现代数学基础丛书 167

Lipschitz边界上的奇异积分与Fourier理论

钱 涛 李澎涛 著

科学出版社

中国科学院科学出版基金资助出版

现代数学基础丛书 167

Lipschitz 边界上的奇异积分与 Fourier 理论

钱 涛 李澎涛 著

科学出版社
北 京

内 容 简 介

本书系统地介绍了20世纪80年代以来发展起来的Lipschitz曲线和曲面上的奇异积分和 Fourier 理论. 包括: Lipschitz 曲线与曲面上的具有全纯核的奇异积分算子代数、同类型的分数次积分与微分、曲线与曲面上的Fourier 乘子理论及其应用, 等等. 本书的内容涉及调和分析、Clifford 分析、单复变与多复变理论等方面. 首先介绍 Lipschitz 曲线上的奇异积分与Fourier 乘子理论及其应用. 然后转入高维 Lipschitz 曲面上 Fourier 乘子和奇异积分理论, 重点阐述如何利用多复变, Clifford 分析和调和分析的方法建立高维理论, 包括 Fueter 定理的推广及应用、Clifford 鞅、球面及其Lipschitz 扰动上的奇异积分及 Fourier 乘子理论. 阅读本书需要具备大学高年级的数学基础.

本书可供高等院校数学系高年级本科生、研究生、相关专业的教师、科研工作者阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

Lipschitz 边界上的奇异积分与 Fourier 理论/钱涛, 李澎涛著. —北京: 科学出版社, 2017.2

(现代数学基础丛书)

ISBN 978-7-03-051698-5

Ⅰ. ①L… Ⅱ. ①钱… ②李… Ⅲ.①奇异积分②傅里叶分析 Ⅳ. ①O172.2②O174.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 022818 号

责任编辑: 王丽平 / 责任校对: 彭 涛

责任印制: 张 伟 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

北京东华虎彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 2 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5

2017 年 2 月第一次印刷 印张: 19 1/4

字数: 368 000

定价: 118.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

献给敬爱的导师及挚友

Alan McIntosh (1942–2016)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用。许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益。

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了10余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着。1978年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会。当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述。据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约40卷，后者则逾80卷。它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用。

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍。既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新。

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科。我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域。

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动。它获得了广大读者的喜爱。我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献。

杨　乐

2003年8月

前言

本书系统地介绍自 20 世纪 80 年代以来, 由著名的 CMcM (Coifman-McIntosh-Meyer) 定理引发而发展起来的 Lipschitz 图像上的奇异积分与 Fourier 乘子理论, 阐述该理论的基本架构, 本质思想和主要成果. 同时也为国内外广大数学专业科研人员和研究生了解该方面的研究进展提供参考. 本书假定读者具备一定实分析与泛函分析的知识.

Lipschitz 曲面上 Fourier 乘子问题的提出具有深刻的调和分析和偏微分方程的背景. 在研究二阶椭圆算子的边值问题时, 产生了 Cauchy 积分在 Lipschitz 曲线上的 L^2 有界性问题. 由于 Lipschitz 曲线上的 Cauchy 奇异积分核的非线性及非光滑性, 所对应的奇异积分算子的研究长期以来存在本质上的困难. 直到 1977 年, Calderón 用复分析的方法首先证明了, 在曲线的 Lipschitz 常数很小的情况下, Cauchy 奇异积分算子在 $L^2(\gamma)$ 上是有界的. 对于一般情形, R. Coifman, A. McIntosh 和 Y. Meyer 用多线性算子方法突破了 Lipschitz 常数很小这一限制, 从而证明了在一般的 Lipschitz 曲线 γ 上 Cauchy 奇异积分算子的 $L^2(\gamma)$ 有界性. 在 Lipschitz 曲线上算子的 L^2 有界性是核心的问题. 事实上, 应用传统的调和分析方法, 该奇异积分算子的 $L^p, 1<p<\infty$, 有界性是 L^2 有界性的直接推论.

