给出的结果导出这种树的依节点剖分计数的无和公式.

现在, 我们引进一个组合映象 $\phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{T}_1$ 使得对于 $A \in \mathcal{A}$, 记 $\phi(A) = T$, 有

1. T 的节点集相应 A 的非根面集 V_0 和根面边界上边的集合 V_1 的并.
2. T 的边集由二部分组成: 其一由所有连 $u \in V_0$, $v \in V_1$ 的线组成使得 u 即它所表示的面的一个内点, v 是它所表示边的中点. 这条边与这个面在 A 中是关联的. 且此连线在此面之内部; 其二由所有连 $v_1, v_2 \in V_0$ 的线组成使得 v_1, v_2 所表示的面在 A 中是相邻的. v_1 和 v_2 均用它们相应面的一个内点表示. 且此线是在此二面之并的内部并通过它们公共边界边的中点.
3. T 的根节点是 $\phi(R)$, R 是 A 的根边. 自然, T 的根边即 T 中那个与根节点关联的边.

引理 2.1 对于 $A \in \mathcal{A}$, 有

$$\phi(A) = T \in \mathcal{T}_1. \quad (17)$$

引理 2.2 令 $\mathcal{A}_q$ 和 $\mathcal{T}_q$ 分别为所有有 q 条边的有根不可分离外平面地图和平面植树的集合. $\phi_{\mathcal{A}_q}$ 为 ϕ 限制在 $\mathcal{A}_q$ 上的部分. 则 $\phi_{\mathcal{A}_q}$ 是 $\mathcal{A}_q$ 和 $\mathcal{T}_q$ 之间的一个双射 (bijection).

定理 2.1 组合上不同的具有 n 个非根节点和 n_i , $i \geq 1$ 个次为 i 的非根节点的平面植树的数目为