$n=x^2+y^2+z^2+w^2$

数和数列

Numbers and Sequences

孙智宏 著

科学出版社

数和数列

孙智宏　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书共分 21 讲，由浅入深，系统介绍了数、数列和初等数论的知识及数论学家的故事，讨论了中学生需要掌握的复数、数学归纳法、等差数列、等比数列、 组合数与二项式定理，参加数学竞赛需要掌握的取整函数与抽屉原理、数的整除与一次不定方程、算术基本定理及其应用、中国剩余定理、Fermat 小定理与 Wilson 定理、Euler 函数与 Euler 定理等内容，系统地介绍了 Fibonacci 数、Bernoulli 数、Fermat 数、Mersenne 数和 Lucas 数列等经典的数和数列，并讲述二次互反律、两平方和定理和四平方和定理等初等数论经典内容，最后一讲“数论史话”描述了从 Fermat 到 Kummer 的数论发展史和数论学家的故事。

本书是初等数论的入门读物，适合高中生、大学生、数学爱好者、数学教师与数论工作者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

数和数列/孙智宏著. —北京：科学出版社, 2016.12

ISBN 978-7-03-051115-7

I. ①数… II. ①孙… III. ①数列 IV. ①O171

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016) 第 309637 号

责任编辑：胡庆家／责任校对：彭 涛

责任印制：张 伟／封面设计：铭轩堂

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京九州迅驰传媒文化有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 12 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16

2016 年 12 月第一次印刷 印张：15 3/8

字数：210 000

定价：88.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

作 者 简 介

孙智宏，男，1965 年出生，淮阴师范学院数学科学学院教授，曾获全国师范院校曾宪梓教师奖(1999)、全国优秀教师(2007)等荣誉称号，主要研究领域为数论、图论与组合数学，在国际核心刊物(SCI)发表论文 58 篇，2004 年起担任美国数学会(AMS)会员，2009 年与 2013 年两次获国家自然科学基金面上项目资助。

前　　言

数和数列的性质是数学的基础内容, 高考题、数学竞赛题和数论问题都有各种类型和各种难度的整数或数列问题. 本书是为中学生、大学生及数学爱好者写的讲解数和数列基础知识及解题技巧的著作, 也可作为初等数论的教科书或数论的入门著作, 亦可用于高考指导和初等数学竞赛辅导. 本书从较低的起点开始, 由浅入深, 讨论了中学生需要掌握的复数、数学归纳法、等差数列、等比数列、组合数与二项式定理, 参加数学竞赛的学生需要掌握的取整函数与抽屉原理、数的整除与一次不定方程、算术基本定理及其应用、同余性质与同余方程、Fermat 小定理与 Wilson 定理、Euler 函数与 Euler 定理、Fibonacci 数. 前 18 讲的其余部分为初等数论经典内容, 包括素数原根、中国剩余定理、二次互反律、两平方和定理、四平方和定理; 在第 19 讲和第 20 讲中, 作者用独创的方式系统地介绍了 Bernoulli 数、Bernoulli 多项式、Lucas 数列、Fermat 数和 Mersenne 数, 其中包含了作者的一些研究成果.

本书特别注意介绍有关定理的历史背景与最新进展, 收集了各种类型的相关例题和习题, 有些例题和习题是作者所编, 根据作者对数的感悟、研究成果和对数论史的了解, 补充了许多其他书中见不到的命题、证明和习题, 其中个别习题难度较大. 作者力图使本书趣味可读, 富有特色, 便于自学, 包含经典内容、经典例子, 采用 Erdös 所说的 “天书” 中的最短证明, 既讲解数学思想, 又充分展示数学之美. 为了激发读者对数论的兴趣和对数学的热爱, 最后一讲 “数论史话” 介绍了从 Fermat 到 Kummer 的数论发展史和数论学家的故事.

为了照顾读者和便于教学之用, 本书各有侧重, 不可能面面俱到, 所

论述的题材也没有过分深入. 书末附有 17 篇参考文献, 既是作者写书时参考所用, 又可供读者深入学习参考.

孙智宏

2016 年 9 月

目　　录

第1讲 数的扩张

数学起源于人们对数的认识，人类从认识自然数、负整数、分数、无理数到复数经历了漫长的历程. 本讲讲述数的起源、数的扩张、复数与四元数.