在高维空间的中相应的问题是 Lipschitz 曲面 Σ 上 Cauchy 奇异积分算子的 $L^p(\Sigma)$ 有界性. 维数的增加要求采用新的方法. 在 Euclidean 空间上引入一个 Cauchy 复结构的最直接有效的方法是将其嵌入 Clifford 或 Hamilton 四元数空间. C. Li, A. McIntosh 和 S. Semmes 的文章 [49] 及 G. Gaudry, R-L. Long (龙瑞麟) 和 T. Qian (钱涛) 的文章 [31] 各自独立地证明了 Lipschitz 图像上的具有全纯核的奇异积分算子的 L^2 有界性. 上述两文各自将文献 [11] 的一个证明推广到高维的情况. 本书选用 Gaudry 等人文章中的方法.

卷积奇异积分算子和 Fourier 乘子之间存在着一一对应的关系. 1994 年, C. Li, A. McIntosh 和 T. Qian 在文献 [48] 中建立了 Lipschitz 曲面上核与乘子的对应关系, 并利用该关系建立了该类曲面上的 Dirac 算子的 Cauchy-Dunford 泛函演算. 该演算具有 Cauchy-Dunford、全纯核奇异积分以及有界全纯 Fourier 乘子三种等价形式. 自 1996 年起, 钱涛及其合作者开始考虑各种维数的球面及环面 Lipschitz 扰动上的相应理论, 也称为星形曲面上的理论. 对于四元数和一般维数球面的情形, 利用 Fueter 定理及其高维推广形式, 作者之一在文献 [70, 72] 中得到了定义在星形 Lipschitz 曲面上的有界全纯 Fourier 乘子与全纯核的对应关系, 从而建立了该

类 Fourier 乘子与奇异积分算子以及球面 Dirac 算子的 Cauchy-Dunford 泛函演算之间的恒等关系, 以及它们的有界性. 对于四元数 Fueter 定理的 n 维推广, n 为奇数情形是由 M. Sce 在文献 [81] 中得到的, n 为偶数时 Fueter 定理的推广则由钱涛在文献 [71] 中得到, 后者运用 Fourier 乘子的方法对分数阶 Laplace 算子进行定义. 迄今, Fueter 定理及其高维形式的运用是处理高维球面扰动上的奇异积分理论的唯一方法. 其发现及运用是数学中的艺术, 是 Clifford 型的"从单位圆谈起"(参见文献 [36]). Fueter 定理的进一步推广及 Fueter 定理的逆定理有独立的兴趣及应用, 读者可参考 [73].

本书的主要内容分为三部分, 第一部分包括第 1 章和第 2 章, 主要介绍 Lipschitz 曲线上的 Fourier 乘子理论. 第 1 章介绍一维无穷 Lipschitz 图像上的 Fourier 乘子的有界性、奇异积分和泛函演算等理论. 第 2 章介绍单位圆的 Lipschitz 扰动上的类似理论.

第二部分包括第 3 章至第 5 章. 在该部分中, 我们系统地介绍用 Clifford 分析的手段处理 Lipschitz 曲面上的奇异积分和 Fourier 乘子. 在第 3 章中, 出于自封闭性的考虑, 我们给出 Clifford 分析中的一些基本事实和必要的背景知识, 包括 Dirac 算子、锥形区域上的 Fourier 变换和 Clifford 解析函数. 同时作为后面处理星形 Lipschitz 曲面上的全纯 Fourier 乘子的预备工作, 我们介绍 Futuer 定理在高维中的推广. 在第 4 章中, 我们将使用 Clifford 鞅这一工具, 证明一个鞅形式下的 $T(b)$ 定理, 从而可以推出 Lipschitz 曲面上的 Cauchy 奇异积分算子的 L^2 有界性, 正如我们在上边所指出的, 对于本节的主要结果, 存在一个平行的、使用不同方法的证明, 有兴趣的读者可以参考文献 [49]. 第 5 章介绍 Lipschitz 曲面上的有界全纯 Fourier 乘子与曲面上的奇异积分算子之间的对应关系, 以及与该类算子相关的球面 Dirac 算子的 H^∞ 泛函演算. 通过本章, 可以看到锥形区域上的 Fourier 变换和 Clifford 全纯函数在该理论建立的过程中所起的重要的作用.

