高等学校教材

概率论与数理统计

（第2版）

主编　赵　瑛　孙王杰

高等教育出版社

高等学校教材

概率论与数理统计

Gailülun yu Shuli Tongji

（第2版）

主　编　赵　瑛　孙王杰
副主编　王燕飞　薛冬梅

高等教育出版社·北京

内容提要

本书较系统地介绍了随机事件与概率、随机变量及其概率分布、多维随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理等概率论基本知识，以及数理统计的基本概念和参数估计、假设检验、方差分析与回归分析等数理统计的基本知识；在每章后面均配有相关内容的 Mathcad 实验，这不仅能使学生提高学习概率论与数理统计的兴趣，还能巩固和加深学生对所学知识的理解。 本次修订增改了部分习题，更加契合当前的教学要求，旨在提高学生将所学知识熟练应用的能力。

本书可作为高等学校理工科本科生的教材，也可作为工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 赵瑛，孙王杰主编. --2 版. --北京：高等教育出版社，2016.12
ISBN 978-7-04-047171-7

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①赵… ②孙… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 303410 号

策划编辑 李 蕊　责任编辑 高 丛　封面设计 李小璐　版式设计 童 丹
插图绘制 尹文军　责任校对 吕红颖　责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	北京机工印刷厂		http://www.hepmall.com
开　本	787mm×960mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	21.5	版　次	2013 年 8 月第 1 版
字　数	390 千字		2016 年12月第 2 版
购书热线	010-58581118	印　次	2016 年12月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	37.90 元

物 料 号　47171-00

第 2 版前言

本书是在 2013 年出版的《概率论与数理统计》基础上，根据近年的教学实践，特别是分类教学改革的实践进行修订的。

本次修订保持了第 1 版的结构和风格，对原书的一些疏漏和不妥之处作了修改，对其他各类问题也进行了增删和修改，特别是将教材中的习题重新审定了一遍，并删改了许多题目，增加了考研真题。修订工作力争体现创新的教学理念，并坚持以激发学生自主学习为目的，以提高学生的综合素质和创新能力为目标的原则。

本书由赵瑛、孙王杰主编，书中第一章到第六章由赵瑛编写，第七、八章及各章实验部分由孙王杰编写，第九章由王燕飞编写，第十章由薛冬梅编写，各章习题分别由王燕飞、薛冬梅编写，全书由赵瑛统稿。

自出版以来，使用本书的老师和同学相继提出了许多宝贵意见和建议，在此表示衷心的感谢，同时特别感谢吉林化工学院各级领导对我们给予的大力支持和帮助。

感谢高等教育出版社李蕊等编辑对本书的出版和再版所付出的辛勤劳动。

书中不妥之处，诚恳地希望广大读者批评指正。

编　者

2016 年 7 月

第 1 版前言

概率论与数理统计是一门历史悠久、但又新枝丛生的学科，是专门研究和探索客观世界中随机现象的内在规律的一门科学。它以研究随机现象本质及其统计规律的基本方法与应用为主要内容，在计算机、通信、金融、保险、经济与企业管理、工农业生产、军事、医学、地质学、空间技术、气象与自然灾害预报等领域有着广泛的应用。本门课程的学习不仅为学生专业课的学习奠定必要的理论基础，而且为学生提供很好的素质训练，因此概率论与数理统计是高等学校重要的数学基础课程之一。

考虑到概率论与数理统计课程的特点和工科类高等学校人才培养的目标，作者结合多年的教学经验，本着“强化基础、够用为度、突出实践、重在素质”的原则，在本书中着重介绍概率论与数理统计的基本概念、基本理论及基本方法，培养学生运用概率统计方法分析和解决实际问题的能力。同时注重概率统计的各个知识点的应用背景，使学生在掌握基础理论知识的同时，清楚地知道知识点的数学背景和实际背景，从而使学生面对实际问题时形成一种数学思维，这种处理方法有利于学生创新意识和能力的培养。书中还注意将数学知识、数学实验与数学模型结合起来，在数学实验中强调如何利用计算机及其软件来求解概率统计方面的数学模型。在每章后均配有相关内容的实验，目的是让学生自己动手，借助计算机，求解数学问题。

本书的编写力求结构合理、脉络清晰、概念准确、通俗易懂、注重实用，使读者能够了解一种有别于确定性方法的数学思想方法，在应用随机方法解决实际问题方面有所启迪。在例题、习题选编上充分注意基本概念、基本理论和基本方法的复习与巩固；紧密联系实际，启发学生的学习兴趣，同时也考虑到后续知识的引导.

