现代数学基础

60

紧黎曼曲面引论

伍鸿熙 吕以辇 陈志华

高等教育出版社

现代数学基础

60

紧黎曼曲面引论

伍鸿熙 吕以辇 陈志华

高等教育出版社·北京

图书在版编目（CIP）数据

紧黎曼曲面引论 / 伍鸿熙，吕以辇，陈志华著．--
北京：高等教育出版社，2016.12
（现代数学基础）
ISBN 978-7-04-046862-5

Ⅰ．①紧… Ⅱ．①伍… ②吕… ③陈… Ⅲ．①黎曼面
－研究 Ⅳ．① O174.51

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 281618 号

策划编辑 王丽萍　　责任编辑 王丽萍　　封面设计 张 楠
版式设计 张 杰　　责任校对 刘娟娟　　责任印制 田 甜

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	固安县铭成印刷有限公司		http://www.hepmall.com
开　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	17.5		
字　数	270千字	版　次	2016年12月第1版
购书热线	010-58581118	印　次	2016年12月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	69.00元

物 料 号 46862-00

序

1978 年夏, 我在中国科学院数学研究所讲了六个星期的黎曼面课程, 吕以搴、陈志华两位同志为这一课程做了很详尽的笔记. 这本书就是我们三人根据上述笔记补充修改而成的.

当时在选择回国所要讨论的课题时, 我深深地感到应该具备下列三个要素: (一) 它的内容应该是基本而且有用的, 相对地要避免太专门和高度技巧性的东西; (二) 题材要具体, 但是所用的工具却是充分抽象的, 这样可以说明近代数学的一个特色, 那就是抽象的想法和概念只是研究数学的工具, 而不是研究数学的最终目的; (三) 内容要能表达数学的统一性. 第三点我觉得特别重要, 因为越是把数学的各个专业分割孤立, 做出来的工作就越是容易与数学的主流脱节, 越是容易变得偏窄. 这点并不是我个人的偏见, 而是一般数学家的共同信仰. 20 世纪的大数学家 Hermann Weyl 为 Hilbert 写悼文时就特别提到这点 (Obituary: David Hilbert, 1862—1943, Gesammelte Abhandlungen Ⅳ, Springer-Verlag, 1968, 121—129; 特别请看第 123 页). 英国数学家 M. F. Atiyah 甚至有一篇短文专门讨论这个题目 (The Unity of Mathematics, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 10 (1978), 69—76), 这篇文章深入浅出, 是值得认真一读的.

基于上述三点, 我选择了黎曼面这个课题, 并且采用了本书所叙述的处理方法. 由于时间所限, 讲课中无法讲到这个理论比较深入的部分. 本书虽然比原课程的材料多加了一些, 但是依然不够完备. 最大的缺陷是没有证明 Abel-Jacobi 定理和好好地讨论与这方面有关的发展, 例如一个黎曼面和它的 Jacobi 簇之间关系, 等等. 至于这本书有很多细节上不妥当的地方, 则

更是有目共睹的. 鉴于国内这方面书籍的缺乏, 我们勉强先把这样一本还是相当粗糙的书仓促付印, 以免为了修补细节而长期延迟了它的出版.

本书所需的预备知识不太多, 最主要的是单复变函数论, 初步的拓扑、代数、泛函分析和基本的微分流形的概念. 因为第四章是自成一系的, 所以有必要时读者可以直接由第三章跳到第五章, 但我们希望读者不要这样做.

我们希望这本书能用作研究院的课本. 它所需要的预备知识应该是任何研究院的第一年必修课程的一部分, 它的程度适用于研究院的第二年课程. 为了使得研究生具备充实的基础知识, 我们觉得国内研究院一定要为学生开基本课程, 这是当务之急, 不可或缺的! 另一方面, 我们在编写时, 曾特别花了一些功夫来使得这本书也能作为大学毕业生自修之用. 再者, 我们也希望这本书能对复流形、多复变函数和代数几何这几个广阔的领域作一个初步的介绍, 而且也希望能启发读者向数学作更深入的研究. 为了达到第二个目的, 请读者特别注意引言和每章末的注记内的讨论. 在这些地方我不但尽可能地介绍了有关的文献, 而且也表达了我个人对数学的一些看法. 但是因为我的学识有限, 这些意见不一定都正确. 希望大家多加指正批评, 我就感激不尽了.

