

坚硬顶板的力学特性分析

潘 岳 顾士坦 王志强 著



科学出版社

坚硬顶板的力学特性分析

潘 岳 顾士坦 王志强 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

坚硬顶板的力学特性是矿压分析中的一个重要内容。本书前三章分别对全弹性地基支承顶板、垫层为软化、弹性(可假定为弹性地基)两区段支承顶板和垫层为软化、硬化、弹性三区段支承顶板的力学特性进行分析,据所得表达式用 Matlab 软件给出算例。附录给出计算程序,读者可方便地用程序绘出坚硬顶板的弯矩、挠度、剪力和计算支承压力的分布图形。

本书可供煤炭、矿山、水利、土木、国防、交通、铁道、工程地质等系统的科技工作者及相关专业的高等院校师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

坚硬顶板的力学特性分析/潘岳,顾士坦,王志强著. —北京:科学出版社, 2017. 6

ISBN 978-7-03-053481-1

I. ①坚… II. ①潘… ②顾… ③王… III. ①坚硬顶板-力学-研究
IV. ①TD327.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 136624 号

责任编辑:陈玉琢/责任校对:彭 涛

责任印制:张 伟/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京数图印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 6 月第 一 版 开本:720×1000 B5

2017 年 6 月第一次印刷 印张:15 1/4

字数:300 000

定价:89.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

坚硬顶板的力学特性是矿压分析中的一个重要内容。作者对坚硬顶板力学特性的分析缘自一篇关于坚硬顶板的论文,由该论文插图中坚硬顶板上作用隆起分布的增压荷载想到上覆荷载隆起分布部分可以用尺度参数不同的两个韦布尔分布函数的半峰去表达,开始对弹性地基支承和隆起增压荷载作用的坚硬顶板的力学特性作某些分析。在看到支承压力的文献,特别是注意到钱鸣高院士等 1998 年煤炭学报第 2 期论文《采场覆岩中关键层上荷载的变化规律》第 1 段中关于软岩层对坚硬顶板支承关系的论述:“传统矿压分析中……,将下部软岩层的支承作用简化为弹性地基,如果要较精确全面地分析坚硬顶板的力学特性和活动规律,这样的简化显然不能满足实际要求”时,联系全弹性地基支承假定顶板的分析结果,发现工作面前方的顶板下沉量在煤壁处最大,而弹性地基对顶板的反力与顶板下沉量成正比,这样煤层-直接顶垫层对顶板的反力或支承压力在煤壁处最大。实际测定表明:煤层-直接顶垫层对顶板的反力峰或支承压力峰位置在煤壁前方,由于破裂软化,来压前煤壁附近垫层对顶板的反力或支承压力比其前方支承力峰值已有很大减小,全弹性地基支承假定顶板的分析结果与实际有较大差别。在此认识基础上,对煤壁到支承压力峰垫层为软化状态、支承压力峰前方垫层为弹性状态(可假定为弹性地基)的两区段支承顶板与煤壁到支承压力峰垫层为软化状态,支承压力峰前方垫层为硬化状态和再前方为弹性状态的三区段支承顶板作某些分析,发现支承压力分布形态和垫层软化区深度对顶板弯矩峰值和弯矩峰超前距影响显著。现将这些分析内容汇编成书,其内容可为对坚硬顶板力学特性有兴趣或拟对之作进一步研究的人士提供参考。

全弹性地基支承假定顶板的力学分析是两区段支承顶板和三区段支承顶板力学分析的基础。由于两区段支承顶板与三区段支承顶板问题包含全弹性地基支承假定顶板分析的全部内容,三区段支承顶板问题包含两区段支承顶板分析的全部内容,所以作者在撰写两、三区段支承顶板力学分析时,某些内容直接引自全弹性地基支承顶板的章节而不再作专门介绍,故本书先介绍全弹性地基支承假定顶板的内容,然后是两区段支承顶板,再后是三区段支承顶板,分析逐步深入、升级。由于分段较多(最多时为 6 段),所以书中数学表达式众多,所有表达式均经严格推导给出,并据以编程、绘图倒过来对其正确性进行验证。本书主要内容曾以论文形式发表,撰写本书时已对全书语句重新编辑、修饰以增加可读性,算例中图形全部重新绘制。原论文没有程序,本书附录中给出每一节的计算程序,用这些程序可重复算例。特

别是读者和现场技术人员可以自己在程序中输入采场各种参数值, 用 Matlab 软件方便地绘出相应参数值的坚硬顶板弯矩、挠度、剪力和弯曲应变能密度分布图形。

本书各节理论推导、表述尽量避免重复, 顾及每一节的相对独立性以及为了表述便捷和读者阅读方便, 在每节的积分常数求解方面有一定的重复。需要说明, 不同采场岩层状况千差万别, 书中算例所取参数值与实际坚硬顶板采场参数值会有出入, 但算例中曲线反映了顶板力学特性的变化趋势。与采场顶板上覆分布荷载、实测支承压力、顶板反弹信息和采场其他方面参数广泛、深入结合, 可为包括对坚硬顶板下沉、超前断裂和超前断裂距预测在内的矿压分析、顶板活动规律的了解提供参考。

