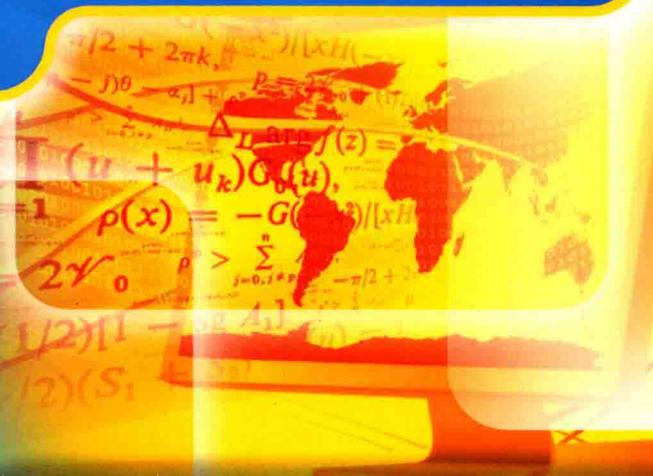
普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等院校规划教材·计算机系列

计算机数学基础

第3版

祁文青　邓丹君　编著



电子课件下载网址 www.cmpedu.com

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
高等院校规划教材·计算机系列

计算机数学基础

第3版

祁文青　邓丹君　编著

机械工业出版社

本书介绍线性代数和离散数学在计算机应用中所涉及的基本内容，全书共分6章，主要内容包括行列式、矩阵、线性方程组、集合论初步、图论和数理逻辑初步。

书中概念论述清楚，讲解通俗易懂，着重于概念的应用。各章均配有习题并在附录中给出了习题参考答案，有助于读者加深对概念的理解。

本书既可作为应用型本科和高职高专院校计算机专业课程的教材，也可供有关工程技术人员参考。

本书配套授课电子课件，需要的教师可登录 www. cmpedu. com 免费注册、审核通过后下载，或联系编辑索取（QQ：1239258369，电话：010 - 88379739）。

图书在版编目(CIP)数据

计算机数学基础/祁文青，邓丹君编著．—3版．—北京：机械工业出版社，2016. 8

高等院校规划教材·计算机系列

ISBN 978-7-111-54605-4

Ⅰ．①计…　Ⅱ．①祁…　②邓…　Ⅲ．①电子计算机-数学基础-高等学校-教材　Ⅳ．①TP301. 6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第195483号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号　邮政编码　100037)

策划编辑：鹿　征　　责任编辑：鹿　征

责任校对：张艳霞　　责任印制：李　洋

三河市国英印务有限公司印刷

2017年1月第3版·第1次印刷

184mm×260mm·10. 25印张·240千字

0001-3000册

标准书号：ISBN 978-7-111-54605-4

定价：29. 00元

第 3 版前言

对于高校人才培养而言，必要的数学知识是培养学生计算思维以及学习后续课程必不可少的基础。因此，作者针对应用型本科和高职高专计算机理论教育，以必要、够用为原则，精选教学内容，将传统“线性代数”和“离散数学”课程进行整合，强调基本概念的论述和应用，对部分定理和结论的推演和证明进行简化，每章后附有代表性习题，题量丰富，难度由浅入深，使之好学易教。

全书共分 6 章，包括：行列式（行列式的定义、性质及其行列式值的计算）；矩阵（矩阵的基本概念、运算及其应用）；线性方程组（线性方程组解的一般理论）；集合论初步（集合的基本概念和运算、关系及其性质）；图论（图的基本概念、树及其性质）；数理逻辑初步（命题逻辑、谓词逻辑）。

根据学科发展和读者意见，本书在原有版本的基础上进行了修订，并增加了习题量。本书主要面向应用型本科和高职高专院校计算机专业学生，由于其通俗易懂，也可用作非专业学生的自修课本。

由于编者水平有限，书中难免存在不当和疏漏之处，恳请读者原谅，并提出宝贵意见。

编　者

第 2 版前言

计算机科学的理论学科形态是基于数学的，所以，数学是计算机科学的基础。计算机科学与技术学科中不仅许多理论是用数学描述的，而且许多技术也是用数学描述的。以线性代数和离散数学为代表的应用数学是描述学科理论、方法和技术的主要工具。