在数学所讲课时蒙陆启铿、钟家庆同志给我很大的帮助, 同时张素诚同志对这个小册子也提了宝贵的意见, 特此表示感谢. 吕以辇、陈志华同志不但完全尽了合著者的责任, 而且在很多吃力不讨好的地方, 他们都很慷慨地为我代劳, 书后的两个附录就是他们为了读者方便而特意撰写的. 本书中有很多我个人的意见, 当然得由我一个人负责, 但是它之所以能在短期内出版, 是与他们的努力分不开的. 在此向他们致以深切的感谢.

伍鸿熙
一九七九年一月十五日
于美国伯克利

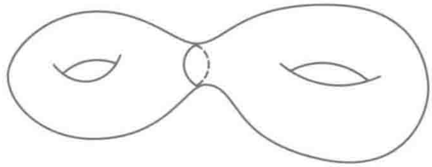
通用记号

$\mathbf{R}$	实数域
$\mathbf{C}$	复数域
$\mathbf{Z}$	整数环
$\mathbf{Q}$	有理数域
$\mathbf{C}^*$	非零的复数之集
$\mathbf{R}^*$	非零的实数之集
$\exists$	存在, 有
$\forall$	对每个, 对所有
$\ni$	使
$\Longrightarrow$	蕴涵
$\Longleftrightarrow$	等价于, 充要条件
$x \in B$	x 是 B 的元
$\left.\begin{array}{l} A \supset B \\ B \subset A \end{array}\right\}$	B 是 A 的子集
$B \subset\subset A$	$B \subset A$ 且 B 在 A 内的闭包是紧的

引　言

本书的主要目的是讨论紧黎曼 (曲) 面, 但对非紧的黎曼面也有初步的介绍. 紧黎曼面的重要性是由于它们是紧复流形中最简单的例子. 紧复流形是近代数学的一个主要研究对象. 无论在代数几何、自守函数论或微分几何中, 紧复流形都占一个重要的地位. 同时紧复流形理论中的技巧和想法对多复变函数论也有重大的影响. 所以本书可以看作近代数学很多方面的入门. 要是能把这个简单的特殊情况好好掌握的话, 那么对下一步的研究是会有很大帮助的.

一个黎曼面从局部的眼光看来, 只是复平面中的一个开集. 从整体的眼光看来, 黎曼面的要点是在它上面能引进全纯和亚纯的概念. 所以本书大部分的时间都花在研究紧黎曼面上的全纯微分、亚纯函数等以及它们之间的关系. 从几何的眼光看来, 黎曼面是一个相当简单的概念, 因为任何一个紧的黎曼面都与 $\mathbf{R}^3$ 内一个闭曲面 (或称紧曲面) 同胚. 最简单的闭曲面自然是球面, 其次是环面, 如果环面上多挂一个环柄, 就得到一个有两个 “洞” 的闭曲面, 如下图所示.



这曲面就是一个所谓亏格等于 2 的曲面, 一般来说, 如果 $\mathbf{R}^3$ 内一个闭曲面

有 n 个 "洞", 就称之为有亏格等于 n 的闭曲面 ($n \geqslant 0$). 从拓扑型的观点来看, 这些曲面就是所有的紧黎曼面了.

现在我们简略地讨论一下研究黎曼面的三个主要观点.

(1) 复流形的观点: 黎曼面是一维的 Kähler 流形. 这里的主要工具是分析、拓扑和微分几何, 例如曲率、示性类、残数公式、椭圆算子, 等等. 本书就采用这个观点.

(2) 代数几何的观点: 黎曼面是一条代数曲线, 即 n 维复投影空间 $P_n\mathbf{C}$ 内的一维紧子簇. 这里主要的工具是代数, 例如多项式环内的理想理论、Galois 理论、赋值论, 等等. 但研究的对象仍然是几何, 例如两条在 $P_2\mathbf{C}$ 内的代数曲线相交于多少点? 曲线的一点上是否有切线? 等等.

(3) 代数数论的观点: 黎曼面是一个一元代数函数域, 即一个 $\mathbf{C}$ 的一次纯超越扩充的有限扩充. 这里的工具是代数, 但对象则是代数和代数数论. 例如一元代数函数域的扩充理论.