1.1 数和数学的起源

数学作为一门有组织的、独立的、理性的学科，在公元前 600~公元前 300 年间古希腊学者登场之前是不存在的，但在早期的古代文明社会中已产生了数学的开端与萌芽.

原始人用指头、石子、结绳、刻痕计数，但仅限于较小的自然数和 $\frac{1}{2}$ 之类的简单分数. 根据对两腿及臂的观察得出角的概念，数学的应用仅限于简单交易，如田地面积粗略计算、陶器和布上的几何图案、计时等.

人类文明首先在黄河以及幼发拉底河、底格里斯河、印度河和尼罗河几条大河的流域中，从蒙昧中诞生出来，这正好对应中国、古印度、古巴比伦、古埃及这四大文明古国.

古巴比伦的文明记载于古代的泥板文书，这些泥板是在胶泥尚软时刻上字然后晒干保存. 泥板上的文字称为楔形文字. 现已挖出 75 万块泥板文书，有些是在公元前 2000 年左右，大部分在公元前 600~公元前 300 年间.

在古巴比伦，人们已经发明了六十进制，有时六十进制和十进制混用，有了 1~10 的基本记号、乘法表和分数. 古巴比伦人用特殊记号和名称表示未知量，解出了含一个或较多个未知量的几种形式的方程，特别是已发现二次方程求根公式，有表示平方、平方根、立方、立方根的数表. 公元前 1750 年泥板文书上刻着 15 组Pythagoras(毕达哥拉斯，约公元前560~公元

前480 年) 组 (勾股数组)$(3,4,5),(12,5,13),\cdots,(12709,13500,18541)$. 古巴比伦人甚至在具体问题中得出等差数列和等比数列的求和公式, 如会求 $1+2+2^2+\cdots+2^9$, $1^2+2^2+\cdots+10^2$ 的和.

在古巴比伦从人对土地测量的基本公式和数目里可以找到几何学的开端. 古巴比伦人知道勾股定理、三角形的相似及相似三角形对应边成比例, 古巴比伦天文学家把圆周分为 360 度. 但古巴比伦人的算术代数步骤及几何法则是根据物理事实边试边改及从直观认识得出的, 没有证明和逻辑结构的思想.

在古埃及 (公元前 3500~公元前 332), 尼罗河的泛滥导致了古埃及天文学及土地测量技术的产生. 古埃及人使用象形文字, 每个文字记号是某件东西的图形. 书写的方式是用墨水写在草片 (一种把木髓紧压后切成的薄片) 上, 草片易干裂不宜保存. 现存的草片文书一批保存在莫斯科, 一批保存在英国博物馆, 写于公元前 1700 年左右.

古埃及人对整数发明加减乘除运算, 对分数记法则比较复杂, 对圆面积计算得出惊人的计算公式:

$$S=\left(\frac{8d}{9}\right)^2,$$

其中 d 为直径, 相当于 π 取 3.1605. 古埃及人也有计算立方体、柱体等图形体积的法则.

1881 年人们发现“巴克沙利手稿”, 反映公元前 2 世纪至 3 世纪的印度数学, 内容涉及分数、平方根、数列、收支与利润计算、比例算法、级数求和、代数方程 (一二次方程及方程组), 使用了一些数学符号, 有完整的十进制数码, 并用实点表示 0.

我国很早就采用十进制记数, 公元前 1 世纪的《周髀算经》是我国最早的天文数学著作, 其中已有勾股定理和分数运算. 3 世纪三国时期赵爽证明了勾股定理. 公元前 1 世纪的《九章算术》含 246 个问题, 分为 9 章: 方田, 粟米, 衰分, 少广, 商功, 均输, 盈不足, 方程, 勾股. 该书是由先秦至西汉中叶的众多学者编撰、修改而成, 是我国第一部重要的数学专著, 它

和Euclid(欧几里得, 约公元前330~公元前275) 的《几何原本》东西辉映, 成为古代科学的杰出创造. 三国时代的刘徽是我国古代数学理论的奠基者, 他对《九章算术》作了著名的注释《九章算术注》(公元263), 并用割圆术给出圆面积近似公式.《九章算术》含有负数运算法则、开平方、开立方方法及解线性方程组的消元法.