本书由赵瑛、孙王杰主编，书中第一章到第六章由赵瑛编写，第七、八章及各章实验部分由孙王杰编写，第九章由王燕飞编写，第十章由薛冬梅编写，各章习题分别由王燕飞、薛冬梅编写，全书由赵瑛统稿。

杨金远教授认真审阅了本书，并提出了宝贵意见；赵树魁教授、陈巨龙教授、

郑志宏教授和林峰副教授也对本书提出建议，在此表示衷心的感谢。同时感谢吉林化工学院各级领导给予我们的大力支持和帮助。

教材中难免有不妥之处，热诚希望专家、同行和广大读者提出宝贵意见。

编　者

2013年5月

目　录

第一章　随机事件与概率 ……… 1

§1.1　随机事件 ……………………… 2
§1.2　随机事件的频率与概率 … 8
§1.3　古典概型与几何概型 …… 12
§1.4　条件概率……………………… 20
§1.5　事件的独立性 …………… 26
§1.6　伯努利型随机试验 ……… 30
小结 ……………………………………… 33
习题一…………………………………… 34
实验一　随机事件与概率 ……… 37

第二章　随机变量及其概率分布 ……………………… 41

§2.1　随机变量……………………… 41
§2.2　离散型随机变量及其分布律 ……………………… 42
§2.3　随机变量的分布函数 …… 46
§2.4　连续型随机变量及其概率密度…………………… 48
§2.5　随机变量的函数的分布…… 58
小结 ……………………………………… 61
习题二…………………………………… 62
实验二　随机变量及其概率分布 ……………………… 66

第三章　多维随机变量及其概率分布 ……………………… 71

§3.1　二维随机变量及其概率分布 ……………………… 71
§3.2　边缘分布…………………… 77
§3.3　条件分布…………………… 81
§3.4　随机变量的相互独立 …… 86
§3.5　两个随机变量的函数的分布 ……………………… 89
小结 ……………………………………… 97
习题三…………………………………… 98
实验三　多维随机变量及其概率分布 ……………… 103

第四章　随机变量的数字特征 ……………………… 109

§4.1　数学期望 ……………… 109
§4.2　方差 ……………………… 119
§4.3　协方差与相关系数 …… 125
§4.4　矩、协方差矩阵 ………… 129
§4.5　正态分布的应用举例 … 131
小结 ………………………………… 135
习题四 ……………………………… 136
实验四　随机变量的数字特征…………………… 139

第五章　大数定律及中心极限定理 ……………… 146

§5.1　大数定律 ……………… 146
§5.2　中心极限定理 ………… 150
小结 ………………………………… 154
习题五 ……………………………… 155

实验五 大数定律及中心极限定理 …… 156

第六章 数理统计的基本概念 …… 159

§6.1 总体与样本 …… 160
§6.2 统计量及其抽样分布 …… 161
小结 …… 172
习题六 …… 173
实验六 数理统计的基本概念 …… 174

第七章 参数估计 …… 182

§7.1 点估计 …… 182
§7.2 估计量的评选标准 …… 188
§7.3 区间估计 …… 190
§7.4 正态总体参数的区间估计 …… 191
§7.5 (0-1)分布参数的区间估计 …… 198
§7.6 单侧置信区间 …… 199
小结 …… 201
习题七 …… 204
实验七 参数估计 …… 207

第八章 假设检验 …… 216

§8.1 假设检验 …… 216
§8.2 正态总体均值的假设检验 …… 221
§8.3 正态总体方差的假设检验 …… 227
§8.4 置信区间与假设检验之间的关系 …… 229
小结 …… 232
习题八 …… 233
实验八 假设检验 …… 236