原论文发表和本书出版得到国家自然科学基金项目《深部条带煤柱开采冲击地压诱灾机理及防治理论基础》(编号: 51374140) 和《厚层坚硬顶板变形能积聚与断裂能释放规律研究》(编号: 51204102) 经费支持, 在此表示感谢。

限于作者水平, 书中难免存在缺点和不足, 敬请同行、专家批评指正。

潘 岳

2016 年 12 月于青岛理工大学

目 录

前言

第 1 章 基于弹性地基的坚硬顶板力学特性	1
1.1 坚硬顶板破断模型和分析模型	1
1.2 周期来压期间基于弹性地基的坚硬顶板力学特性分析	6
1.2.1 岩梁挠度微分方程和弯矩方程	7
1.2.2 岩梁挠度微分方程的求解	8
1.2.3 挠度方程中积分常数的确定	12
1.2.4 算例	15
1.2.5 M_m, Q_m 不为零时的岩梁弯矩、剪力	21
1.2.6 小结	22
1.3 初次来压前基于弹性地基的坚硬顶板力学特性分析	23
1.3.1 岩梁各区段挠度方程的解	23
1.3.2 挠度方程中积分常数的确定	26
1.3.3 算例	29
1.3.4 小结	34
1.4 周期破断期间裂纹发生初始阶段坚硬顶板的内力、挠度和应变能变化分析	35
1.4.1 强度条件和坚硬顶板裂纹发生初始阶段的分析模型	36
1.4.2 裂纹发生初始阶段坚硬顶板各区段的挠度方程和边界、连续条件	39
1.4.3 挠度方程中积分常数的确定	41
1.4.4 挠度方程式 (1.4.12) 中与 $k(<1)$ 对应的 η 值的确定方法	46
1.4.5 算例	47
1.4.6 小结	51
1.5 初次来压前裂纹发生初始阶段坚硬顶板的内力变化和“反弹”特性分析	52
1.5.1 强度条件和裂纹发生初始阶段的坚硬顶板力学模型	53
1.5.2 裂纹发生初始阶段坚硬顶板的挠度方程和边界条件、连续条件	55
1.5.3 挠度方程中积分常数的确定	57
1.5.4 挠度方程式 (1.5.6) 中与 $k(<1)$ 对应的 η 值的确定	62
1.5.5 算例	64

1.5.6 小结	68
第 2 章 基于软化地基和弹性地基的坚硬顶板力学特性分析	70
2.1 周期来压期间基于软化地基和弹性地基的坚硬顶板力学特性分析	70
2.1.1 分析模型	71
2.1.2 岩梁各区段的挠度方程、边界条件和连续条件	73
2.1.3 挠度方程中积分常数的确定	75
2.1.4 支承压力峰值 f_{c3} 的确定法和验证法	79
2.1.5 软化地基和弹性地基两区段支承的岩梁力学特性算例	80
2.1.6 煤层的计算支承压力	86
2.1.7 小结	86
2.2 初次来压前基于弹性地基和软化地基的坚硬顶板力学特性分析	87
2.2.1 分析模型	87
2.2.2 岩梁各区段的挠度方程、边界条件和连续条件	87
2.2.3 挠度方程中积分常数的确定	92
2.2.4 工作面推进某阶段坚硬顶板的力学特性	97
2.2.5 悬顶距离增大时的计算煤层支承压力	104
2.2.6 小结	105
第 3 章 煤层软化、硬化区对坚硬顶板力学特性影响分析	107
3.1 周期来压期间煤层软化、硬化区对坚硬顶板弯矩特性影响分析	107
3.1.1 煤层兼具软化、硬化和弹性状态概念的提出	107
3.1.2 分析模型	108
3.1.3 岩梁各区段的挠度方程、边界条件和连续条件	110
3.1.4 挠度方程中积分常数的确定	115
3.1.5 煤层弹性、硬化区的反力连续和煤层支承压力峰值 f_{c3} 的确定、验证法	118
3.1.6 岩梁上覆荷载、煤层支承压力峰值	118
3.1.7 煤层软化区支承压力尺度参数 x_{c3} 变动时的岩梁力学特性	120
3.1.8 煤层硬化区支承压力尺度参数 x_{c4} 变动时的岩梁力学特性	125
3.1.9 分析与讨论	130
3.1.10 小结	131
3.2 支承压力分布差异对坚硬顶板超前断裂距的影响分析	132
3.2.1 分析模型	133
3.2.2 岩梁各区段的挠度方程、边界条件和连续条件	136
3.2.3 挠度方程中积分常数的确定	141
3.2.4 煤层弹性、硬化区反力连续和煤层支承压力峰值 f_{c3} 的确定、验证法	148
3.2.5 煤层硬化区支承压力尺度参数 x_{c4} 变动时的岩梁力学特性	150