第三部分包括第 6 章至第 8 章, 介绍星形 Lipschitz 曲面上的全纯 Fourier 乘子理论. 第 6 章基于第 3 章中得到的 Fueter 定理的高维推广建立星形 Lipschitz 曲面上的有界全纯 Fourier 乘子理论, 包括 Fourier 乘子的核函数估计、奇异积分表示以及球面 Dirac 算子的 H^∞ 泛函演算等内容. 第 7 章包含两位作者最近对星形 Lipschitz 曲面上无界全纯 Fourier 乘子研究的一些新成果. 这部分研究联系到近十年以来在 Clifford 分析领域的一些新进展, 包括双曲 Clifford 代数研究的深入, 以及与之对应的所谓 "Photogenic Cauchy 变换" 的出现, 使得对无界全纯 Fourier 乘子的研究具有理论上的必要性. 该类 Fourier 乘子的一个实例是星形 Lipschitz 曲面上 Dirac 算子的分数次积分与微分. 该研究对于星形 Lipschitz 曲面上微分算子的边值问题具有一定的意义. 第 8 章用多复变量分析将第 6 章和第 7 章中所建立的全纯 Fourier 乘子理论推广到高维环面及高维复球面. 特别是, 在复球面上我们

将龚昇的 Cauchy 型奇异积分结果 (文献 [34]) 推广为一族具有全纯核的奇异积分的泛函演算. 我们也得到相应的分数次积分及微分的结果.

Lipschitz 曲线与曲面是 Fourier 分析所能应用于其中的且具有广泛及优美理论的最一般的曲线与曲面. 在本书中, 我们对 Lipschitz 曲线和曲面上的全纯 Fourier 乘子理论作了详细全面的介绍. 虽然不同场合的理论呈现不同的面貌, 处置技巧亦可迥然不同, 即都存在有奇异积分算子代数与 Fourier 乘子理论以及 Dirac 算子的泛函演算. 本书所阐述的在相当大的程度上是 Alan McIntosh 的理论.

本书的写作和出版得到了文兰院士和周向宇院士的大力支持，两位作者对他们表示由衷的感谢. 澳门大学科技学院和青岛大学数学与统计学院的部分教师和研究生协助作者绘制了本书中的插图，作者在此对他们一并表示感谢.

作　者

2016 年 1 月 20 日

目 录

第 1 章　一维无穷 Lipschitz 图像上的奇异积分与 Fourier 乘子

本章的主要内容与调和分析和算子理论都有紧密的联系. 令 γ 表示复平面 $\mathbb{C}$ 上的Lipschitz 曲线:

$$\gamma = \left\{x + ig(x) \in \mathbb{C}:\ x \in \mathbb{R}\right\},$$

其中 g 是一个满足条件: $\|g'\|_\infty \leqslant N < \infty$ 的 Lipschitz 函数. 我们将证明 γ 上卷积奇异积分算子的 L^p 有界性.

本章的主要内容是基于 A. McIntosh 和钱涛在 [58] 中建立的曲线上的 Fourier 乘子理论和 ω 型算子的 H^∞ 泛函演算理论. 粗略地讲, 上述 ω 型算子可以表示为 $b(D_\gamma)$, 其中 D_γ 为 γ 上的微分算子, b 为定义在某个扇形区域 S_ν^0, $\nu > \arctan N$ 上的有界全纯函数. 在假定 g 是有界的这一额外条件之下, A. McIntosh 和钱涛研究了 γ 上一类更一般的 Fourier 乘子. 相关结果见 [56] 和 [57].

对于 Lipschitz 图像上奇异卷积积分算子的有界性, 存在多种不同的证明. 在本章中, 我们采用 McIntosh 和钱涛在有关文献中所给出的证明. 该证明主要是依赖于定义在锥形区域上的 ω 型算子的平方估计. 主要思路如下, 首先证明 ω 型算子的平方估计等价于其对偶算子的反向平方估计 (定理 1.2.1). 然后证明, 如果一个算子 T 满足平方估计以及反向平方估计, 则对定义在锥形区域上的有界全纯函数 b, 该算子的有界全纯泛函演算 $b(T)$ 是有界的, 见定理 1.2.3.

