考试名家指导

MBA/MPA/MPAcc联考同步复习指导系列

MBA
MPA
MPAcc

2018版

数学高分速成

适用管理类联考（199科目）：

MBA · MPA · MPAcc · 审计 · 工程管理 · 旅游管理 · 图书情报

袁进　等编著

◎ 内含2017年管理类联考数学真题及详解

◎ 归纳分类典型例题，并给出最快捷的解题方案

◎ 例题与习题难度贴近且略高于联考数学真题

◎ 书中所有练习均配有详解

◎ 适合在联考中需要获得数学高分的考生

第6版

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

考试名家指导

MBA/MPA/MPAcc 联考同步复习指导系列

2018版

数学高分速成

适用管理类联考（199科目）：

MBA · MPA · MPAcc · 审计 · 工程管理 · 旅游管理 · 图书情报

袁进　等编著

第6版

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

本书是根据全新的管理类联考考试大纲编写而成的，主要由两部分组成。第一部分系统地介绍了联考中所涉及的相关数学基础知识，对相关典型例题进行了归纳分类并给出了最简单、快捷的解题方案。第二部分介绍了处理考试中难题的三大方法（归纳法、代入法和穷举法），以及快速选择条件充分性判断题答案的方法。

本书针对联考的特点介绍了每类考试内容所涉题目能采用的最快速的解题方案，有助于考生在短期内提高解题的效率。

本书适合复习时间短，期望在短期内掌握考试内容，提高应试水平的考生。

图书在版编目（CIP）数据

2018MBA、MPA、MPAcc联考同步复习指导系列．数学高分速成／袁进等编著．—6版．—北京：机械工业出版社，2017.5

（MBA、MPA、MPAcc联考与经济类联考同步复习指导系列）

ISBN 978-7-111-56887-2

Ⅰ．①2…　Ⅱ．①袁…　Ⅲ．①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ．①G643

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第089306号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）

策划编辑：孟玉琴　　　　责任编辑：孙　磊

责任校对：田　旭　　　　责任印制：常天培

保定市中画美凯印刷有限公司印刷

2017年5月第6版·第1次印刷

184mm×260mm·13印张·312千字

0001—5000册

标准书号：ISBN 978-7-111-56887-2

定价：29.80元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

服务咨询热线：010-88361066

读者购书热线：010-68326294

010-88379203

网络服务

机工官网：www.cmpbook.com

机工官博：weibo.com/cmp1952

教育服务网：www.cmpedu.com

金书网：www.golden-book.com

丛书序

这是一套针对 MBA、MPA、MPAcc 联考与经济类联考选拔性应试的必备丛书。

本套丛书由北京大学、清华大学、中国人民大学、北京理工大学、西安交通大学、北京交通大学、上海交通大学、同济大学等高校的 MBA、MPA、MPAcc 辅导名师和命题专家联合编写，分为“MBA、MPA、MPAcc 联考与经济类联考同步复习指导系列”和“MBA、MPA、MPAcc 联考模拟试卷系列”2 个系列。本套丛书具有以下特点：

一、一流的编写队伍

本套丛书的编者均是从全国 MBA、MPA、MPAcc 辅导名师中精心挑选出来的。他们多年来一直从事 MBA 考前辅导和命题研究工作，既能把握考生需求与应试精髓，又能洞悉 MBA、MPA、MPAcc 命题规律与趋势。

讲课↔著书↔研究，紧密结合，相互推动，在讲课中实践，在著书中提炼，在研究中升华。这是一流应试辅导丛书品质保证的基石。

二、紧扣 MBA、MPA、MPAcc 联考与经济类联考最新考试大纲

丛书紧扣最新考试大纲，精心研制的例题与习题在难度上等同或略高于真题，在题型设置上与大纲保持一致，其中《数学分册》（针对管理类联考）中含有许多作者原创性的考试应对技巧和经验介绍。我们不鼓励“题海战术”，而是立足于帮助考生在深入研究最新考试大纲和历年试题的基础上，准确把握 MBA、MPA、MPAcc 联考的难点、重点和命题趋势。

三、体系明晰，精讲精练，为考生提供标准化解决方案

“MBA、MPA、MPAcc 联考与经济类联考同步复习指导系列”与最新考试大纲相配套，精讲精练，突出应考重点与难点，洞悉历年试题，强化训练提高，应试针对性极强。

“MBA、MPA、MPAcc 联考模拟试卷系列”严格按照 MBA、MPA、MPAcc 联考最新考试大纲和命题趋势精心设计，融会了众多作者多年教学、辅导、命题研究的心血和智慧，考点分布合理，试卷难度等同或略高于真题难度。