线性代数作为工程数学的重要分支，在计算机领域有相当广泛的应用。例如，矩阵在计算机图形学中曲线曲面的构造和图像的平移、镜像、转置、缩放等几何变换中有广泛的应用。又如，将各种实际问题的多个变量之间的关系线性化，再利用计算机对线性化了的问题进行求解，线性方程组理论正是解决这类问题的有力工具。计算机图形学、计算机辅助设计、密码学、虚拟现实等技术无不以线性代数为其理论和算法基础。

计算机处理的对象与传统的研究对象有明显的区别：分析传统的研究对象得到的解决问题的方案是连续的；而计算机处理的对象是离散的，因而人们称研究这些对象的数学分支为“离散数学”。离散数学包含集合论、逻辑学、代数学、图论和组合学等。任何一个可在计算机上运行的程序，其对应的计算方法首先必须是构造性的，数据表示必须离散化，计算操作必须使用逻辑或代数的方法进行，这些都应体现在算法和程序之中。此外，到目前为止，算法的正确性、程序的语义及其正确性的理论基础仍然是数理逻辑。

本书前 3 章是线性代数的基本内容，通过这 3 章的学习，可以使读者掌握行列式、矩阵、线性方程组等方面的基本概念、理论和运算技能，为学习计算机相关课程奠定必要的数学基础。后 3 章主要讲解有关集合论、图论、数理逻辑的内容，通过这部分内容的学习，可以使读者掌握处理离散结构的描述工具和方法，为计算机专业理论课的学习作好准备。

本书由祁文青、纪鹏、邓丹君、谢晋共同编写完成。

由于作者水平有限，书中难免存在不当和疏漏之处，恳请读者批评指正。

本书免费提供电子教案，读者可到 www. cmpedu. com 下载。

编　者

目　　录

第1章 行 列 式

随着科学技术的发展，人们不仅要研究单个变量之间的关系，还要进一步研究多个变量之间的关系，各种实际问题在大多数情况下可以线性化，而由于计算机的发展，线性化了的问题又可以计算出来，线性代数正是解决这些问题的有力工具. 行列式是线性代数的一个重要组成部分，是研究矩阵、线性方程组的重要工具. 本章介绍了 n 阶行列式的定义、性质及计算方法，最后给出了它的一个简单应用——克莱姆法则.

1.1 n 阶行列式

线性方程组理论是本书讨论和研究的重要内容. 线性方程组是未知量次数为 1 的一类特殊方程组，其一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1-1}$$

式中，a_{ij}表示第 i 个方程第 j 个未知量的系数，x_j表示第 j 个未知量，b_i表示第 i 个方程的常数项，$i=1, 2, \cdots, m$，$j=1, 2, \cdots, n$.

n 阶行列式的概念来源于求解方程个数 m 等于未知量个数 n 的线性方程组.

1.1.1 二、三阶行列式

为得到 n 阶行列式的概念，首先考虑方程个数 m 和未知量个数 n 都等于 2 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-2}$$

利用消元法得到

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} \end{cases} \tag{1-3}$$

分析方程组（1-3）容易发现：x_1 的解与系数之间以及系数与常数之间的某种运算关系有关；类似地，x_2 的解与系数之间以及系数与常数之间的某种运算关系有关. 为得到这种运算关系，我们撇开等式右边部分不看，单看方程左边 x_1，x_2 的系数部分，可以发现，系数部分 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$正好由方程组（1-2）未知量系数 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}组成. 为便于记忆，引进记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}，并称之为二阶行列式.$$

行列式这一名称非常直观. 在定义二阶行列式后，方程组（1-3）每个方程右边部分构成两个二阶行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12} \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}$$

当 $D\neq0$ 时，线性方程组（1-2）的解可以表示为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}$.

【例 1-1】 求二元线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1+2x_2=3 \end{cases}$的解.