1.1　Lipschitz 曲线上的卷积与微分

本节中, $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 分别表示复数域和实数域. 我们用 γ 表示如下的定义的 Lipschitz 曲线:

$$\gamma = \left\{x + \mathrm{i}g(x) \in \mathbb{C},\ \text{其中} g \text{ 是一个 Lipschitz 函数, 且满足 } \|g'\|_\infty \leqslant N < \infty\right\}.$$

我们将使用如下的复值函数空间.

定义 1.1.1　(i) 令 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $L^p(\gamma)$ 表示如下函数 $u: \gamma \to \mathbb{C}$ 的等价类构成的空间: u 对测度 $|dz|$ 可测, 且满足

$$\|u\|_p = \left(\int_\gamma |u(z)|^p |dz|\right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

或

$$\|u\|_\infty = \text{ess-}\sup|u(z)| < \infty,$$

其中 ess-sup 表示本性上确界.

(ii) $C_0(\gamma)$ 表示 γ 上在 ∞ 处趋于 0 的连续函数组成的空间. 该空间的范数定义为

$$\|u\|_\infty = \sup_{z\in\gamma}|u(z)|.$$

对 $1\leqslant p\leqslant\infty$, 令 $p' = \dfrac{p}{p-1}$. 定义 $L^p(\gamma)$ 之间的对偶关系如下:

$$\langle u,v\rangle = \int_\gamma u(z)v(z)dz.$$

可以证明, $(L^p(\gamma), L^{p'}(\gamma))$ 是对偶的 Banach 空间. 特别地, 当 $p=1$ 时, $(L^1(\gamma), C_0(\gamma))$ 是对偶的 Banach 空间. 进而,

$$\|u\|_p = \sup\left\{|\langle u,v\rangle|, v\in L^{p'}(\gamma), \|v\|_{p'}=1\right\}$$

和

$$\|u\|_1 = \sup\left\{|\langle u,v\rangle|, v\in C_0(\gamma), \|v\|_\infty=1\right\}.$$

假定 ϕ 是定义在 $\mathbb{C}$ 中一个包含 $\Gamma=\{z-\xi,\ z\in\gamma,\xi\in\gamma\}$ 的子集上的函数, u 是 γ 上的可测函数. 若 $\phi(z-\cdot)u(\cdot)\in L^1(\gamma)$, 则在 z 处, u 和 ϕ 的卷积定义为

$$(\phi * u)(z) = \int_\gamma \phi(z-\xi)u(\xi)d\xi.$$

定理 1.1.1 令 $1\leqslant p\leqslant\infty$. 假定 $u\in L^p(\gamma)$, 且对几乎所有的 $z\in\gamma$, 均有 $\phi(\cdot-z)\in L^1(\gamma)$, 则

$$\|\phi * u\|_p \leqslant \sup_{z\in\gamma}\left\{\int_\gamma|\phi(z-\xi)||d\xi|\right\}^{\frac{1}{p'}}\sup_{\xi\in\gamma}\left\{\int_\gamma|\phi(z-\xi)||dz|\right\}^{\frac{1}{p}}\|u\|_p, \tag{1-3}$$

其中 $\dfrac{1}{p'} = 1-\dfrac{1}{p}$.

证明 首先注意到, 对几乎处处的 $z\in\gamma$, $\phi(z-\cdot)u(\cdot)$ 是可测的, 则如果 $1<p<\infty$,

$$\begin{aligned}\|\phi * u\|_p &\leqslant \left\{\int_\gamma\left\{\int_\gamma|\phi(z-\xi)u(\xi)||d\xi|\right\}^p|dz|\right\}^{1/p}\\ &\leqslant \left\{\int_\gamma\left\{\int_\gamma|\phi(z-\xi)||d\xi|\right\}^{p/p'}\left\{\int_\gamma|\phi(z-\xi)||u(\xi)|^p|d\xi|\right\}|dz|\right\}^{1/p}\end{aligned}$$

$$\leqslant \sup_{z\in\gamma}\left\{\int_\gamma |\phi(z-\xi)||d\xi|\right\}^{1/p'}\left\{\int_\gamma\int_\gamma |\phi(z-\xi)||u(\xi)|^p|d\xi||dz|\right\}^{1/p}$$
$$\leqslant \sup_{z\in\gamma}\left\{\int_\gamma |\phi(z-\xi)||d\xi|\right\}^{1/p'}\sup_{\xi\in\gamma}\left\{\int_\gamma\int_\gamma |\phi(z-\xi)||dz|\right\}^{1/p}\|u\|_p.$$