这三个观点基本上是等价的. (1) 和 (3) 的等价, 可见本书的定理 6.3 和定理 6.6. 此外, 定理 18.8 和 §18 末的讨论也说明了 (1) 和 (2) 的等价. 但不同的观点自然导出不同的技巧、重点和结果. 比方说, 一个代数流形上的 "调和形式理论" (见本书的 §11 和 §13—17) 是属于 (1) 的范围而不是 (2) 或 (3) 的. 相反地, 因为 (2) 和 (3) 完全用代数工具, 所以它们的结果和证明都在特征等于 $p > 0$ 的情况下成立, 这种讨论自然不是 (1) 所能办到的. 但我们不希望读者对上面这三点作片面的理解, 以为黎曼面的研究是清清楚楚地分为三部分进行的, 或者以为可以把三者中之一孤立起来独自钻研. 事实上, 在 19 世纪初期和中期, (1) 和 (2) 是分不开的. 而且过去二十年间所发展的抽象代数几何基本上把 (2) 和 (3) 看成是同一回事. 所以这三者的分别只表述三种不同的态度, 而不是有意划出三条界线, 把黎曼面理论作一个 "天下三分". 从过去的历史我们知道, 这三个观点都是互助互补的. 要是任何一方面有重要发展的话, 则一定加深其他两方面的了解和启发新的问题. 比如说, 所谓代数簇的 "奇异点分解问题" 本来源于 (1), 但最后的解答却是完全用代数方法的, 即是说变成 (2) 的范围内的一条定理, 自然这条定理也是在 (1) 的领域内被反复应用的. 再举一个例, 所谓 "Weil 猜想" 是 (3) 的范围内的问题, 但这些猜想的主要想法却是借用 (1) 的观点的, 而且这些猜想的解决所用的工具已经引导出代数几何 (2) 的内部革命 (概形 (scheme), 层的应用, étale 上同调论, 等等).

所以上面的 (1), (2), (3) 实际是三位一体的. 要是读者有意在任何一方面作深入的研究, 则一定要在其他两方面有基本的认识, 这点是肯定的.

在紧黎曼面的理论中, 最重要的结果无疑是 Riemann-Roch 定理. 我们

甚至可以将本书的题目改为 “紧黎曼面的 Riemann-Roch 定理及其证明和应用”. 在这里我们应该补充两点. 第一, 书内所载的 Riemann-Roch 定理的应用是极其初步的, 读者要看更深奥的结果, 则请参阅下列的文献, 特别是 Griffiths-Harris 的书. 其次, 本书所给的 Riemann-Roch 定理的证明绝不是最快捷的一个. 我们写这书的目的不是求速战速决, 而是欲借这个机会来向各位介绍一下过去三十年在复流形理论上的一些新发展. 往往在高维时看来抽象和难懂的概念及技巧, 在黎曼面上变得明确易懂. 因此用黎曼面作这方面的入门初阶, 其实是很理想的. 当然归根到底, 黎曼面的理论本身如果不是充分美好和完整的话, 则这本书就会变成东拉西扯、零乱无章的了. 所以我们除了介绍一些新工具、新想法之外, 还希望读者会觉得黎曼面本身是值得细读和思考的.

现在我们讨论一些基本文献. 黎曼面的书籍和文章极多, 我们只能挑选一小部分以作范例, 这方面最有名的书无疑是

H. Weyl, The Concept of a Riemann Surface, Third edition, Addison-Wesley Publishing Co., 1955.

这本书的第一版是 1913 年在德国印行的 (原名 Idie der Riemannschen Fläche), 那时 Weyl 只有二十六岁. 这是 20 世纪数学界的一部经典著作. 近代所用的黎曼面定义和微分流形的定义, 都是从这本 1913 年的书中来的. 近代对黎曼面的基本了解, 也同出一处. 在 1955 年这本书的第三版中, 还是有资料值得任何一个数学家去学习的. 这本书对紧和非紧的黎曼面都有详细的讨论. Weyl 写的书一般来说比较难读, 下面这书大致上是设法把 Weyl 书内较初步的部分为初学者重写的:

G. Springer, Introduction to Riemann Surfaces, Addison-Wesley Publishing Co., 1957.

该书的好处是写得很浅, 所以较为容易入手. 但最后 30 页牵涉到一些较深奥的东西, 就写得有点难了. 和该书相近而且程度相当的书不多, 可举者有二:

R. C. Gunning, Lectures on Riemann Surfaces, Princeton University Press, 1966.

J. Guenot and R. Narasimhan, Introduction à la théorie des Surfaces de Riemann, *L' Enseignement Mathématique*, **21** (1975), 123—328.