第九章 方差分析 …… 246

§9.1 单因素试验的方差分析 …… 246
§9.2 双因素试验的方差分析 …… 255
小结 …… 264
习题九 …… 265
实验九 方差分析 …… 268

第十章 回归分析 …… 274

§10.1 回归分析 …… 275
§10.2 参数估计 …… 278
§10.3 假设检验 …… 282
§10.4 预测与控制 …… 287
小结 …… 290
习题十 …… 292
实验十 回归分析 …… 294

附表 …… 308

习题答案 …… 317

参考文献 …… 333

第一章 随机事件与概率

概率论是一门研究客观世界随机现象数量规律的数学分支学科.

概率——随机事件出现的可能性的量度——其起源与博弈问题有关.1654年,一位名叫梅累的骑士就“两个赌徒约定赌若干局,且谁先赢 c 局便算赢家,若在一赌徒胜 a 局($a<c$),另一赌徒胜 b 局($b<c$)时便终止赌博,问应如何分配赌本”为题求教于帕斯卡,帕斯卡与费马通信讨论这一问题.后来惠更斯也加入了研究,并于 1657 年明确提出了数学期望的概念.

对客观世界中随机现象的分析产生了概率论;使概率论成为数学的一个分支的真正奠基人是瑞士数学家 J.伯努利,他建立了概率论中第一个极限定理,即伯努利大数定律;而概率论的飞速发展则是在 17 世纪微积分学建立以后.第二次世界大战军事上的需要以及大工业与管理的复杂化产生了运筹学、系统论、信息论、控制论与数理统计学等学科.

数理统计学是一门研究怎样去有效地收集、整理和分析带有随机性的数据,以及对所考察的问题作出推断或预测,直至为采取一定的决策和行动提供依据和建议的数学分支学科.统计方法的数学理论要用到很多近代数学的知识,如函数论、拓扑学、矩阵代数、组合数学,等等,但关系最密切的是概率论,故可以这样说:概率论是数理统计学的基础,数理统计学是概率论的一种应用.但是它们是两个并列的数学分支学科,并无从属关系.

概率统计理论与方法的应用几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门以及人们的实际生活中.例如:

(1) 气象、水文、地震预报、人口控制及预测都与概率论紧密相关;

(2) 产品的抽样验收、新研制的药品能否在临床中应用,均需要用到假设检验;

(3) 寻求最佳生产方案要进行试验设计和数据处理;

(4) 电子系统的设计、火箭卫星的研制与发射都离不开可靠性估计;

(5) 探讨太阳黑子的变化规律时时间序列分析方法非常有用;

(6) 研究化学反应的时变率要以马尔可夫过程来描述;

(7) 在生物学中研究群体的增长问题时提出了生灭型随机模型,传染病流行问题要用到多变量非线性生灭过程;

(8) 许多服务系统,如电话通信、船舶装卸、机器维修、患者候诊、存货控制、

水库调度、购物排队、红绿灯转换等，都可用一类概率模型来描述，其涉及的知识就是排队论.

目前，概率统计理论进入其他自然科学领域的趋势还在不断发展.在社会科学领域，特别是经济学中研究最优决策和经济的稳定增长等问题，都大量采用概率统计方法.法国数学家拉普拉斯曾说："生活中最重要的问题，其中绝大多数在实质上只是概率的问题."英国的逻辑学家和经济学家杰文斯曾对概率论大加赞美："概率论是生活真正的领路人，如果没有对概率的某种估计，那么我们就寸步难行，无所作为."

本章主要介绍概率论中的基本概念——随机事件与随机事件的概率，讨论随机事件的关系与运算，以及概率的性质与计算方法.

§1.1 随机事件

一、必然现象与随机现象

在自然界和人的实践活动中经常遇到各种各样的现象，这些现象大体可分为两类：一类是确定的，例如"向上抛一块石头必然下落""太阳从东方升起""在一个标准大气压下，纯水加热到100 ℃时必然沸腾"，等等，这种在一定条件下有确定结果的现象称为**必然现象**（或称**确定性现象**）.