对 $p=1$ 和 $p=\infty$ 两种情况，可以类似地证明. 实际上, 对 $p=1$,

$$\|\phi*u\|_1\leqslant\left\{\int_\gamma\left\{\int_\gamma|\phi(z-\xi)u(\xi)||d\xi|\right\}|dz|\right\}$$
$$\leqslant\sup_{\xi\in\gamma}\left\{\int_\gamma\int_\gamma|\phi(z-\xi)||dz|\right\}\|u\|_1.$$

当 $p=\infty$,

$$\|\phi*u\|_\infty\leqslant\sup_{z\in\gamma}\left\{\int_\gamma|\phi(z-\xi)u(\xi)||d\xi|\right\}$$
$$\leqslant\sup_{z\in\gamma}\left\{\int_\gamma|\phi(z-\xi)||d\xi|\right\}\|u\|_\infty.$$ □

令 $w=\arctan N$, S_w 表示闭的扇形区域(图 1-1)

$$S_w=\Big\{z\in\mathbb{C},\ |\arg z|\leqslant w \text{ 或 } |\arg(-z)|\leqslant w\Big\}\cup\Big\{0\Big\}.$$

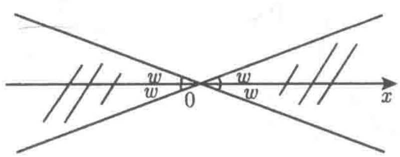

图 1-1 S_w

当 $\mathrm{Im}\lambda>0$ 时, 令

$$\phi_\lambda(z)=\begin{cases} ie^{i\lambda z}, & \mathrm{Re}z>0,\\ 0, & \mathrm{Re}z\leqslant 0.\end{cases} \tag{1-1}$$

当 $\mathrm{Im}\lambda<0$ 时, 令

$$\phi_\lambda(z)=\begin{cases} -ie^{i\lambda z}, & \mathrm{Re}z<0,\\ 0, & \mathrm{Re}z\geqslant 0.\end{cases} \tag{1-2}$$

我们有如下定理.

定理 1.1.2　假定 $\lambda \in S_w$, 则定义在 γ 上的卷积算子

$$R_\lambda u = \phi_\lambda * u$$

为 $L^p(\gamma), 1 \leqslant p < \infty$, 和 $C_0(\gamma)$ 上的有界算子, 并且对两种情况均有

$$\|R_\lambda\| \leqslant \left\{\mathrm{dist}(\lambda, S_w)\right\}^{-1}.$$

进而, 对 $u \in L^p(\gamma), v \in L^{p'}(\gamma), 1 \leqslant p \leqslant \infty$ (或对 $u \in L^1(\gamma)$, $v \in C_0(\gamma)$),

$$\langle R_\lambda u, v\rangle = \langle u, R_{-\lambda} v\rangle.$$

证明　本定理的证明只需直接应用定理 1.1.1. 分别用 $\gamma^-(z)$ 和 $\gamma^+(z)$ 表示下列曲线:

$$\gamma^-(z) = \{\xi \in \gamma,\ \mathrm{Re}\xi \leqslant \mathrm{Re}z\}$$

和

$$\gamma^+(z) = \{\xi \in \gamma,\ \mathrm{Re}\xi > \mathrm{Re}z\}.$$

对 $u \in L^p(\gamma)$ 或 $C_0(\gamma)$, 当 $\lambda \notin S_w$ 时, $R_\lambda u$ 具有如下精确定义

$$R_\lambda u(z) = \begin{cases} i\displaystyle\int_{\gamma^-(z)} e^{i\lambda(z-\xi)} u(\xi) d\xi, & \mathrm{Im}\lambda > N|\mathrm{Re}\lambda|, \\ -i\displaystyle\int_{\gamma^+(z)} e^{i\lambda(z-\xi)} u(\xi) d\xi, & \mathrm{Im}\lambda < -N|\mathrm{Re}\lambda|, \end{cases}$$