3.2.6	煤层软化区深度 ($l - l_3$) 变化时的岩梁力学特性	155
3.2.7	小结	161
3.3	支承压力峰位于煤体本构关系硬化阶段之推断	162
3.3.1	问题的提出	162
3.3.2	摄动法确定三段式光滑连接的本构模型	165
3.3.3	轴对称问题的应力、应变和位移	167
3.3.4	围岩应力分布规律	169
3.3.5	围岩体软化半径 R 和 σ_θ/p_0 曲线峰位置的分析确定	171
3.3.6	小结	174
附录 1	1.2 节表达式计算程序	176
附录 2	1.3 节表达式计算程序	181
附录 3	1.4 节表达式计算程序	186
附录 4	1.5 节表达式计算程序	195
附录 5	2.1 节表达式计算程序	203
附录 6	2.2 节表达式计算程序	210
附录 7	3.1 节表达式计算程序	217
附录 8	3.2 节表达式计算程序	224
参考文献		234

第 1 章 基于弹性地基的坚硬顶板力学特性

1.1 坚硬顶板破断模型和分析模型

坚硬顶板是指煤层和厚度较薄的直接顶上赋存有强度高、厚度大、整体性强、煤层开采后在采空区可大面积暴露、短期内不易自然冒落的顶板。当悬顶达到其极限步距时顶板会发生断裂。对于超前断裂的坚硬顶板，工作面接近断裂线下方且当支护力、岩层间摩擦力不足时，会发生顶板台阶式下沉或压、推垮事故，现场技术人员十分重视坚硬顶板超前断裂线位置的预报。20 世纪 90 年代之前，文献中对破断坚硬顶板的描述多是顶板破断迹线的外侧为矩形，中部呈 X 形，如图 1.1 所示。外侧为矩形破断迹线图的描述基于将煤壁前方煤岩体视为刚性体^[1]之认识。四周为刚性基础支承，在均布荷载下顶板最大弯矩位于四周的煤壁位置，由最大拉应力强度条件推得顶板破断迹线图外侧为矩形。

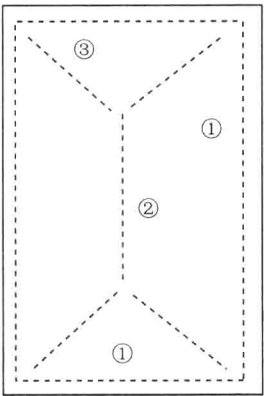


图 1.1 刚性基础的坚硬顶板破断形态

实际煤壁前方的煤岩体为变形体。由结构力学可知，置于变形体之上、受均布荷载作用的坚硬顶板最大弯矩不在煤壁上方，而在煤壁前方。据此，由最大拉应力强度条件推得坚硬顶板将于煤壁前方发生断裂，即超前断裂。这与现场通常情况下观察到的顶板超前断裂现象相一致。如此，实际坚硬顶板破断迹线图外侧就不为矩形。图 1.2 为李其仁等^[2]据大同矿务局云岗矿大量实际观测资料绘出的反映坚硬顶板超前断裂的顶板破断迹线图。

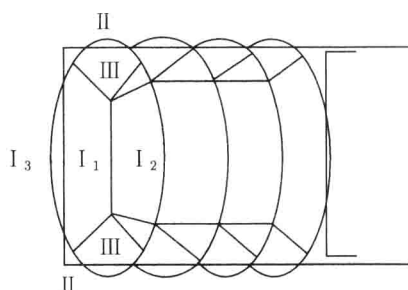


图 1.2 变形体基础的坚硬顶板破断形态 [2]

图 1.3 为钱鸣高等 [3] 绘制的理想条件下坚硬顶板破断迹线图: 当悬顶达到其极限步距时坚硬顶板发生**初次破断** (图 1.3(a)), 破断迹线外侧为椭圆形, 中部呈 χ 形; 初次破断顶板垮落后, 随推采坚硬顶板的采空区一侧形成半悬顶, 当半悬顶达到其极限步距时发生破断 (图 1.3(b)), 此后每当悬顶达到极限步距时都发生破断, 称之为**周期破断**。坚硬顶板周期破断迹线为半椭圆形。

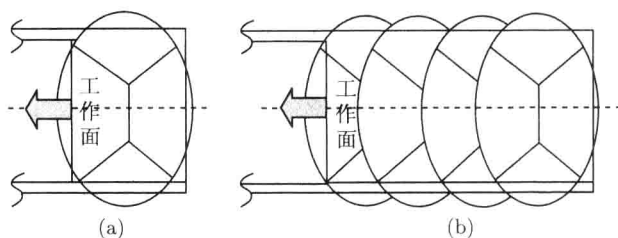


图 1.3 坚硬顶板破断的形态 [3]