四大文明古国的文明分散在不同区域中, 犹如茫茫夜境中的几座灯塔. 在古希腊, 古代世界知识之流在那里汇合起来, 由几位天才加以过滤、澄清和升华, 形成了长达 1000 多年的灿烂文明 (公元前 600~公元 400). 古希腊人在文明史上首屈一指, 在数学史上也至高无上, 虽然他们取用了周围文明世界的知识, 但他们创造了自己的文明和文化. 这是一切文明中最宏伟的, 对今日数学的奠基有决定性作用. 古巴比伦人和古埃及人好比是粗陋的木匠, 古希腊人则是大建筑师.

Thales(泰勒斯, 约公元前 624~公元前 548) 是有史记载的 (古希腊) 第一位科学家、哲学家, 爱奥尼亚学派创始人. 他早年是商人, 游历古巴比伦、古埃及, 晚年转向哲学. 在他影响下, 古希腊人努力探索宇宙奥秘, 出现古希腊科学的繁荣. Thales 从古巴比伦人测量土地的规则中总结抽象出几何学最初的一些概念和命题. Pythagoras 和孔子、老子是同时代人, 和Thales 一样是可疑人物, 更加彻底地被陷在传说和神话之中. Pythagoras 早年在 Thales 学派学习, 先后游历古埃及、古巴比伦, 还可能到过古印度, 后回家乡 (意大利) 讲学, 广收门徒, 建立宗教、政治、学术合一的团体. 该学派组织严密, 有浓厚的宗教色彩, 学派繁荣一个多世纪, Pythagoras 后被暴徒杀害. Pythagoras 说“万物皆数”, 宣扬数的神秘感, 认为世界一切都归于整数及整数之比. Pythagoras 学派引入完全数、亲和数、多角数、正多面体等概念, 发现勾股定理 (可能没证明)、正十二面体与无理数, 其学派成员Hippasus(希帕索斯) 在公元前 470 年发现单位正方形对角线长不能表成整数之比, 因其无理数的发现动摇学派的信条而被众人抛入大海.

古希腊数学的最高成就是 Euclid 的十三卷巨著《几何原本》. 该书

从 23 个定义、5 个公设和 5 个公理开始，按Aristotle(亚里士多德，公元前 384~公元前 322) 的逻辑思想以严谨的方式建立起几何学知识的整个大厦，其中还包括无理数与素数的卓越工作.《几何原本》共 13 卷，含 465 个命题，其中第 1~4 卷为平面几何，第 5 卷为比例论，第 6 卷为相似形，第 7~9 卷讨论数论，第 10 卷讨论无理数，第 11~13 卷为立体几何.《几何原本》是演绎的光辉典范，它决定了其后两千年的思想发展.

在古希腊后期，Diophantus 写了 13 卷的《算术》(约公元250). 1464 年Regiomontanus(雷格蒙塔罗斯，1436~1476) 在威尼斯发现希腊文本《算术》6 卷 (1,2,3,8,9,10)，1973 年Toomer(图默) 发现《算术》阿拉伯文本 4 卷 (4,5,6,7)，其余 3 卷失传.

《算术》主要讨论不定过程，考虑方程的整数解、有理数解，以问题集的形式收录了 290 个题目，还有十几个引理和推论，具有算术和代数的特征，引入未知量，但只用一个未知量，其余称为第二、第三未知数，没有上下标记号，问题都很特殊，不够一般化，且排斥负解. 解题方法五花八门，没有一定的法则. 其功绩在于成功地使用了符号，深入讨论了抽象的数而不是具体数目，特别研究了数表为平方数之和的问题，启发了 Fermat(费马，1601~1665) 开创近代数论、Viète(韦达) 建立代数符号体系.

古希腊人使用草纸，易于书写和传播，但也易于损毁. 公元前 1 世纪古罗马征服古希腊，公元前 47 年与 392 年希腊图书馆及神庙被烧，希腊数学落下帷幕.