一套好的辅导教材需要具备四个要素：一是严格遵循最新考试大纲；二是具有前瞻性，能针对正式的考试；三是作者真正透彻了解联考的要求，书中内容的难度与联考试卷相符或略高；四是满足考生的需求，突显为考生备考服务的宗旨。

本套丛书很好地体现了这四方面的要求，每道试题都是众多辅导名师和专家教学经验的结晶。往届高分考生的经验说明，“三道题做一遍不如一道题做三遍”“三本书各读一遍不如一本书读三遍”。通过对本套丛书的认真阅读和演练，相信考生必将会为顺利考入名校打下坚实的基础。

希望通过我们不懈的努力和二十多位 MBA、MPA、MPAcc 联考辅导专家的倾情奉献，能够为考生顺利突破联考助一臂之力。

丛书编委会

前　言

我国的管理类专业学位硕士联考开始于1997年。2008年以前，联考中数学部分主要由高等数学中的微积分、线性代数及概率论组成，初等数学只占考题的20%。2007年7月，管理类联考数学考试大纲进行了自联考以来最大的调整。从2008年1月开始，联考中的数学部分主要由初等数学的代数学、几何学及概率初步组成。2010年，数学大纲又新增了函数、立体几何、数据描述及条件概率四部分内容。本书是根据最新考试大纲编写而成的。

从2010年开始，虽然联考中数学部分的难度正在逐步降低，但数学仍然是能否通过联考的关键。不管是以高等数学为主，还是以初等数学为主，联考的目的不仅是考查考生对数学基础知识的掌握，更重要的是考查考生的智力、应用数学知识分析与解决问题的能力，以及快速反应能力。为了使考生尽快了解管理类联考数学的内容，掌握应试技巧，顺利通过联考，作者根据多年的经验编写了本书。

为了满足近两年来越来越多的MPAcc考生跨入名校的需求，本次再版，作者进行了精心的修订，进一步充实和完善了相关考点，以帮助考生在联考中获得数学高分。

本书主要由两部分组成：

（1）第一章至第九章，系统地介绍了联考中所涉及的相关数学基础知识，对相关典型例题进行了归纳分类并给出了最简单、快捷的解题技巧。

（2）第十章介绍了处理考试中难题的三大方法（归纳法、代入法和穷举法），以及快速选择条件充分性判断题答案的一些方法。

本书的主要特点是：

（1）精讲精练。针对考生平时工作忙、复习时间有限的特点，本书遵从由浅入深、简单易懂、突出重点的原则，帮助考生在短时间内尽快掌握考试内容。

（2）掌握思想、打开思路。数学是一种思想，是一种美丽的游戏规则。只要掌握了最核心的思想，理解了每种考点的游戏规则，就可以以不变应万变，打开解题思路。

本书力求以数学思想为主导，提高考生分析问题和解决问题的能力，避免考生陷入题海战术的误区以及把联考数学当作“奥数”来做。

（3）归纳技巧、提高速度。针对联考的特点，本书介绍了每类考试内容所涉及的题目能采用的最快速的解题技巧，有助于考生在短期内提高解题效率。

本书与《数学分册》（机械工业出版社出版）相配套。读透这两本书，考生就可以从横向和纵向上掌握整个知识体系，在联考中得心应手，取得高分。

由于时间仓促，本书难免存在疏漏之处，欢迎批评指正。

在本书的编写过程中，马雅莉、周保源、李亚莉、马建科、王丹红、崔保军、贾晓明、杨雅琳、张淑静、张作铠也参与了部分资料的整理及编写工作，在此一并致谢。

袁　进

条件充分性判断题的解题说明

一、充分条件

由条件 A 成立，就可以推出结论 B 成立（即 $A \Rightarrow B$），则称 A 是 B 的充分条件. 若由条件 A 成立，不能推出结论 B 成立（即 $A \nRightarrow B$），则称 A 不是 B 的充分条件.

二、条件充分性判断题的解题说明

本题要求判断所给出的条件能否支持题干中的结论，阅读每小题中的条件（1）和条件（2）后进行选择.