(a) 坚硬顶板的初次破断; (b) 坚硬顶板的周期破断

采场工作面很长, 图 1.3 采场中轴线附近的顶板弯矩、挠度最大, 无论是初次破断还是周期破断, 工作面中央顶板超前破断深度最大, 也最先破断 [1] (对于初次破断, 也有在采空区跨中先断裂的, 但很少发生)。鉴于此种情况, 为简化分析, 研究者一般沿图 1.3 采场中轴线取单位宽岩层结构, 对坚硬顶板中部的内力、挠度特性进行研究。1.2~3.2 节也将按此取单位宽岩层结构的简化研究方法, 对中轴线附近的坚硬顶板力学特性进行分析。

图 1.4 和图 1.5 为曹安业等 [4] 绘出的初次来压和周期来压期间坚硬顶板破断示意图。图 1.4 中在煤壁前方顶板上侧先出现裂缝——超前断裂, 与此同时, 顶板



图 1.4 坚硬顶板初次来压破断示意图 [4]

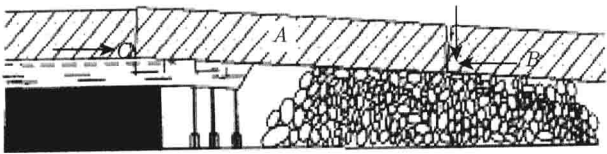


图 1.5 周期来压期间坚硬顶板破断示意图 [4]

回转, 在采空区中央下侧出现裂缝. 图 1.5 描述周期来压期间顶板发生超前破断形态.

图 1.4 和图 1.5 中没有绘出坚硬顶板上覆荷载的分布形态和煤壁前方煤层—直接顶对坚硬顶板反力或支承压力的分布形式. 波兰学者鲍莱茨基 [5] 和国内学者钱鸣高等 [6]、钟新谷 [7]、缪协兴等 [8] 将煤层—直接顶对坚硬顶板的支承关系假定为 Winkler 弹性地基, 对受均布荷载作用的坚硬顶板的弯矩、挠度进行分析, 得到顶板最大弯矩在煤壁前方、顶板发生超前断裂等基本分析结果.

钱鸣高等 [9] 对初次破断前基本顶和覆岩关键层上方荷载分布所作的有限元分析表明, 煤壁前方基本顶承受隆起分布的增压荷载, 增压荷载峰值位于煤壁前方, 如图 1.6 所示. 图 1.6 中 $\sum h_3 = 200\text{m}$ 大致对应 400m 埋深, 增压荷载峰值 $\tilde{q}_{1\max}$ 与 150m 前方平均荷载 $\tilde{q}_1$ 的比值: $\tilde{q}_{1\max}/\tilde{q}_1 \approx 1.2 \sim 1.22$, 平均荷载 $\tilde{q}_1$ 反映了采场埋深. 图 1.6 中 $\tilde{q}_{1\min}$ 为采空区跨中顶板所受荷载, 显然 $\tilde{q}_{1\min} \ll \tilde{q}_1$, 这反映了采空区跨中部位顶板向下方的形变、位移允许量大, 以及采空区跨中部位顶板的离层倾向.

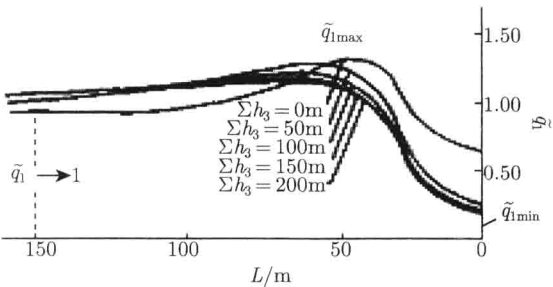


图 1.6 顶板上覆荷载与埋深关系 [9]

受到文献 [9] 思想的影响, 李新元等 [10] 绘出初次破断期间基于弹性地基的坚硬顶板力学模型如图 1.7 所示, 其中顶板上覆荷载的增压荷载峰值位于煤壁前方, 顶板发生超前破断. 文献 [10] 在实际分析中, 采用的是: 工作面煤壁前方顶板受均布荷载和超前线性分布荷载 (其中最大荷载集度位于煤壁上方), 煤壁上方顶板截面的弯矩和剪力被假定为采空区上方两端固支梁受均布荷载在固定端所产生的反力.

图 1.7 坚硬顶板破断后岩层结构和应力状态^[10]

图 1.8 为潘岳等^[11]绘出的基于全弹性地基的,受平均荷载、隆起增压荷载作用的初次破断前坚硬顶板力学模型,图中假定右方煤壁也设置支护.如此,图 1.8 中结构与荷载关于采空区跨中截面为正对称.由结构力学可知,正对称体系跨中截面反对称内力为零,即 $Q(l+L)=0$;跨中截面转角为零,即 $y'_1(L+l)=0$.将图 1.8 岩梁跨中截断后用定向支承来代替,可得其半结构模型,如图 1.9 所示.图中右端的反力偶 $M(l+L) \neq 0$, $M(l+L)$ 要由 $y'_1(L+l)=0$ 的几何条件确定.