若 $\lambda \notin \gamma$, 则 $|\tan\lambda| \leqslant \tan w$. 不失一般性, 设 $\mathrm{Im}\lambda > N|\mathrm{Re}\lambda|$ 和 $z \in \gamma$, 则由公式 (1-1),

$$\int_\gamma |\phi_\lambda(z-\xi)||d\xi| = \int_{\gamma^-(z)} |e^{i\lambda(z-\xi)}||d\xi| \leqslant \{\mathrm{dist}(\lambda, S_w)\}^{-1}. \qquad \square$$

令 u 是 γ 上的一个 Lipschitz 函数, u 的导数定义为

$$u'(z) = \frac{d}{dz}\Big|_\gamma u(z) = \lim_{h \to 0, z+h \in \gamma} \frac{u(z+h) - u(z)}{h}.$$

通过一个简单的运算可以得到

$$\frac{d}{dz}\Big|_\gamma u(x + ig(x)) = (1 + ig'(x))^{-1} \frac{d}{dx} u(x + ig(x)).$$

利用对偶, $D_{\gamma,p}$ 可以定义为 $L^p(\gamma)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 和 $C_0(\gamma)$ 上的闭线性算子, 且在 $L^p(\gamma)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 和 $C_0(\gamma)$ 中具有最大的定义域 $\mathbf{D}(D_{\gamma,p})$. 对 γ 上所有的紧支集的 Lipschitz 函数 v,

$$\langle D_{\gamma,p} u, v\rangle = \langle u, iv'\rangle.$$

可以在 γ 上直接证明 $D_{\gamma,p}$ 的下列性质, 亦可以通过 $L^p(\mathbb{R})$ 或 $C_0(\mathbb{R})$ 上的相应算子 D_p 得到.

定理 1.1.3 (i) $D_{\gamma,p}u(x+ig(x)) = (1+ig'(x))^{-1}D_pu(x+ig(x))$ 且

$$\mathbf{D}(D_{\gamma,p}) = \Big\{u,\ u(\cdot+ig(\cdot)) \in \mathcal{D}(D_p)\Big\} = \begin{cases} W_p^1(\gamma), 1 \leqslant p \leqslant \infty, \\ \Lambda_0(\gamma) = \{u \in C_0(\gamma),\ u' \in C_0(\gamma)\}\ p=0. \end{cases}$$

除 $p=\infty$ 之外, $\mathbf{D}(D_p)$ 在 $L^p(\gamma)$ (或 $C_0(\gamma)$) 中是稠密的. 进而, 对所有的 p, γ 上紧支集的 Lipschitz 函数空间在范数 $\|u\|_p + \|D_{\gamma,p}\|_p$ (或 $\|u\|_\infty + \|D_{\gamma,0}u\|_\infty$) 的意义下是 $\mathbf{D}(D_{\gamma,p})$ 的稠密子空间.

(ii) 若 $1 \leqslant p \leqslant \infty, 1 \leqslant p' \leqslant \infty, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, 则

$$\langle D_{\gamma,p}u,\ v\rangle = -\langle u, D_{\gamma,p'}v\rangle, \quad u \in W_p^1(\gamma),\ v \in W_{p'}^1(\gamma),$$

以及

$$\langle D_{\gamma,1}u,\ v\rangle = -\langle u, D_{\gamma,0}v\rangle, \quad u \in W_1^1(\gamma),\ v \in \Lambda_0(\gamma).$$

此外, 在 $D_{\gamma,p}$ 和 $D_{\gamma,1}$ 的最大定义域上, 上述等式均成立.