解

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1\times2-1\times1=1 \qquad D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=1\times2-1\times3=-1$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=1\times3-1\times1=2$$

$D\neq0$，方程组有唯一解. 方程组的唯一解为：$x_1=\dfrac{D_1}{D}=-1$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=2$.

类似地，方程个数 m 和未知量个数 n 都等于 3 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1-4}$$

利用消元法得到

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33})x_1 \\ =b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{13}a_{32}+b_3a_{12}a_{23}-b_1a_{23}a_{32}-b_2a_{12}a_{33}-b_3a_{13}a_{22} \\ (a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33})x_2 \\ =b_1a_{23}a_{31}+b_2a_{11}a_{33}+b_3a_{13}a_{21}-b_1a_{21}a_{33}-b_2a_{13}a_{31}-b_3a_{11}a_{23} \\ (a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33})x_3 \\ =b_1a_{21}a_{32}+b_2a_{12}a_{31}+b_3a_{11}a_{22}-b_1a_{22}a_{31}-b_2a_{11}a_{32}-b_3a_{12}a_{21} \end{cases} \tag{1-5}$$

分析方程组（1-5），我们发现：x_j（$j=1$，2，3）的解与系数之间以及系数与常数之间的某种运算关系有关. 为得到这种运算关系，我们撇开等式右边部分不看，单看方程左边 x_1，x_2，x_3 的系数部分，那么系数部分 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$正好是由线性方程组（1-4）未知量系数 a_{11}，a_{12}，a_{13}，a_{21}，a_{22}，a_{23}，a_{31}，a_{32}，a_{33} 组成. 为便于记忆，与二阶行列式类似引进记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33},$$

并称之为三阶行列式.

在定义三阶行列式之后，方程组（1-5）右边分别为 3 个三阶行列式：

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{13}b_2a_{31} - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - b_1a_{22}a_{31} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3$$

当 $D\neq 0$ 时，方程组有唯一解，可以表示为 $x_1 = \dfrac{D_1}{D}$，$x_2 = \dfrac{D_2}{D}$，$x_3 = \dfrac{D_3}{D}$.

【例 1-2】 解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 26 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5,\ D_1 = \begin{vmatrix} 26 & -1 & 1 \\ 9 & -4 & -1 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 55,\ D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 26 & 1 \\ 2 & 9 & -1 \\ 1 & 16 & 1 \end{vmatrix} = 20,\ D_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 26 \\ 2 & -4 & 9 \\ 1 & 2 & 16 \end{vmatrix} = -15$$

方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{55}{5} = 11,\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{20}{5} = 4,\ x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-15}{5} = -3$$

1.1.2 排列及逆序数

为了把二阶、三阶行列式的概念推广到 n 阶行列式，需要引入 n 级排列和 n 级排列的逆序数的概念. 下面首先介绍 n 级排列的概念.

定义 1-1 由 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 叫作一个 n 级排列. n 级排列的总数是 $n!$.

例如，1345276 是一个 7 级排列，597863214 是一个 9 级排列，4312 是一个 4 级排列.

下面给出 n 级排列的逆序数的概念.

定义 1-2 在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，如果较大的数 i_s 排在较小的数 i_t 的前面，即对 $s<t$，有 $i_s>i_t$，称这一对数 $i_s\ i_t$ 构成一个逆序. 一个 n 级排列中逆序的总数，叫作这个 n 级排列的逆序数，记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

容易得到，$\tau(i_1i_2\cdots i_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$. 其中，$t_1$ 表示在排列中排在 i_1 前面的比 i_1 大的数的个数，t_2 表示排在 i_2 前面的比 i_2 大的数的个数，……，t_n 表示排在 i_n 前面的比 i_n 大的数的个数.

例如，$\tau(4312) = 0 + 1 + 2 + 2 = 5$；

$\tau(597863214) = 0 + 0 + 1 + 1 + 3 + 5 + 6 + 7 + 5 = 28$；

$\tau(7654321)=0+1+2+3+4+5+6=21.$

定义 1-3 如果一个 n 级排列中，所有的数都按照由小到大的顺序排列，那么这个排列叫作n 级标准排列. 如果一个 n 级排列的逆序数为偶数，那么这个排列叫作偶排列. 如果一个 n 级排列的逆序数为奇数，那么这个排列叫作奇排列.