A. 条件（1）充分，但条件（2）不充分.

B. 条件（2）充分，但条件（1）不充分.

C. 条件（1）和（2）单独都不充分，但条件（1）和条件（2）联合起来充分.

D. 条件（1）充分，条件（2）也充分.

E. 条件（1）和（2）单独都不充分，条件（1）和条件（2）联合起来也不充分.

> **注：**本书中，所有条件充分性判断题中 A，B，C，D，E 这 5 个选项所规定的含义，均以此为准，以后不再重复说明.

例 1　（条件充分性判断）方程 $x^2-3x-4=0$.

（1）$x=-1$.　　　　（2）$x=3$.

解　由条件（1）$x=-1$，可知 $x^2-3x-4=(-1)^2-3\times(-1)-4=0$，所以条件（1）充分.

由条件（2）$x=3$，可知 $x^2-3x-4=9-9-4=-4\neq0$，因此条件（2）不充分.

答案应为 A.

例 2　（条件充分性判断）要使 $\frac{1}{a}\geqslant1$.

（1）$a\leqslant1$.　　　　（2）$a\geqslant1$.

解　由 $a\leqslant1$，不能推出 $\frac{1}{a}\geqslant1$，例如取 $a=-1$，即条件（1）不充分.

由 $a\geqslant1$，则有 $\frac{1}{a}\leqslant1$，也不能推出 $\frac{1}{a}\geqslant1$ 成立，即条件（2）也不充分.

联合条件（1）和条件（2），则 $a\leqslant1$ 且 $a\geqslant1$，从而 $a=1$，$\frac{1}{1}=1$ 成立，

因此条件（1）和条件（2）单独都不充分，但条件（1）和条件（2）联合起来充分.

答案应为 C.

三、特别提示

对条件充分性判断题的解题规则，给出两点提示：

1. 要说明条件是不充分的，只要举出一个反例即可，但要说明条件是充分的，需给出证明.

2. 条件充分性判断题是判断由下面所给条件能否推出上面题干成立，但在实际过程中，有时需首先理解题干的要求，再进行判断.

例3 （条件充分性判断） $-1\leqslant 3x<1$.

(1) $x\in\left(0,\ \dfrac{1}{3}\right]$. (2) $x\in\left(-\dfrac{1}{3},\ 0\right)$.

解 题干要求推出 $-\dfrac{1}{3}\leqslant x<\dfrac{1}{3}$,

则条件（1）和条件（2）中 x 所取范围哪个是 $-\dfrac{1}{3}\leqslant x<\dfrac{1}{3}$ 的子集合，则该条件就是充分的，从而条件（1）不充分，但条件（2）是充分的. 答案应为 B.

目　　录

丛书序
前言
条件充分性判断题的解题说明

第一章　实　数 …… 1
1　整数 …… 1
2　有理数 …… 6
3　实数及其性质 …… 8
4　绝对值 …… 11
5　练习一及详解 …… 16

第二章　函数、整式、分式 …… 21
1　函数 …… 21
2　整式 …… 28
3　分式 …… 34
4　练习二及详解 …… 39

第三章　方程、不等式 …… 45
1　一元二次方程 …… 45
2　一元二次不等式 …… 53
3　练习三及详解 …… 57

第四章　数　列 …… 62
1　基本概念 …… 62
2　等差数列 …… 64
3　等比数列 …… 69
4　练习四及详解 …… 74

第五章　应用题 …… 80
1　比及比例问题 …… 80
2　行程问题 …… 85
3　工程问题 …… 89
4　浓度问题 …… 91
5　方程组及其他问题 …… 92

6 练习五及详解 …… 96

第六章 平面几何与立体几何 …… 102
1 平面几何 …… 102
2 立体几何 …… 109
3 练习六及详解 …… 112

第七章 解析几何 …… 118
1 三个考点 …… 118
2 五种典型例题 …… 121
3 练习七及详解 …… 133

第八章 排列组合与概率 …… 139
1 排列组合 …… 139
2 事件的运算及概率 …… 149
3 条件概率及乘法公式 …… 157
4 事件的独立性及伯努利试验 …… 160
5 练习八及详解 …… 165

第九章 平均值与数据描述 …… 172
1 平均值 …… 172
2 数据描述 …… 175
3 练习九及详解 …… 176

第十章 应对难题的几种解题技巧 …… 180
1 归纳法 …… 180
2 代入法 …… 182
3 穷举法 …… 185
4 解答条件充分性判断题的三点建议 …… 187
5 练习十及详解 …… 190