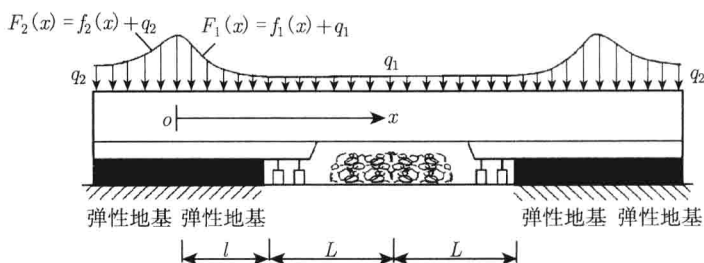
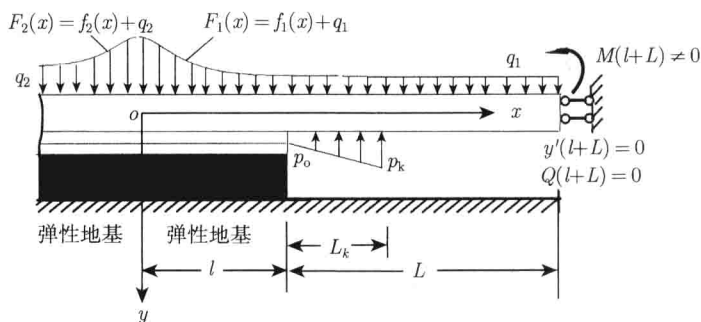
图 1.8 基于全弹性地基的坚硬顶板初次破断前岩层结构及荷载状况^[11]图 1.9 基于全弹性地基的坚硬顶板初次断裂前的半结构模型^[11]

图 1.10 为潘岳等^[12]绘出的基于全弹性地基的,受平均荷载、隆起增压荷载作用的周期来压期间未破断坚硬顶板的力学模型,图中 Q_m 为图 1.5 后方已断裂砌体梁对前方岩梁施加的摩擦力, M_m 为相应断裂砌体梁施加的水平挤压力因低(或高)于中性轴 ox 而对前方岩梁形成的力偶.

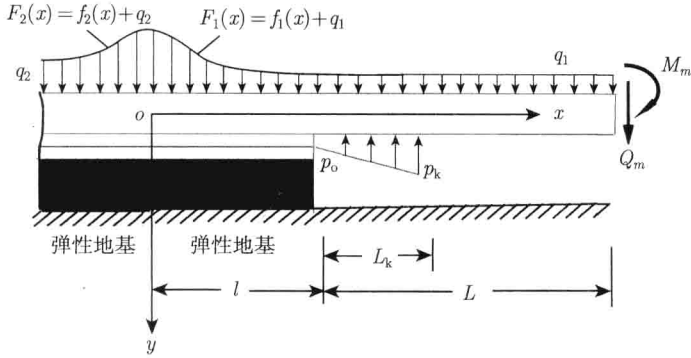


图 1.10 基于全弹性地基、周期来压期间未破断坚硬顶板的力学模型 [12]

图 1.8~ 图 1.10 中坐标原点 o 设于增压荷载峰下方, l 为增压荷载峰到煤壁的距离, L 为采空区半跨长或跨长, 亦称悬顶距离; L_k 为控顶距, p_o, p_k 为支护强度, $p_k \geq p_o$; $F_1(x) = q_1 + f_1(x)$, $F_2(x) = f_2(x) + q_2$ 为增压荷载峰后方和前方的顶板分布荷载, 其中 q_1, q_2 为均布荷载, 在远离荷载峰的位置顶板荷载分别趋于均布荷载 q_1, q_2 . 其中 q_2 反映了顶板的埋深, 后文称平均荷载; q_1 反映了顶板自重, $q_1 = \gamma_1 h$. γ_1 为坚硬顶板容重, h 为顶板厚; 弹性地基的刚度记为 C , 地基反力 q_c 与梁的竖向位移 y 成正比, 即 $q_c = -Cy$.

图 1.9 和图 1.10 中的

$$f_1(x) = k_1(x + x_{c1})e^{-\frac{x+x_{c1}}{x_{c1}}}, \quad (0 \leq x \leq l + L) \quad (1.1.1)$$

$$f_2(x) = k_2(x_{c2} - x)e^{\frac{x-x_{c2}}{x_{c2}}}, \quad (-\infty < x \leq 0) \quad (1.1.2)$$

均为半个韦布尔分布函数. 式 (1.1.1), (1.1.2) 中

$$k_1 = f_{c1}e/x_{c1}, \quad k_2 = f_{c2}e/x_{c2} \quad (1.1.3)$$

k_1, k_2 的单位为 N/m^2 , f_{c1}, f_{c2} 的单位为 N/m . x_{c1}, x_{c2} 分别为 $f_1(x), f_2(x)$ 的尺度参数, 单位为 m .