另一类现象是随机的，例如在相同的条件下，向上抛一枚质地均匀的硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上，在每次抛掷之前不能确定哪一面朝上，也就是说"正面朝上"可能出现也可能不出现.这个试验多于一种可能结果，但是在试验之前不能肯定试验会出现哪一个结果.同样地，同一门大炮对同一目标进行多次射击（同一型号的炮弹），各次弹着点可能不尽相同，并且每次射击之前无法肯定弹着点的确切位置.以上所举的现象都具有随机性，即在一定条件下进行试验或观察会出现不同的结果（也就是说，多于一种可能的试验结果），而且在每次试验之前都不能肯定试验会出现哪一个结果，这种现象称为**随机现象**（或称**偶然性现象**）.

恩格斯指出，在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律.

人们经过长期的反复实践发现，虽然个别现象在某次试验或观察中可以出现也可以不出现，但在大量试验中他却呈现出明显的规律性.例如：

（1）掷一枚质地均匀的硬币.当投掷次数很大时，就会发现正面和反面出现的次数几乎各占一半.

(2) 对同一目标进行射击.当射击次数不多时,其弹孔分布看不出有什么规律性;但当射击次数非常多时,就可以发现弹孔的分布呈现一定的规律性,即弹孔关于目标的分布略呈对称性.

上述事实表明,随机现象有其偶然性的一面,也有其必然性的一面.即随机现象也包含着规律性,它可在相同条件下的大量重复试验或观察中呈现出来,这种规律性称为**随机现象的统计规律性**.

在客观世界中,随机现象是极为普遍的,例如"某地区的年降雨量""某电话交换台在单位时间内收到的用户的呼唤次数""全省一年的经济总量",等等.

二、随机试验

生活中我们遇到过各种试验.在这里,我们把试验作为一个含义广泛的术语,它包括各种各样的科学试验,甚至对某一事物的某一特征的观察也认为是一种试验.下面举一些试验的例子:

E_1:抛一枚硬币,观察正面 H、反面 T 出现的情况.

E_2:将一枚硬币抛三次,观察出现正面的次数.

E_3:抛一枚骰子,观察出现的点数.

E_4:记录某市火车站售票处一天内售出的车票数.

E_5:在一批灯泡中任意抽取一只,测试它的使用寿命.

E_6:记录某地一昼夜的最高温度和最低温度.

这些试验都具有以下的特点:

(1) 可以在相同的条件下重复地进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;

(3) 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个,但在一次试验之前却不能肯定这次试验出现哪一个结果.

在概率论中,我们将具有上述三个特点的试验称为**随机试验**,简称为**试验**,记作 E.今后讨论的试验都是指随机试验.

三、样本空间

定义 1.1 随机试验的每一个可能出现的结果,称为**基本事件**;基本事件的全体,称为**样本空间**.也就是试验所有可能结果的全体是样本空间,样本空间通常用大写字母 S 表示,S 中的点即是基本事件,也称为样本点,常用 e 表示.

例如,上面的 6 个随机试验的样本空间分别为:

$S_1=\{H,T\}$;

$S_2=\{0,1,2,3\}$;

$S_3=\{1,2,3,4,5,6\}$；

$S_4=\{0,1,2,\cdots,n\}$，这里的 n 是某市火车站售票处一天内准备出售的车票数；

$S_5=\{t \mid t\geqslant 0\}$；

$S_6=\{(x,y) \mid T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}$，这里 x 表示最低温度，y 表示最高温度，并设这一地区的温度不会低于 T_0，也不会高于 T_1.

在具体问题中，给定样本空间是研究随机现象的第一步.

样本空间是由试验的目的所确定的，试验的具体内容不同，样本空间也不同.例如，掷骰子这个随机试验，若考虑出现的点数，则样本空间 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$；若考虑的是出现奇数点还是出现偶数点，则样本空间 $S=\{$奇数，偶数$\}$.

由此说明，同一个随机试验也可以有不同的样本空间.

四、随机事件

随机试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的**随机事件**，简称为**事件**.随机事件常用大写字母 $A,B,C,\cdots$表示.在每次试验中，当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时，称事件 A 发生.