后者虽然是在数学杂志上发表的文章, 但其实与课本无异. 这两个文献都着重于用近代的工具和观点来重新讨论黎曼曲面, 因此与本书的立场相像. 所不同的, 前者不用 Hodge 理论, 而且多用一些层论, 后者则不用层论而多用一些分析. Gunning 的书不能讲是写得平易近人, 但它的取材却是不错的.

Guenot-Narasimhan 的长文有很好的非紧黎曼面的讨论, 请读者注意.

用代数几何的观点来讨论黎曼面的书, 可推荐的有两本, 都是较浅的:

R. J. Walker, Algebraic Curves, Princeton University Press, 1950. (Dover Publications 在 1962 年曾把这书重印.)

K. Kendig, Elementary Algebraic Geometry, Springer-Verlag, 1977.

近代代数几何用的工具较多, 因此写一本完备的课本很难, 最近却一连出现两本这方面的好书, 它们都是在详细地介绍了代数簇之后才用黎曼面作举例的.

R. Hartshone, Algebraic Geometry, Springer-Verlag, 1977.

P. A. Griffiths and J. Harris, Principles of Algebraic Geometry, John Wiley & Sons, 1978.

前者全用代数的工具, 它对概形有初步的介绍. 后者是一本所谓 "超越代数几何" (Transcendental Algebraic Geometry) 的课本, 即是说, 只讨论复投影空间 $P_n\mathbf{C}$ 内的代数簇, 而且大部分时间用上面所提的 (1) 的观点来讨论代数几何. 所以 Griffiths-Harris 这本书也是一般的紧复流形理论方面最完善的课本. Griffiths-Harris 的书中小错漏很多, 但它最难得的地方是极能把握要点, 而且很清楚地告诉读者每个定理或概念的直观意义. 这本书不讨论模 (moduli) 理论的最近发展 (见下面 §3 的注记), 但这缺陷可以用 Cornalba-Griffiths 的长文作补充:

M. Cornalba and P. A. Griffiths, Some transcendental aspects of algebraic geometry, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume XXIX, Amer. Math. Society Publications, 1975, 3—110.

希望读者在念完这本书后, 至少能够翻一翻 Griffiths-Harris 和 Cornalba-Griffiths 这两个文献. 这样对这方面的主要想法和大方向都会有一个更清楚的概念. 这种认识对于自己做研究工作时如何提问题和独自思考是很重要的.

下面两本书用近世代数手法来处理黎曼面理论 (上面的 (3)), 都是较初步的. 读者由这些文献中可以见到黎曼面与代数数论的关系:

M. Deuring, Lectures on the Theory of Algebraic Functions of One Variable, Springer-Verlag Lecture Notes, 1973.

S. Lang, Introduction to Algebraic Functions and Abelian Functions, Addison-Wesley Pub. Co., 1972.

学了一些近代概念后, 读者还应 "饮水思源", 找个机会看一些古老书籍以作借镜. 因为它们总结了上一代的精华, 我们是不能忽视的. 现只举出两本以作参考:

H. Hensel and G. Landsberg, Theorie der Algebraischen Funktionen einen Veränderlichen, Leipzig, 1902.

F. Severi, Vorlesungen über Algebraische Geometrie, Leipzig, 1921.

目　录

第一章 基本概念

§1 $P_n\mathbf{C}$ 的定义

为了以后的需要,我们在这节定义 n 维复投影空间 $P_n\mathbf{C}$,然后直观地讨论它的几何意义. 在这节之末将概括地讨论 $P_2\mathbf{C}$ 内的平面曲线和黎曼面的密切关系.

所谓 n 维投影空间 $P_n\mathbf{C}$,就是如下的商空间:

$$P_n\mathbf{C} \equiv \mathbf{C}^{n+1} - \{0\}/\sim,$$

这里 $\sim$ 表示等价关系: $(z_0, \cdots, z_n) \sim (z_0', \cdots, z_n') \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{C}$ 使 $z_\alpha = \lambda z_\alpha', \forall \alpha = 0, \cdots, n$. 注意: 根据 $P_n\mathbf{C}$ 的定义,我们只考虑非原点的 $(z_0, \cdots, z_n)$,即至少有一个 $z_i \neq 0$. 所以上面这个 λ 是恒不等于 0 的.