可以用式 (1.1.1), (1.1.2) 模拟图 1.8~ 图 1.10 中的增压荷载. 式 (1.1.1) 中 $x = 0$ 时 $f_1(0)$ 等于其峰值 f_{c1} , 在峰值处 $f'_1(0) = 0$. f_{c1} 大则 $f_1(x)$ 的峰值大, 可以通过改变 f_{c1} 来调节图 1.8 增压荷载峰值的大小; $x \rightarrow \infty$ 时 $f_1(\infty) = 0$, 可以通过增大或减小 x_{c1} 调节在 $x \rightarrow \infty$ 的过程中, $f_1(x) \rightarrow 0$ 的缓、急程度; $f_2(x)$ 有类似性质, $x = 0$ 时 $f_2(0)$ 等于 $f_2(x)$ 峰值 f_{c2} , 在峰值处 $f'_2(0) = 0$. 不同之处是: $x \rightarrow -\infty$ 时, $f_2(-\infty) = 0$. 对以上两式取 $f_{c1} = f_{c2} = 5N/m$, $x_{c1} = 6m$, $x_{c2} = 8m$, 用 Matlab 软件绘出 $f_1(x)$ 在区间 $[0, 30]$ 和 $f_2(x)$ 在区间 $[-40, 0]$ 的曲线部分如图 1.11 所示. 从

图 1.11 看到, $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 可以恰当地模拟图 1.8~ 图 1.10 中煤壁前方的隆起分布的增压荷载.

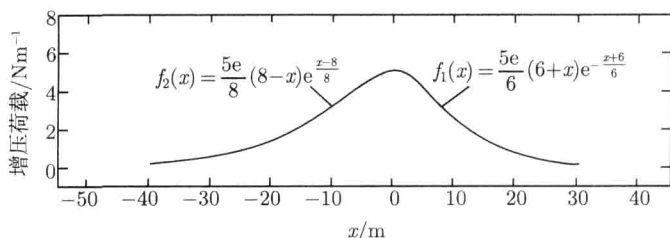


图 1.11 $f_1(x), f_2(x)$ 在 $x=0$ 附近的图形

图 1.8~ 图 1.10 中 $x=0$ 后方的顶板荷载可用 [12]

$$F_1(x) = q_1 + f_1(x) = k_1(x + x_{c1})e^{-\frac{x+x_{c1}}{x_{c1}}} \quad (1.1.4)$$

表示, $x=0$ 前方的顶板荷载可用 [12]

$$F_2(x) = q_2 + f_3(x) = k_2(x_{c2} - x)e^{\frac{x-x_{c2}}{x_{c2}}} \quad (1.1.5)$$

表示. 由式 (1.1.1)~(1.1.5), 可得到 $x=0$ 处的关系式

$$q_1 + f_{c1} = q_2 + f_{c2} \quad \text{或} \quad f_{c1} - f_{c2} = q_2 - q_1 \quad (1.1.6)$$

$f_{c1} + q_1, f_{c2} + q_2$ 为 $x=0$ 处的顶板荷载峰值, 由于 $q_2 \gg q_1$, 并且顶板荷载连续, 故式 (1.16) 中 $f_{c1} \gg f_{c2}$. 式 (1.1.4) 保证了图 1.8~ 图 1.10 中 $x=0$ 处顶板荷载的连续, 前述的 $f'_1(0) = 0, f'_2(0) = 0$ 保证了图 1.8~ 图 1.10 中 $x=0$ 处光滑连续.

1.2~3.2 节中均采用式 (1.1.1)~(1.1.6) 表示顶板上覆荷载, 届时对其性态不再作介绍.

1.2 周期来压期间基于弹性地基的坚硬顶板力学特性分析

1.1 节中图 1.10 所示结构在右端剪力 Q_m 和力偶 M_m 已知情况下是静定结构, 而图 1.9 所示结构是超静定结构, 故后者的求解难度要明显大于前者, 在力学中是两类不同的问题; 并且周期来压期间未破断坚硬顶板与初次来压前未破断坚硬顶板的力学特性在矿压分析中也是两个问题. 以下各章节将根据先易后难的顺序, 先求解静定的顶板问题, 再求解超静定的顶板问题, 在求解超静定问题时会利用静定问题中的部分结果.

1.2.1 岩梁挠度微分方程和弯矩方程

图 1.10 中 $(-\infty, 0]$ 区段、 $[0, l]$ 区段和 $[l, l+L]$ 采空区段岩层结构的隔离体如图 1.12^[12] 所示. 因沿图 1.3 中轴线取单位宽度研究, 图 1.12(a) 为受分布荷载 $F_2(x)$ 作用的半无限长弹性地基梁, 梁右端作用剪力 Q_o 和弯矩 M_o , 煤层—直接顶的支承关系假定为 Winkler 弹性地基. 记 $(-\infty, 0]$ 区段岩梁挠度为 $y_2(x)$, 在 $F_2(x)$ 、 Q_o 和 M_o 作用下弹性地基反力 q_c 与梁的竖向位移 y 成正比^[13], 即

$$q_c = -Cy \quad (1.2.1)$$

式中, C 为地基刚度常数, 负号是因反力与岩梁位移 (下沉量) y 的方向相反. 由式 (1.1.4), 可写出图 1.11(a) 弹性地基梁任意微段 dx 的挠度微分方程:

$$EIy_2^{(4)}(x) = q_2 + k_2(x_{c2} - x)e^{\frac{x-x_{c2}}{x_{c2}}} - Cy_2(x) \quad (x \leq 0) \quad (1.2.2)$$