附录 2017 年管理类专业硕士学位联考综合能力试卷数学试题 …… 194

第一章 实 数

1 整 数

一、三个考点

（一）整除与带余除法

1. 整除（定义）：设 a，b 是两个整数，如果存在一整数 q，使得等式

$$a=q\cdot b$$

成立，则称 b 整除 a（或 a 能被 b 整除）．若 b 整除 a，则称 b 是 a 的因数（约数），称 a 是 b 的倍数．

2. 带余除法（定理）：对于任意两个整数 a，b（$b>0$），一定存在整数 q，r 使得

$$a=q\cdot b+r(0\leqslant r<b)$$

成立，而且 q，r 唯一．

由整除与带余除法可知：$\frac{a}{b}$（$b\neq0$）是整数的充分必要条件是 b 整除 a；b 整除 a 的充分必要条件是带余除法中余数 $r=0$．

（二）质数与合数

1.（质数）设 a 为整数，且 $a\geqslant2$，若 a 只有两个正因数，即 1 和 a，则称 a 为质数．质数有无穷多个，2，3，5，7，11，13，17，19，…均为质数．最小的质数为 2，2 也是唯一的一个偶数质数，其余质数都是奇数．

2.（合数）设 a 为整数，且 $a\geqslant2$，若 a 至少有三个正因数，则称 a 为合数（或复合数）．

在正整数中，1 既不是质数也不是合数．

3.（算术基本定理）设 a 为整数，且 $a\geqslant2$，则有

$$a=p_1p_2\cdots p_m\text{（其中 }p_1，p_2，\cdots，p_m\text{ 均为质数）}$$

即任一大于 1 的整数都能表示成若干个质数的乘积．

4. 设 p 为质数，a_1，a_2，…，a_n 是 n 个整数，若 p 整除 $a_1a_2\cdots a_n$，则 p 至少整除 a_1，a_2，…，a_n 中的一个．

（三）最大公因数与最小公倍数

1.（最大公因数）设 a，b 是两个整数，若整数 c 整除 a，且 c 整除 b，则称 c 是 a，b

的公因数［由于 1 整除 a 且 1 整除 b，因此 a，b 一定有公因数］. a，b 的所有公因数中最大的数叫作 a，b 的最大公因数，记为 $(a,\ b)$. 若 $(a,\ b)=1$，则称 a，b 互质.

2.（最小公倍数）设 a，b 是两个整数，若 c 为整数，满足 a 整除 c，且 b 整除 c，则称 c 是 a，b 的公倍数［由于 ab 是 a，b 的公倍数，ab 的任意倍数都是 a，b 的公倍数，因此 a，b 的公倍数有无穷多个］. a，b 的所有公倍数中最小的正整数叫作 a，b 的最小公倍数，记为 $[a,\ b]$.

最大公因数和最小公倍数有以下三条常用性质

（1）对于任意正整数 a，b，有 $ab=(a,\ b)[a,\ b]$ 成立.

当 $(a,\ b)=1$ 时，$[a,\ b]=ab$.

（2）a，b 的所有公倍数就是 $[a,\ b]$ 的倍数.

（3）若 c 整除 ab，且 $(c,\ a)=1$，则有 c 整除 b.

二、四种典型例题

（一）奇偶性的判定

例 1.1　a，b，c 为两奇数一偶数，n 是整数，$S=(a+n+1)(b+2n+2)(c+3n+3)$，则（　　）.

A. S 为奇数　　B. S 为偶数

C. n 为奇数时，S 为奇数　　D. n 为偶数时，S 为奇数

E. S 为奇偶性无法判断

解　由于 $(a+n+1)+(b+2n+2)+(c+3n+3)=(a+b+c)+6n+6$ 为偶数，

因此 $a+n+1$，$b+2n+2$，$c+3n+3$ 一定为三个偶数或者两奇数一偶数，从而 S 为偶数.

答案是 B.

例 1.2　若一个三角形的周长为偶数，且已知两边长分别为 4 和 2011，则满足条件的三角形共有（　　）个.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4　　E. 5

解　由已知，三角形的第三条边长必为奇数 a，

且有 $\begin{cases} a>2011-4 \\ a<2011+4 \end{cases}$，从而 a 的可能取值为 2009，2011，2013 这三个奇数.

答案是 C.