一般用 $[z_0, \cdots, z_n]$ 来表示 $(z_0, \cdots, z_n)$ 的等价类. 所以 $(z_0, \cdots, z_n) \to [z_0, \cdots, z_n]$ 定义一个自然投影 $\pi: \mathbf{C}^{n+1} - \{0\} \to P_n\mathbf{C}$. 现在利用 π 在 $P_n\mathbf{C}$ 上引进拓扑: W 为 $P_n\mathbf{C}$ 内的开集的充要条件是 $\exists W' \subset \mathbf{C}^{n+1} - \{0\}, W'$ 是 $\mathbf{C}^{n+1}$ 内的开集,而且 $\pi(W') = W$ (这个当然就是常用的商拓扑). 由定义 π 是开映照.

定义 $P_n\mathbf{C}$ 内 $n+1$ 个常用的子集:

$$U_\alpha = \{[z_0, \cdots, z_n] : z_\alpha \neq 0\}, \quad \alpha = 0, \cdots, n.$$

为了记号上的简便,现在只讨论 $\alpha = 0$ 的情况,但一切结论自然对所有的 α 都成立. 命 $U_0' \equiv \{(1, z_1, \cdots, z_n) : z_i \in \mathbf{C}\}$,则 U_0' 与 U_0 有一个一一对

应: $(1, z_1, \cdots, z_n) \mapsto [1, z_1, \cdots, z_n]$. 同时 U_0 是 $P_n\mathbf{C}$ 内的开集, 因 $\pi^{-1}(U_0)$ 是 $\mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$ 内的开集 $\{(z_0, \cdots, z_n) : z_0 \neq 0\}$. 如果用 $\approx$ 表示同胚, 便有

$$U_0' \approx \mathbf{C}^n \approx U_0.$$

现在,

$$P_n\mathbf{C} - U_0 = \{[0, z_1, \cdots, z_n] : z_i \in \mathbf{C}, \text{ 且有 } j \geqslant 1 \text{ 使 } z_j \neq 0\}.$$

因此直接由定义可验证

$$P_n\mathbf{C} - U_0 \approx P_{n-1}\mathbf{C}.$$

我们称 $P_n\mathbf{C} - U_0$ 为 $P_n\mathbf{C}$ (对于 U_0 的) 在 ∞ 处的超平面. 总结这讨论, 我们可直观地说: $P_n\mathbf{C}$ 是 $\mathbf{C}^n$ 在 ∞ 处加上一个超平面.

我们要继续用直观办法讨论 $P_n\mathbf{C}$ 的几何意义. 这是因为上面 $P_n\mathbf{C}$ 的定义是纯代数的, 这种形式化的定义不易吸收, 所以我们要强调几何直观上的理解. 现在要面对的现实就是当 $n > 1$ 时, $P_n\mathbf{C}$ 的 "实维" 已大过 3, 因此很难在这种情况下作直观的讨论. 同时 $n = 1$ 时又太特殊. 唯一的折衷办法就是跑进实域 $\mathbf{R}$ 内研究 "实投影空间" $P_2\mathbf{R}$ 或 $P_3\mathbf{R}$, 然后用比喻的方法回到复域上去了解 $P_n\mathbf{C}$. 这种 "从小窥大" 的办法, 用作培养对一个抽象概念的直观, 在数学上是很普通的. 希望大家今后能养成这种习惯.

现在看看 $P_2\mathbf{R}$ 吧. 这就是熟悉的实投影平面, 其定义是与 $P_n\mathbf{C}$ 无异的:

$$P_2\mathbf{R} \equiv \mathbf{R}^3 - \{0\}/\sim,$$

其中等价关系 $\sim$ 的定义是: $(x_1, x_2, x_3) \sim (x_1', x_2', x_3') \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R} \ni x_i = \lambda x_i', \forall i = 1, 2, 3$. 用 $[x_1, x_2, x_3]$ 来表示 (x_1, x_2, x_3) 的等价类. 这个代数上的定义, 自然与大家对 $P_2\mathbf{R}$ 的直观认识 ("$P_2\mathbf{R}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 加上很多无穷远点, 使所有 $\mathbf{R}^2$ 上的平行线在 $P_2\mathbf{R}$ 中有相交点") 大有出入. 现在我们从这代数的定义作一些推论, 以便给这个 "形式定义" 与 "几何直观" 之间作一个联系.