在中世纪阿拉伯数学家Khwarizmi(花拉子米，约783~850) 写出名著《代数学》，叙述 6 类一、二次方程求解问题，探索一般解法，给出一元二次方程一般代数解法及几何证明，引进移项、同类项合并等代数运算，其著作《印度计算法》介绍印度数码及十进制计数法以及相应计算方法，后称阿拉伯数字.

到 1500 年左右，“0” 作为一个数已被人接受，无理数也用得更习惯了. 但人们对无理数是否确实是数仍不放心，因为无理数用十进制表示时小数部分无限不循环. 负数通过阿拉伯人著作传入欧洲，但十六七世纪

的大多数数学家并不承认它们是数, 或者即使承认了, 也并不认为它们是方程的根.

在十六七世纪, 欧洲人还没有完全克服无理数和负数带来的困难时, 因为解方程的需要又陷入了复数的问题. Cardano(卡尔达诺) 在解三次方程时就不可避免地同复数打交道, 甚至 Newton(牛顿) 也不认为复数根有意义. 复数直到 19 世纪才被广泛承认和接受.

数论 (number theory) 又称高等算术 (higher arithmetic), 是研究整数性质和方程整数解的一门学问. 数论是数学中最好懂但却充满着神秘色彩、最古老但又一直很活跃的一门学科. Euclid《几何原本》第 7~9 卷讲述数论. 17 世纪法国数学家Fermat 是第一个对数论作出广泛可观的贡献并给这门学科以巨大推动力的人, 被称为“数论之父”. Fermat 认为算术被人忽视, 淹没在几何、分析的发展中, 他提出很多漂亮的猜想, 决定了 Gauss(高斯,1777~1855) 以前数论的研究方向. Fermat 是一个孤独的数论研究者, 当时不被人理解, 死后因为他儿子出版了 Fermat 写下的注记以及与别的数学家的通信, Fermat 的数论工作才闻名世界. 在 18 世纪 Euler(欧拉,1707~1783) 白手起家, 一个接一个地解决 Fermat 的猜想. Euler 创造了数论的许多基本方法, 得出了许多基本结果, 并发现了重要的二次互反律. Lagrange(拉格朗日,1736~1813) 善于学习 Euler 的工作, 把 Euler 的工作系统化并引向深入. 1801 年Gauss 出版了《算术研究》, 开辟了数论的新纪元, 第一次使数论知识系统化成为一门学科, 并指明数论今后的发展方向.

1.2 复数与四元数

如前所述, 由于实际计数的需要产生了**自然数**(natural number) $0, 1, 2, 3, \cdots$, 其中非零自然数称为**正整数**(positive integer), 两个自然数之和以及两个自然数之积都是自然数, 故自然数全体构成的集合 $\mathbb{N}$ 对加法运算和乘法运算封闭. 同样全体正整数构成的集合 $\mathbb{Z}^+$ 也对加法运算和乘法运算封闭. 因两个自然数之差不一定是自然数, 为了运算方便, 人们引入了负整数 $-1, -2, -3, \cdots$, 正整数、零和负整数统称为**整数**(integer). 整数

$0, \pm 2, \pm 4, \cdots$ 称为**偶数**(even number), 整数 $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \cdots$ 称为**奇数**(odd number).

易见整数之和为整数, 整数之差也为整数, 整数之积亦为整数, 故全体整数构成的集合 $\mathbb{Z}$ 对加法、减法和乘法三种运算都封闭.

由于整数相除不一定是整数, 人们引入了分数 (fraction), 分数就是能写成两个整数之比的数, 这样的数称为**有理数**(rational number). 全体有理数构成的集合记为 $\mathbb{Q}$. 显然 $\mathbb{Q}$ 对加、减、乘、除四种运算都封闭, 只要 0 不做除数.

无理数(irrational number) 是用十进制表示时小数部分无限不循环的那些数, 无理数的理论比较复杂, 直至 19 世纪出现 Dedekind(戴德金) 和Weierstrass (魏尔斯特拉斯) 的工作才有可靠的基础, 甚至 19 世纪著名数学家Kronecker(克罗内克) 还怀疑无理数是否存在. Kronecker 说: "上帝创造了自然数, 其他一切都是人的工作."