例 1.3　（条件充分性判断）正整数 n 是奇数.

（1）n 被 3 除时，其余数为 1.

（2）n 被 6 除时，其余数为 3.

解　令 $n=4$，则 $n=1\times3+1$ 满足条件（1），

但 $n=4$ 不是奇数，因此条件（1）不充分.

由条件（2），$n=6q+3=2(3q+1)+1$（q 为整数），

即 n 为奇数，从而条件（2）是充分的.

答案是 B.

例 1.4 （条件充分性判断）整数 m 是偶数.

（1）$m=(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_{2015}-2015)$，这里 a_1，a_2，…，a_{2015} 是自然数 1，2，3，…，2015 的任意一个排列.

（2）$m=a^2b^2-2$，这里 a，b 一个为奇数，一个为偶数.

解 由于 $(a_1-1)+(a_2-2)+\cdots+(a_{2015}-2015)=0$，

从而 a_1-1，a_2-2，…，$a_{2015}-2015$ 中至少有一个是偶数，因此，m 是偶数.

若 a，b 中至少有一个偶数，则 a^2b^2-2 一定是偶数.

即条件（1）和条件（2）都是充分的.

答案是 D.

例 1.5 （条件充分性判断）m^2-n^2 是 4 的倍数.

（1）m，n 都是偶数.

（2）m，n 都是奇数.

解 $m^2-n^2=(m+n)(m-n)$，由条件（1），$m+n$，$m-n$ 都是偶数，从而 m^2-n^2 是 4 的倍数.

由条件（2），$m+n$，$m-n$ 也都是偶数，即 m^2-n^2 也是 4 的倍数.

条件（1）和条件（2）都是充分的.

答案是 D.

（二）质数与合数

例 1.6 已知 a,b，c 为三个连续的奇数，且 $a<b<c$，它们均为质数，则符合条件的 a，b，c 共有（　　）组.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3　　E. 无穷多

解 由于三个连续的奇数中有一个是 3 的倍数，从而满足条件的只有 1 组：$a=3$，$b=5$，$c=7$.

答案是 B.

例 1.7 两个相邻的正整数都是合数,则这两个数的乘积的最小值是（　　）.

A. 420　　B. 240　　C. 210　　D. 90　　E. 72

解 最小值为 $8\times9=72$.

答案是 E.

例 1.8 已知 p_1，p_2，p_3 为质数，且满足 $p_1+p_2+p_3+p_1p_2p_3=99$，则 $p_1+p_2+p_3=$（　　）.

A. 19　　B. 25　　C. 27　　D. 26　　E. 23

解 由已知 p_1，p_2，p_3 中应为两个偶数，一个奇数.

因此不妨设 $p_1=p_2=2$，解得 $p_3=19$. 从而 $2+2+19=23$.

答案是E.

例1.9 已知 $p\cdot q+11=m$，其中 p，q 为两个质数，且 p，q 均小于100，m 是奇数，则 m 的最大值为（　　）.

A. 205　　B. 228　　C. 347　　D. 521　　E. 623

解 由已知 p，q 为一奇一偶，设 $p=2$，则

当 $q=97$ 时，$m=2\times97+11=205$ 为其最大值.

答案是A.

例1.10 （条件充分性判断）n 为合数.

（1）p，q 为质数，$n=p\cdot q+1$.

（2）a，b，c 为三个互不相同的合数，$a+b+c$ 的最小值为 n.

解 当 $p=q=2$ 时，$n=5$ 不是合数，即条件（1）不充分.

由于最小的三个合数为4，6，8，从而 n 的最小值为 $4+6+8=18$ 是合数.

因此条件（2）是充分的.

答案是B.

例1.11 （条件充分性判断）$m+n=2009$.

（1）m 为质数，n 为奇数.

（2）$m^2+n=2011$，这里 m，n 均为正整数.

解 取 $m=2$，$n=3$，则知条件（1）不充分.

取 $m=4$，$n=1995$，可知条件（2）也不充分.

联合条件（1）和条件（2），则得 $m=2$，$n=2007$.

答案是C.

（三）整除性与带余除法

例1.12 要使乘积 $195\times86\times72\times380\times a$ 的末五位数都是零，则最小的自然数 a 为（　　）.

A. 625　　B. 325　　C. 25　　D. 125　　E. 20

解 由已知 $\dfrac{195\times86\times72\times380\times a}{100000}$ 为整数，

化简得 $\dfrac{39\times86\times9\times19\times a}{125}$ 为整数，

从而 $a=125$.