例如，1345276、597863214 是偶排列，4312 是奇排列.

定义 1-4 在一个排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$中，如果两个数 i_s与 i_t互换位置，其余数位置不变，这样的变换叫作一个对换，记为 (i_s, i_t).

例如，$1345276 \xrightarrow{(1,6)} 6345271$.

定理 1-1 对换改变排列的奇偶性.

1.1.3 *n* 阶行列式

回忆前面给出的二、三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

首先，我们看每一项构成的特点. 可以看出，二阶行列式每一项由 2 个元素的乘积组成，2 个元素行的脚标构成一个二级标准排列，2 个元素列的脚标是所有的二级排列 12，21. 三阶行列式每一项由 3 个元素的乘积组成，3 个元素行的脚标构成一个三级标准排列，3 个元素列的脚标构成所有的三级排列 123，231，312，321，132，213. 这启发我们定义 n 阶行列式的每一项. n 阶行列式的每一项由 n 个元素的乘积组成，n 个元素行的脚标构成一个 n 级标准排列，n 个元素列的脚标构成所有的 n 级排列，即 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$.

其次，我们看每一项符号的决定. 可以看出，当列的脚标是 123，231，312 时，即列的脚标构成偶排列时，这一项取正号；当列的脚标是 321，132，213 时，即列的脚标构成奇排列时，这一项取负号. 因此，n 阶行列式任意一项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$的符号为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$.

最后，我们看项数. 可以看出，二阶行列式的项数为所有二级排列的总数 $2!=2$，三阶行列式的项数为所有三级排列的总数 $3!=6$. 因此定义 n 阶行列式的项数为 $n!$.

总结以上分析，可以给出 n 阶行列式的定义.

定义 1-5 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}^{n!} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-6}$$

式中，$\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}^{n!}$ 表示对所有的 n 级排列求和，a_{ij}表示 n 阶行列式中位于第 i 行、第 j 列的元素.

注意到 n 阶行列式每一项中 n 个元素的顺序可以任意交换，n 阶行列式的展开式也可以

写成 $\sum\limits_{(i_1i_2\cdots i_n)}^{n!}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$ 和 $\sum\limits^{n!}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$.

【例 1-3】 计算下列对角行列式的值.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 根据定义 1-5,

$$D=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}^{n!}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

上面的所有项中，由于 0 乘以任意数的值都为 0，只有当 $j_1=1$，$j_2=2$，…，$j_n=n$ 时，这一项才不一定等于 0. 因此

$$D=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

与例 1-3 类似，得到上三角行列式、下三角行列式的值分别为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

即对角行列式、上三角行列式及下三角行列式都等于主对角线（即 a_{11}，a_{22}，…，a_{nn}所在的对角线）上元素的乘积.

【例 1-4】 计算下列反对角行列式的值.

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 根据定义 1-5,

$$D=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}^{n!}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

上面的所有项中，由于 0 乘以任意数的值都为 0，只有当 $j_1=n$，$j_2=n-1$，…，$j_n=1$ 时，这一项才不一定等于 0. 因此

$$D=(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 21)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

与例 1-4 类似，我们能得到反上三角行列式、反下三角行列式的值分别为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

1.2 行列式的性质

1.2.1 行列式的基本性质

利用行列式的定义计算一般形式的行列式，计算量是相当大的，有必要研究行列式的性质，以简化行列式的计算. 另外，这些性质在理论上也具有重要意义.

定义 1-6 将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式，称为行列式 D 的转置行列式，记为 D^{T}. 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 的转置行列式为

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式有以下基本性质.

性质 1 行列式和它的转置行列式相等，即 $D = D^{\mathrm{T}}$.

例如，设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 1 & 5 & 6 \\ 9 & 4 & 7 \end{vmatrix}$，则 $D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2 & 5 & 4 \\ 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}$，经验算有 $D = D^{\mathrm{T}} = -201$.

性质 1 说明行列式的行和列的地位是相同的. 对于行成立的性质，对于列也成立.