无理数和有理数统称为**实数**(real number). 全体实数构成的集合通常用 $\mathbb{R}$ 表示. 实数集 $\mathbb{R}$ 对加、减、乘、除四种运算都封闭. 但人们又引入了开方运算, 一个实数开方后并不一定是实数. 如在 $\mathbb{R}$ 中, 负数开平方被认为没有意义. 为了解决负数开方的问题, 人们引入**复数**(complex number) $a+b\mathrm{i}$, 其中 a, b 为实数, $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$. i 称为**虚数单位**(imaginary unit), a, b 分别称为复数 $a+b\mathrm{i}$ 的**实部**(real part) 和**虚部**(imaginary part). 两个复数相等当且仅当它们的实部和虚部分别相等, 即 $a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i} \iff a=c$ 且 $b=d$. 当 $b \neq 0$ 时，复数 $a+b\mathrm{i}$ 称为**虚数** (imaginary number), 复数 $b\mathrm{i}$ 称为**纯虚数** (pure imaginary number). 全体复数构成的集合通常用 $\mathbb{C}$ 表示.

易见 $\mathrm{i}^2=-1, \mathrm{i}^3=\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}^2=-\mathrm{i}, \mathrm{i}^4=(\mathrm{i}^2)^2=(-1)^2=1$, 故 k 为整数时, 有

$$\mathrm{i}^{4k}=1, \quad \mathrm{i}^{4k+1}=\mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^{4k+2}=-1, \quad \mathrm{i}^{4k+3}=-\mathrm{i}.$$

对两个复数 $a+b\mathrm{i}$ 和 $c+d\mathrm{i}$ 自然地规定如下运算:

$$\begin{aligned} a+b\mathrm{i}+c+d\mathrm{i} &= a+c+(b+d)\mathrm{i}, \\ a+b\mathrm{i}-(c+d\mathrm{i}) &= a-c+(b-d)\mathrm{i}, \\ (a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i}) &= ac+ad\mathrm{i}+bc\mathrm{i}+bd\mathrm{i}^2=ac-bd+(ad+bc)\mathrm{i}. \end{aligned}$$

例如

$$2+3\mathrm{i}+3+4\mathrm{i}=5+7\mathrm{i},\quad 3+4\mathrm{i}-(1+2\mathrm{i})=2+2\mathrm{i},$$
$$(1+2\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})=1\cdot 3-2\cdot 4+(1\cdot 4+2\cdot 3)\mathrm{i}=-5+10\mathrm{i}.$$

对复数 $a+b\mathrm{i}$ 和 $a-b\mathrm{i}$ 有

$$(a+b\mathrm{i})+(a-b\mathrm{i})=2a\in\mathbb{R},\quad (a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=a^2+b^2\in\mathbb{R},$$

称 $a+b\mathrm{i}$ 与 $a-b\mathrm{i}$ 是一对**共轭复数**, $a-b\mathrm{i}$ 是 $a+b\mathrm{i}$ 的**共轭**(conjugate) 记为 $\overline{a+b\mathrm{i}}=a-b\mathrm{i}$. 容易验证

$$\overline{(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})}=\overline{a+b\mathrm{i}}+\overline{c+d\mathrm{i}}, \tag{1.1}$$

$$\overline{(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})}=\overline{a+b\mathrm{i}}\cdot\overline{c+d\mathrm{i}}. \tag{1.2}$$

实数绝对值概念推广到复数中是复数的模. 称 $|a+b\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+b^2}$ 为复数 $a+b\mathrm{i}$ 的**模** (modulus). 例如, $2+3\mathrm{i}$ 的共轭复数为 $2-3\mathrm{i}$, $2+3\mathrm{i}$ 的模为

$$|2+3\mathrm{i}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}.$$

由于

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2,$$

故有

$$|(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})|=|a+b\mathrm{i}|\cdot|c+d\mathrm{i}|. \tag{1.3}$$

复数也可作除法运算, 当 $c+d\mathrm{i}\neq 0$ 时, 自然地规定

$$\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=\frac{(a+b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}{(c+d\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}.$$

这样复数集 $\mathbb{C}$ 也对加、减、乘、除四种运算都封闭. 但注意, 实数可以比较大小, 复数不能比较大小.

由于

$$a+b\mathrm{i}=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathrm{i}\right),$$