答案是D.

例1.13 从0，1，2，3，4，5，6，7，8，9中选出4个数组成四位数，使这个四位数能被3，5，7，13整数，则这样的四位数中最大的数为（　　）.

A. 6285　　B. 6825　　C. 7965　　D. 7870　　E. 8190

解 所求四位数一定是 $3\times5\times7\times13=1365$ 的倍数.

由于 $1365\times7=9555$ 不满足要求，从而所求四位数为 $1365\times6=8190$.

答案是 E.

例 1.14 三个整数 a, b, c 的和是6 的倍数，则它们的立方和被6 除，得到的余数是（　　）.

A. 0　　B. 2　　C. 3　　D. 4　　E. 5

解 $(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c)=(a^3-a)+(b^3-b)+(c^3-c)$

$=a(a-1)(a+1)+b(b-1)(b+1)+c(c-1)(c+1)$

由于 $a(a-1)(a+1)$, $b(b-1)(b+1)$, $c(c-1)(c+1)$ 都是三个连续整数的乘积，从而每个都是6 的倍数.

答案是 A.

例 1.15 （条件充分性判断）$\frac{n}{12}$是一个整数.

（1）n 是一个整数，且$\frac{n}{6}$也是一个整数.

（2）n 是一个整数，且$\frac{5n}{12}$也是一个整数.

解 $\frac{n}{12}$是整数的充分必要条件是 12 整除 n.

取 $n=6$，则知条件（1）不充分.

由条件（2），12 整除 $5n$，但$(12, 5)=1$，因此必有 12 整除 n，从而条件（2）是充分的.

答案是 B.

例 1.16 （条件充分性判断）n 正整数，则 n 的最小值为 2002^5.

（1）$2002n$ 是完全立方数.

（2）$\frac{n}{2002}$是完全平方数.

解 由于 $2002=2\times7\times11\times13$

由条件（1），令 $n=2^a\times7^b\times11^c\times13^d$，从而 n 的最小值为 $2^2\times7^2\times11^2\times13^2=2002^2$.

由条件（2），n 的最小值为 $2^3\times7^3\times11^3\times13^3=2002^3$.

从而条件（1）和条件（2）都不充分.

联合条件（1）和条件（2），$a+1$，$b+1$，$c+1$，$d+1$ 都是3 的倍数，

且 $a-1$，$b-1$，$c-1$，$d-1$ 都是 2 的倍数.

从而满足条件的最小正整数为 $a=b=c=d=5$.

答案是 C.

（四）最大公因数与最小公倍数

例 1.17 $(140, 810)$，$[140, 810]$ 分别为（　　）.

A. 10，11220　　B. 15，11220　　C. 10，11340

D. 15，11340　　E. 以上答案均不正确

解　由算术基本定理 $140=2\times2\times5\times7$，$810=2\times3\times3\times3\times3\times5$（从最小质数开始，依次分解），

从而 $(140,810)=2\times5=10$，$[a,b]=2\times2\times3\times3\times3\times3\times5\times7=11340$.

答案是 C.

例 1.18　设 a，b 是自然数，$a+b=33$，最小公倍数 $[a,b]=90$，则最大公因数 $(a,b)=($　　$)$.

A. 15　　B. 9　　C. 6　　D. 3　　E. 1

解　设 $(a,b)=m$，则 m 整除 a，b，$a+b$ 及 $[a,b]$，从而 m 是33，90 的公因数.

因此 $m=1$ 或 $m=3$，若 $m=1$，由 $ab=(a,b)[a,b]=90$ 及 $a+b=33$，

则 $a=30$，$b=3$ 或 $a=3$，$b=30$ 与 $(a,b)=1$ 矛盾，

所以 $(a,b)=3$，事实上 $a=18$，$b=15$ 或 $a=15$，$b=18$.

答案是 D.

例 1.19　（条件充分性判断）$|m-n|=15$.

（1）若 m，n 为质数，且满足 $5m+7n=129$.

（2）若 m，n 为正整数，m，n 的最大公因数为15，且 $3m+2n=180$.

解　由条件（1），m，n 为一奇一偶，若 $m=2$，则 $n=17$，

若 $n=2$，则 $m=23$，因此条件（1）不充分.

由条件（2），m 必为偶数，得 $m=30$，$n=45$.