(iii) 若 $\lambda \notin S_w$, 则对所有的 $u \in \mathbf{D}(D_{\gamma,p})$ 和在相应的对偶空间中的 v,

$$\langle -(D_{\gamma,p}+\lambda I)u, R_\lambda v\rangle = \langle u, v\rangle.$$

因而, λ 不属于 $D_{\gamma,p}$ 的谱,

$$-(D_{\gamma,p}+\lambda I)^{-1} = R_\lambda.$$

而且, 在 $L^p(\gamma)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 或 $C_0(\gamma)$ 中,

$$\|(D_{\gamma,p}+\lambda I)^{-1}\| \leqslant \{\mathrm{dist}(\lambda, S_w)\}.$$

1.2 ω 型算子的平方估计

首先回顾有界线性算子的一些事实. 假定 T 是一个 Banach 空间 X 上的有界线性算子. T 的预解集定义为

$$p(T) = \Big\{z \in \mathbb{C},\ (T-zI) \text{ 是 1-1, 到上的, 且} (T-zI)^{-1} \text{ 是有界的}\Big\}.$$

T 的谱为 $\sigma(T)=\mathbb{C}\backslash p(T)$. 可以看出, $\sigma(T)$ 是球 $\mathbf{B}(0,\|T\|)$ 的一个非空紧子集. 预解算子 $R_\lambda=(T-\lambda I)^{-1}$ 在 $p(T)$ 中全纯地依赖于 λ, 且满足

$$R_\lambda R_\mu=(\lambda-\mu)^{-1}(R_\lambda-R_\mu).$$

对函数 f, 有多种方式定义代数 $f(T)$. $f(T)$ 应满足如下关系:

(i) $c_1f_1(T)+c_2f_2(T)=\{c_1f_1+c_2f_2\}(T)$,

(ii) $(f_1f_2)(T)=f_1(T)f_2(T)$.

我们列举几种定义 $f(T)$ 的方法, 其中范数 $\|f(T)\|$ 满足不同的估计.

(a) 若 $T=\int\lambda \mathrm{d}E_\lambda$ 是 Hilbert 空间 H 上的一个自伴算子, 则 $f(T)=\int f(\lambda)dE_\lambda$, 且对定义在 $\sigma(T)$ 上的所有有界 Borel 函数 f, $\|f(T)\|\leqslant \text{ess-sup}(f)$, 其中 ess-sup 表示对应于谱测度的本性上界.

(b) 令 $X=L^p(\gamma)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, 且对某些 $L^\infty(\gamma)$ 函数 w, 令 $Tu(z)=w(z)u(z)$. 则 $\sigma(T)=\text{ess-range}(w)$, 且若 f 是一个定义在 $\sigma(T)$ 上的有界 Borel 函数, $f(T)u(z)=f(w(z))u(z)$. 进而, $\|f(T)\|=\|f\|_\infty$.

(c) 若对所有的 $|z|<r$, $f(z)=\sum c_iz^i$ 以及 $\|T\|<r$, 则 $f(T)=\sum c_iT^i$ 定义了一个有界线性算子, 且

$$\|f(T)\|\leqslant\sum c_i\|T\|^i<\infty.$$

(d) 假定 f 在一个包含 $\sigma(T)$ 的开集 Ω 上是全纯的且 δ 是一个包含 $\sigma(T)$ 的路径. 令

$$f(T)=(2\pi\mathrm{i})^{-1}\int_\delta(T-\lambda I)^{-1}f(\lambda)\mathrm{d}\lambda.$$

由于 $(T-\lambda I)^{-1}$ 全纯地依赖于 λ, 积分与具体的路径无关.

虽然只有在例子 (a) 和 (c) 中, 相应的公式给出一个 $\|f(T)\|$ 的好的估计, 但是性质 (i) 和 (ii) 对每种情况都成立. 因而通过多种方法定义所得到的是同一个 $f(T)$. 对于无界算子 D_γ, 以下我们转而定义并研究 $f(D_\gamma)$.

Banach 空间 X 上的闭线性算子 T 是一个从线性子空间 $D(T)$ 到 X 的线性映射, 其图像 $\{(u,Tu),\ u\in D(T)\}$ 是乘积空间 $X\times X$ 的一个闭子空间. 同样地, T 的谱 $\sigma(T)$ 和预解集 $p(T)$ 分别定义如下:

$$\begin{aligned}&p(T)=\left\{z\in\mathbb{C},\ (T-zI)\ \text{是 1-1, 到上的, 且}(T-zI)^{-1}\ \text{有界}\right\},\\&\sigma(T)=\mathbb{C}\setminus p(T),\\&R_\lambda=(T-\lambda I)\ \text{全纯地依赖于}\lambda\in p(T).\end{aligned}$$