例如在 E_3 中，如果用 A 表示事件"掷出奇点数"，那么 A 是一个随机事件.由于在一次投掷中，当且仅当掷出的点数是 1,3,5 中的任何一个时才称事件 A 发生了，所以我们把事件 A 表示为 $A=\{1,3,5\}$.同样地，若用 B 表示事件"掷出偶点数"，那么 B 也是一个随机事件，$B=\{2,4,6\}$.

对于一个试验 E，在每次试验中必然发生的事件，称为 E 的**必然事件**；在每次试验中都不发生的事件，称为 E 的**不可能事件**.例如在 E_3 中，"掷出的点数不超过 6"就是必然事件，用集合表示这一事件就是 E_3 的样本空间 $S_3=\{1,2,3,4,5,6\}$.而事件"掷出的点数大于 6"是不可能事件，这个事件不包括 E_3 的任何一个可能结果，所以用空集$\varnothing$表示.对于一个试验 E，它的样本空间 S 是 E 的必然事件；空集$\varnothing$是不可能事件.必然事件与不可能事件虽已无随机性可言，但在概率论中，常把它们当作两个特殊的随机事件，这样做是为了数学处理上的方便.

五、事件间的关系与运算

对于随机试验而言，它的样本空间 S 可以包含很多随机事件，概率论的任务之一就是研究随机事件的规律，通过对较简单事件规律的研究在掌握更复杂事件的规律，为此需要研究事件和事件之间的关系与运算.因为事件是一个集合，因而事件间的关系和运算是按集合间的关系和运算来处理的，并根据"事件发

生”的含义,给出它们在概率中的含义.

设试验 E 的样本空间为 S,而 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 S 的子集.在下面事件间的关系和运算中,可以用文氏图来直观地描述.用平面上一个矩形域表示样本空间 S,矩形内的点表示样本点(基本事件),用圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B.

1. 事件的包含与相等:若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 A 包含于事件 B(事件 B 包含事件 A),记作 $B\supset A$ 或者 $A\subset B$.若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称事件 A 与事件 B **相等**,记作 $A=B$.A 包含于事件 B 如图 1-1 所示.

对任一事件 A,有 $\varnothing\subset A\subset S$.

2. 事件的和(或并):事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件称为事件 A 与事件 B 的**和(或并)事件**,记作 $A\cup B$.事件 $A\cup B$ 发生意味着:或事件 A 发生,或事件 B 发生,或事件 A 与事件 B 都发生.事件 A 与事件 B 的和事件如图 1-2 中的阴影部分所示.

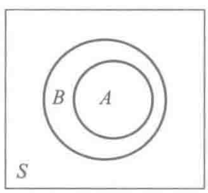

图 1-1

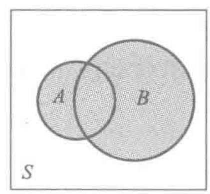

图 1-2

显然,对任一事件 A,有

$$A\cup S=S;\qquad A\cup\varnothing=A.$$

事件的和可以推广到多个事件的情形.设有 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,定义它们的和事件为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生,记作 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$.

3. 事件的积(或交):事件 A 与事件 B 都发生的事件称为事件 A 与事件 B 的**积(或交)事件**,记作 $A\cap B$,也简记作 AB.事件 $A\cap B$(或 AB)发生意味着事件 A 发生且事件 B 也发生,即 A 与 B 都发生.事件 A 与事件 B 的积事件如图1-3中的阴影部分所示.

显然,对任一事件 A,有

$$A\cap S=A;\qquad A\cap\varnothing=\varnothing.$$

类似地,可以定义 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件

$\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k=\{A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都发生$\}$.

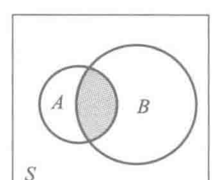

图 1-3

4. 事件的差:事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的**差事件**,记作 $A-B$.事件 A 与事件 B 的差事件如图 1-4 中的阴影部分所示.