从而条件（2）是充分的.

答案是 B.

2　有理数

主要考点为有理式的计算.

例 2.1　$\frac{1}{18}+\frac{1}{54}+\frac{1}{108}+\cdots+\frac{1}{990}=($　　$)$.

A. $\frac{11}{98}$　　B. $\frac{13}{98}$　　C. $\frac{10}{99}$　　D. $\frac{13}{99}$　　E. $\frac{20}{97}$

解　原式 $=\frac{1}{3\times6}+\frac{1}{6\times9}+\frac{1}{9\times12}+\cdots+\frac{1}{30\times33}$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{12}\right)+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{30}-\frac{1}{33}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{27}-\frac{1}{30}+\frac{1}{30}-\frac{1}{33}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{33}\right)=\frac{10}{99}$$

答案是 C.

例 2.2 $\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+2015}=$ ( ).

A. $\frac{1007}{1008}$ B. $\frac{1003}{1008}$ C. $\frac{1235}{1896}$ D. $\frac{1027}{1896}$ E. $\frac{2005}{2016}$

解 原式 $=\frac{1}{\frac{2\times(1+2)}{2}}+\frac{1}{\frac{3\times(1+3)}{2}}+\cdots+\frac{1}{\frac{2015\times(1+2015)}{2}}$

$$=2\left(\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{2015\times2016}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2015}-\frac{1}{2016}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2016}\right)$$

$$=\frac{1007}{1008}$$

注：原式中每一项的分母都是等差数列.

答案是 A.

例 2.3 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2016}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2015}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2016}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2015}\right)=$ ( ).

A. $\frac{1}{2014}$ B. $\frac{1}{2013}$ C. $\frac{1}{2015}$ D. $\frac{1}{2016}$ E. $\frac{1}{2012}$

解 令 $a=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2016}$，$b=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{2015}$

则 原式 $=a(1+b)-(1+a)b=a-b=\frac{1}{2016}$.

答案是 D.

例 2.4 $\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{49}-\frac{1}{50}\right)\div\left(\frac{1}{26}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{50}\right)=$ ( ).

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{3}{5}$ E. 1

解 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{49}-\frac{1}{50}$

$$=1+\left(\frac{1}{2}-1\right)+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\frac{1}{49}+\left(\frac{1}{50}-\frac{1}{25}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{50}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{25}\right)$$

$=\frac{1}{26}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{50}$

从而　原式 $=1$.

答案是 E.

例 2.5　（条件充分性判断）$x=-1$ 成立.

（1）$x=\frac{1-2+3-4+5-6+\cdots+2009-2010+2011-2012}{(2012+2010+2008+\cdots+4+2)-(2011+2009+2007+\cdots+3+1)}$.

（2）$x=1999\times20002000-2000\times19991999$.

解　由条件（1），分母 $=(2012-2011)+(2010-2009)+\cdots+(4-3)+(2-1)=1006$,

分子 $=(1-2)+(3-4)+\cdots+(2011-2012)=-1006$,

从而 $x=-1$，即条件（1）充分.

由条件（2），$x=1999\times2000\times10001-2000\times1999\times10001=0$.

即条件（2）不充分.

答案是 A.

例 2.6　（条件充分性判断）$S=\frac{8}{27}$ 或 $S=5151$.

（1）$S=1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+99^2-100^2+101^2$.

（2）$S=\frac{2^3-4^3+6^3-8^3+10^3-12^3}{3^3-6^3+9^3-12^3+15^3-18^3}$.

解　由条件（1），

$$\begin{aligned}S&=1+(3^2-2^2)+(5^2-4^2)+\cdots+(101^2-100^2)\\&=1+2+3+4+5+\cdots+100+101\\&=\frac{101\times102}{2}=5151\end{aligned}$$

由条件（2），$S=\frac{2^3(1-2^3+3^3-4^3+5^3-6^3)}{3^3(1-2^3+3^3-4^3+5^3-6^3)}=\frac{8}{27}$

从而条件（1）和条件（2）都充分.

答案是 D.

3　实数及其性质

一、两个考点

（一）实数的性质

1. 对任意实数 a，b，有 $a+b$，$a-b$，ab，$\frac{a}{b}$（$b\neq0$）都是实数.

2. 对于任意有理数 a，b，有 $a+b$，$a-b$，ab，$\frac{a}{b}$（$b\neq0$）都是有理数.