性质 2 互换行列式的两行（列），行列式的值改变符号.

以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示行列式的第 i 列，交换 i，j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$，交换 i，j 两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

例如，设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -33$，互换第 1 行与第 3 行后，得 $D_1 = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 33$，故有 $D = -D_1$.

推论 如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式的值为 0.

因为把行列式 D 中相同的两行（列）互换，其结果仍是 D，但由性质 2 可知，互换两行（列）的结果为 $-D$. 因此，$D = -D$，即 $D = 0$.

性质 3 行列式某一行（列）的公因子可以提到行列式的外面，即

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=kD$$

第 i 行（或列）提出公因子 k，记作 $r_i \div k$（或 $c_i \div k$），第 i 行（或列）乘以 k，记作$r_i \times k$（或 $c_i \times k$）.

例如，$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & -10 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_2 \div 5]{r_1 \div 2} 10 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

推论 1 如果行列式某一行（列）的元素全为 0，则此行列式的值为 0.

推论 2 如果行列式某两行（列）的对应元素成比例，则此行列式的值为 0.

例如，$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 4 & -1 & 12 & 3 \\ -3 & 2 & -9 & 1 \end{vmatrix}$，因 D 中第 1 列与第 3 列对应元素成比例，故有 $D=0$.

性质 4 如果行列式中某一行（列）的所有元素都是两个元素的和，则此行列式等于两个行列式的和，即如果

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $D=D_1+D_2$.

例如，$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

性质 5 行列式某一行（列）的所有元素的 k 倍加到另一行（列）的对应元素上，行列

式的值不变. 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

第 j 行（列）的所有元素的 k 倍加到第 i 行（列）的对应元素上记作 $r_i+kr_j(c_i+kc_j)$.

1.2.2 利用性质计算行列式

下面利用行列式的性质，先将行列式化为上一节的特殊形式的行列式，如对角行列式、上三角行列式、下三角行列式等. 然后计算出行列式的值.

【例 1-5】 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ 的值.

解 利用行列式的性质将第 1 行分别加到第 2、3、4 行上，使其成为一个上三角形行列式，利用三角形行列式的结论，可得此行列式的值. 此例是计算行列式的一种典型算法.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=8$$

【例 1-6】 计算行列式 $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 的值.

解
$$D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_4} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-5r_1]{r_2-2r_1,\, r_3-3r_1} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 3 \\ 0 & 9 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-3r_2]{r_4-3r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+3r_2]{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & -10 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-r_4]{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & -8 & 9 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+4r_3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 61 \end{vmatrix}$$

$$=1\times(-1)\times 2\times 61=-122$$

【例 1-7】 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解 这种类型行列式的特点是对角线上的元素相同，对角线以上和以下的元素也相同，从而保证了行列式各列（行）的元素之和完全相同，由此可利用行列式的性质把行列式的第 1 行（列）的元素化为 1，进而把行列式转化为上（下）三角形行列式进行计算.

$$D=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

【例 1-8】 证明

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3$$

证明 因为$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$，观察第 1 行，可将第 2 列乘以 -2 加到第 1 列，再将第 3 列加到第 1 列，则

$$D\,\underline{\underline{c_1-2c_2+c_3}}\begin{vmatrix} (a-b)^2 & ab & b^2 \\ 0 & a+b & 2b \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\underline{\underline{c_2-c_3}}\begin{vmatrix} (a-b)^2 & ab-b^2 & b^2 \\ 0 & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3$$

1.3 行列式的展开定理

利用行列式的性质计算行列式，通常是将其化简成特殊形式的行列式，得出最终结果. 但对某些行列式的计算以及行列式理论的讨论和证明，仅有行列式的性质是不够的. 一般说来，低阶行列式的计算要比高阶行列式的计算简便，于是，可以很自然地考虑到用低阶行列式来表示高阶行列式的问题. 为此，有必要研究行列式的展开定理.

1.3.1 行列式按某一行（列）展开定理

定义 1-7 在 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$中，划去元素 a_{ij}所在的第 i 行和第 j