显然,对任一事件 A,有

$$A-A=\varnothing;\quad A-\varnothing=A;\quad A-S=\varnothing.$$

5. 互不相容事件(互斥):若事件 A 与事件 B 不能同时发生,则称事件 A 与事件 B 是**互不相容的**,或称它们是**互斥的**,记作 $AB=\varnothing$.若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意两个都互斥,则称这些事件是两两互斥的.事件 A 与事件 B 是互不相容的事件如图 1-5 所示.

今后我们把两个互不相容事件 A 与 B 的并记作 $A+B$.把 n 个互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并记作 $A_1+A_2+\cdots+A_n$.

6. 对立事件:若 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 互为**对立事件(或逆事件)**.“A 不发生”的事件即为事件 A 的对立事件,记作 $\overline{A}$.A 和 $\overline{A}$ 满足

$$A\cup\overline{A}=S,\quad A\overline{A}=\varnothing,\quad \overline{\overline{A}}=A.$$

由此说明,在一次试验中 A 与 $\overline{A}$ 有且仅有一个发生,即不是 A 发生就是 $\overline{A}$ 发生.事件 A 的对立事件如图 1-6 中的阴影部分所示.此外,显然有

$$\overline{S}=\varnothing,\quad \overline{\varnothing}=S,\quad A-B=A\overline{B}.$$

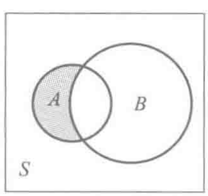

图 1-4

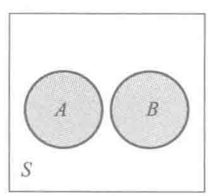

图 1-5

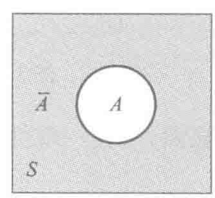

图 1-6

例 1.1　设有 100 件产品,其中 5 件产品为次品,从中任取 50 件产品.记 $A=\{50$ 件产品中至少有一件次品$\}$,则 $\overline{A}=\{50$ 件产品中没有次品$\}=\{50$ 件产品全是正品$\}$.

由此说明,若事件 A 比较复杂,往往它的对立事件就比较简单,因此我们在求复杂事件的概率时,往往可以转化为求它的对立事件的概率.

7. 事件运算满足的定律　设 A,B,C 为事件,则有

交换律:$A\cup B=B\cup A,AB=BA$;

结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(AB)C=A(BC)$;

分配律:$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$,

$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$;

对偶律(德摩根律):$\overline{A\cup B}=\overline{A}\ \overline{B}$;$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

对偶律在事件的运算中经常用到,它可以推广到更多的情况,即对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 有

$$\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}=\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n;$$

$$\overline{A_1A_2\cdots A_n}=\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\cdots\cup\overline{A}_n.$$

例 1.2 设 A,B,C 为 S 中的随机事件,试用 A,B,C 表示下列事件:

(1) A 与 B 发生而 C 不发生:$AB-C$ 或 $AB\overline{C}$.

(2) A 发生,B 与 C 不发生:$A-B-C$ 或 $A\overline{B}\ \overline{C}$.

(3) 恰有一个事件发生:$A\overline{B}\ \overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\ \overline{B}C$.

(4) 恰有两个事件发生:$\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C}$.

(5) 三个事件都发生:ABC.

(6) 至少有一个事件发生:$A\cup B\cup C$.

(7) A,B,C 都不发生:$\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$.

(8) A,B,C 不都发生:$\overline{ABC}$.

(9) A,B,C 不多于一个发生:$\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}\cup A\overline{B}\ \overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\ \overline{B}C$ 或 $\overline{AB\cup BC\cup CA}$.

(10) A,B,C 不多于两个发生:$\overline{ABC}$.

例 1.3 在数学系的学生中任选一名学生,若事件 A 表示被选学生是男生,事件 B 表示该学生是三年级学生,事件 C 表示该学生是运动员.

(1) 叙述 $AB\overline{C}$的意义;

(2) 在什么条件下 $ABC=C$ 成立?

(3) 在什么条件下,$\overline{A}\subset B$ 成立?