若记 $\beta = [C/(4EI)]^{1/4}$, 可将式 (1.2.2) 写成

$$y_2^{(4)}(x) + 4\beta^4 y_2(x) = \frac{q_2}{EI} + \frac{k_2}{EI}(x_{c2} - x)e^{\frac{x-x_{c2}}{x_{c2}}} \quad (x \leq 0) \quad (1.2.3)$$

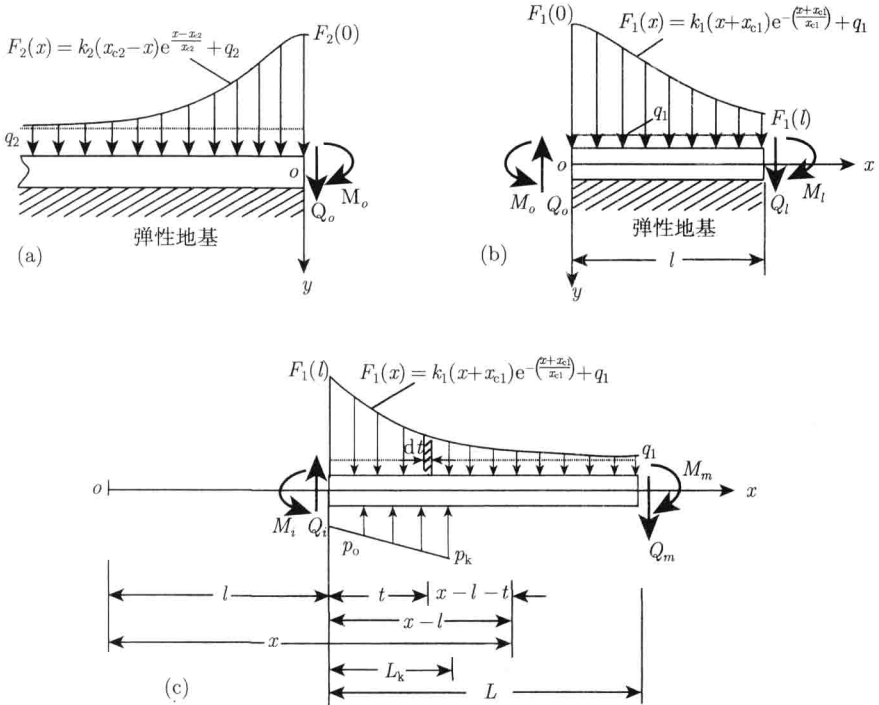


图 1.12 周期来压期间未破断岩层结构的隔离体图^[12]

图 1.12(b) 为受分布荷载 $F_1(x)$ 作用的有限长弹性地基梁, 梁左、右端分别作用内力 Q_o , M_o 和 Q_l , M_l . 记 $[0, l]$ 区段岩梁挠度为 $y_{21}(x)$, 类似于式 (1.2.3), 图 1.12(b) 弹性地基梁任意微段 dx 的挠度微分方程为

$$y_{21}^{(4)}(x) + 4\beta^4 y_{21}(x) = \frac{q_1}{EI} + \frac{k_1}{EI}(x + x_{c1})e^{-\frac{x+x_{c1}}{x_{c1}}} \quad (0 \leq x \leq l) \quad (1.2.4)$$

式 (1.2.4) 中的 β 同式 (1.2.3), 而 $T = 1/\beta = [4EI/C]^{1/4}$ 称为弹性地基梁的特征长度.

图 1.12(c) 为受分布荷载 $F_1(x)$ 和支护阻力作用的采空区悬臂梁, 梁左端作用剪力 Q_l 和弯矩 M_l . 记 $[l, l + L_k]$ 区段的岩梁挠度为 $y_{11}(x)$, $[l + L_k, l + L]$ 区段的岩梁挠度为 $y_{12}(x)$, 以 t 为参变量, 注意到图 1.12(c) 微段 dt 上的力为

$$k_1(l + t + x_{c1}) \exp[-(l + t + x_{c1})/x_{c1}] dt \quad (1.2.5)$$

对 x 截面取矩的写法, 梁上各荷载对 x 截面取矩, 可得用分段函数表示的采空区悬臂梁弯矩方程

$$\begin{aligned} E I y_{11}''(x) &= M(x) \\ &= M_l - Q_l(x - l) + \frac{1}{2} q_1(x - l)^2 \\ &\quad + \int_0^{x-l} k_1(l + t + x_{c1}) e^{-\frac{l+t+x_{c1}}{x_{c1}}} (x - l - t) dt \\ &\quad - \frac{1}{2} p_o(x - l)^2 - \int_0^{x-l} g t(x - l - t) dt \\ &\quad (l \leq x \leq l + L_k, \quad 0 \leq t \leq x - l \leq L_k) \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