设 $U_0 \equiv \{[1, x, y] : x, y \in \mathbf{R}\}$, 则如前定义 $P_2\mathbf{R}$ 之拓扑, 有 $U_0 \approx \mathbf{R}^2$, 而且

$$P_2\mathbf{R} - U_0 = \{[0, 1, y] : y \in \mathbf{R}\} \cup \{[0, 0, 1]\}.$$

记 $L_\infty \equiv P_2\mathbf{R} - U_0$. L_∞ 称为在无穷远的直线. 现设在 $\mathbf{R}^2$ 上有两条平行直线

$$L_1 : ax + by + c = 0,$$
$$L_2 : ax + by + c' = 0,$$

这里 $c \neq c'$. 无妨设定 $b \neq 0$, 此即表示这两条直线不是与 x 轴垂直的. 设 $p_1 \in L_1, p_1 = (x, y)$. 今将 L_1 看成 U_0 内 (故在 $P_2\mathbf{R}$ 内) 的子集, 即将 (x, y) 与

$[1,x,y]$ 认同. 由于 $P_2\mathbf{R}$ 是拓扑空间, 故可取极限. 因此当 p_1 沿着 L_1 走到无穷远时,

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{p_1\to\infty\\ p_1\in L_1}} p_1 &= \lim_{x\to\pm\infty}[1,x,y] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[1,x,\frac{-ax-c}{b}\right]\\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{x},1,\frac{-ax-c}{-bx}\right] = \left[0,1,\frac{-a}{b}\right].\end{aligned}$$

$-\frac{a}{b}$ 是直线 L_1 的斜率, 所以 p_1 在 $P_2\mathbf{R}$ 内的极限只依赖 L_1 的斜率. 因此如果 $p_2\in L_2$ 而 $p_2\to\infty$, 则 p_2 在 $P_2\mathbf{R}$ 亦收敛于 $[0,1,\frac{-a}{b}]$. 故 $L_1\cap L_2=\{[0,1,\frac{-a}{b}]\}$ (在 $P_2\mathbf{R}$ 内).

现在剩下的就是 $b=0$ 的情况. 此时直线在无穷远处, 在 $P_2\mathbf{R}$ 的坐标即为 [0, 0, 1]. 所以 L_∞ 即为所有 $\mathbf{R}^2$ 内直线在无穷远处的极限, 亦即是所有 $\mathbf{R}^2$ 内平行直线相交点所成之集. 以上就给 L_∞ 一个直观的解释.

回到 $P_n\mathbf{C}$ 的情况, 对应于 $\mathbf{R}^2$ 内的直线就是 $\mathbf{C}_n$ 内的超平面 $a_1z_1+\cdots+a_nz_n+b=0, a_i,b\in\mathbf{C},\forall i$, 而且至少有一个 $a_i\neq 0$. 将 $\mathbf{R}^2$ 内平行直线的定义作形式上的推广, 就得定义: $a_1z_1+\cdots+a_nz_n+b=0$ 与 $a_1'z_1+\cdots+a_n'z_n+b'=0$ 平行, 如果 $a_i=a_i',\forall i$. (如我们用 $\mathbf{C}^n$ 内的典范 Hermit 内积来解释这定义, 则两超平面平行 $\Rightarrow$ 它们与同一个复 1 维子空间正交.) 上面 $P_2\mathbf{R}$ 的推论自然使我们猜测:

(*) $P_n\mathbf{C}$ 在 ∞ 处的超平面 $P_n\mathbf{C}-U_0$ 就是所有 $\mathbf{C}^n$ 内平行超平面在无穷远处相交的点集.

猜测 (*) 的证明也不难. 事实上用前面对 $P_2\mathbf{R}$ 的推论就可将 (*) 证明了. 为了简便起见, 现用稍微不同的一个证明. 命 H 为超平面 $a_1z_1+\cdots+a_nz_n+b=0$. 因为我们将 U_0 与 $\mathbf{C}^n$ 认同, 故

$$H=\{[1,\zeta_1,\cdots,\zeta_n]:a_1\zeta_1+\cdots+a_n\zeta_n+b=0\}.$$

今考虑 $P_n\mathbf{C}$ 内的子集

$$H^*\equiv\{[z_0,\cdots,z_n]:bz_0+a_1z_1+\cdots+a_nz_n=0\}.$$

注意 H^* 的定义是合理的. 现有

$$\begin{aligned}H^*\cap U_0 &= \{[z_0,\cdots,z_n]:z_0\neq 0, bz_0+a_1z_1+\cdots+a_nz_n=0\}\\ &= \left\{\left[1,\frac{z_1}{z_0},\cdots,\frac{z_n}{z_0}\right]:a_1\left(\frac{z_1}{z_0}\right)+\cdots+a_n\left(\frac{z_n}{z_0}\right)+b=0\right\}\\ &= H.\end{aligned}$$