$$\begin{aligned} E I y_{12}''(x) &= M(x) \\ &= M_l - Q_l(x - l) + \frac{1}{2} q_1(x - l)^2 + \int_0^{x-l} k_1(l + t + x_{c1}) e^{-\frac{l+t+x_{c1}}{x_{c1}}} (x - l - t) dt \\ &\quad - p_o L_k \left[(x - l) - \frac{L_k}{2} \right] - \frac{(p_k - p_o) L_k}{2} \left[(x - l) - \frac{2L_k}{3} \right] \\ &\quad (l + L_k \leq x \leq l + L, \quad 0 \leq t \leq x - l - L_k \leq L - L_k) \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

以上各式中的 E 为平面应变条件下顶板的弹性模量, I 为单位宽度顶板的惯性矩, p_o , p_k 分别为 $x = l$, $x = l + L_k$ 处的支护强度, $g = (p_k - p_o)/L_k$ 为支护阻力的斜率.

1.2.2 岩梁挠度微分方程的求解

1.2.2.1 弹性地基梁岩梁挠度微分方程的求解

式 (1.2.3) 的解由相应于式 (1.2.3) 的齐次线性微分方程的通解 $Y_2(x)$ 和式 (1.2.3) 的特解 $y_2^*(x)$ 组成. 式 (1.2.3) 是线性微分方程, 可运用叠加原理. 其非

齐次项是两项, 可以分别求解相应于式 (1.2.3) 右端第 1 项 q_2/EI 和第 2 项的特解 $y_2^{1*}(x)$, $y_2^{2*}(x)$, 相加后得 $y_2^*(x)$. 故式 (1.2.3) 的解可写为

$$y_2(x) = Y_2(x) + y_2^{1*}(x) + y_2^{2*}(x) \quad (1.2.8)$$

式 (1.2.3) 的齐次方程 $y_2^{(4)}(x) + 4\beta^4 y_2(x) = 0$ 的半无限长弹性地基梁通解^[11] 为

$$Y_2(x) = e^{\beta x} [d_1 \sin \beta x + d_2 \sin \beta x] \quad (1.2.9)$$

相应于式 (1.2.3) 中 $q_2/(EI)$ 的特解为

$$y_2^{1*}(x) = \frac{q_2}{4\beta^4 EI} \quad (1.2.10)$$

将相应于式 (1.2.3) 右端第 2 项的特解可设为

$$y_2^{2*}(x) = Q_2(x) e^{\frac{x-x_{c2}}{x_{c2}}} \quad (1.2.11)$$

由式 (1.2.11), $y_2^{2*}(x)$ 的 4 阶导数可写为

$$y_2^{2*(4)}(x) = e^{\frac{x-x_{c2}}{x_{c2}}} \left(\frac{1}{x_{c2}^4} Q_2(x) + \frac{4}{x_{c2}^3} Q_2'(x) + \frac{6}{x_{c2}^2} Q_2''(x) + \frac{4}{x_{c2}} Q_2'''(x) + Q_2^{(4)}(x) \right) \quad (1.2.12)$$

注意到式 (1.2.3) 等号右端第 2 项 x 的幂为 1, 令

$$Q_2(x) = b_0 x + b_1 \quad (1.2.13)$$

将式 (1.2.13) 代入式 (1.2.11), (1.2.12), 再将所得到的 $y_2^{2*}(x)$ 和 $y_2^{2*(4)}(x)$ 代入微分方程

$$y_2^{2*(4)}(x) + 4\beta^4 y_2^{2*}(x) = \frac{k_2}{EI} (x_{c2} - x) e^{\frac{x-x_{c2}}{x_{c2}}} \quad (1.2.14)$$

在等号两端消去 $\exp[(x - x_{c2})/x_{c2}]$, 比较 x 项和 x^0 项的系数, 可解得

$$b_0 x + b_1 = \frac{k_2}{EI} \cdot \frac{x_{c2}^4}{1 + 4\beta^4 x_{c2}^4} \left[(x_{c2} - x) + \frac{4x_{c2}}{1 + 4\beta^4 x_{c2}^4} \right] \quad (1.2.15)$$

将式 (1.2.13) 代入式 (1.2.11), 再将式 (1.2.9)~(1.2.11) 代入式 (1.2.8), 可得 $(-\infty, 0]$ 区段半无限长弹性地基梁的挠度方程为

$$y_2(x) = e^{\beta x} [d_1 \sin \beta x + d_2 \sin \beta x] + \frac{q_2}{4\beta^4 EI} + \frac{k_2}{EI} \cdot \frac{x_{c2}^4}{1 + 4\beta^4 x_{c2}^4} \left[(x_{c2} - x) + \frac{4x_{c2}}{1 + 4\beta^4 x_{c2}^4} \right] e^{\frac{x-x_{c2}}{x_{c2}}} \quad (-\infty < x \leq 0) \quad (1.2.16)$$