解 (1) 该生是三年级男生,但不是运动员;

(2) 全系运动员都是三年级男生;

(3) 全系女生都在三年级.

例 1.4 下列各式说明什么包含关系:

(1) $AB=A$;(2) $A\cup B=A$;(3) $A\cup B\cup C=A$.

解 (1) $AB=A\Leftrightarrow AB\subset A$ 且 $A\subset AB$,由 $A\subset AB\Rightarrow A\subset A$ 且 $A\subset B\Rightarrow A\subset B$.

(2) $A\cup B=A\Leftrightarrow A\cup B\subset A$ 且 $A\subset A\cup B$,由 $A\cup B\subset A\Rightarrow B\subset A$.

(3) $A\cup B\cup C=A\Leftrightarrow A\cup B\cup C\subset A$ 且 $A\subset A\cup B\cup C$,由 $A\cup B\cup C\subset A\Rightarrow B\cup C\subset A$.

§1.2　随机事件的频率与概率

对于随机试验中的随机事件在一次试验中是否发生,虽然不能预先知道,但是它们在一次试验中发生的可能性是有大小之分的.比如掷一枚均匀的硬币,那么随机事件 A(正面朝上)和随机事件 B(正面朝下)发生的可能性是一样的(都为 1/2).又如袋中有 8 个白球,2 个黑球,从中任取一球.当然取到白球的可能性要大于取到黑球的可能性.刻画随机事件发生可能性大小的量,就是下面要研究的随机事件的概率.

一、频率

如何从数量上规定随机事件的概率呢?我们先从与概率密切相关而又容易了解的频率概念出发,以便得出概率的定义.

定义 1.2　设 E 为任一随机试验,A 为其中任一事件,在相同条件下,把 E 独立地重复做 n 次,n_A 表示事件 A 在这 n 次试验中出现的次数(称为频数).比值 $f_n(A)=n_A/n$ 称为事件 A 在这 n 次试验中出现的**频率**.

例如掷 1 000 次硬币中有 514 次正面朝上,那么"掷硬币出现正面朝上"这一事件 A 的频率为 0.514,频数为 514.

频率具有以下**性质**:

(1) **非负性**:对任一事件 A,$f_n(A)\geqslant 0$;

(2) **规范性**:若 S 为必然事件,则 $f_n(S)=1$;

(3) **有限可加性**:若 A,B 互不相容,即 $AB=\varnothing$,则

$$f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B).$$

对有限个两两互不相容的事件的频率具有可加性,即若 $A_iA_j=\varnothing(1\leqslant i,j\leqslant m,i\neq j)$,则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{m}A_i\right)=\sum_{i=1}^{m}f_n(A_i).$$

人们在长期实践中发现:在相同条件下重复进行同一试验,当试验次数 n 很大时,某事件 A 发生的频率具有一定的"稳定性",就是说其值在某确定的数值上下摆动.一般地,试验次数 n 越大,事件 A 发生的频率就越接近那个确定的数值,因此事件 A 发生的可能性的大小就可以用这个数量指标来描述.

例如,掷硬币的试验,若只做一次试验,事件 A(正面朝上)是否发生是不确定的;然而当大量重复做该试验的时候,事件 A 发生的次数,也称为频数,就表

现出一定的规律性,约占总试验次数的一半.历史上有人做过掷硬币的试验,表 1-1 列出了几位统计学家曾进行过的抛硬币的试验的结果.

表 1-1 抛硬币试验的结果

试验者	试验次数 n	出现正面朝上的次数 n_A	出现正面朝上的频率 $f_n(A)$
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
K.皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K.皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

从表 1-1 可以看到,不论哪位试验者去抛,当试验次数逐渐增多时,$f_n(A)$ 总是在 0.5 附近摆动而逐渐稳定于 0.5.从这个例子可以看出,一个随机试验的随机事件 A,在 n 次试验中出现的频率 $f_n(A)$,当试验的次数 n 逐渐增多时,它在一个常数附近摆动,而逐渐稳定于这个常数.这个常数是客观存在的,"频率稳定性"的性质,不断地为人类的实践活动所证实,它揭示了隐藏在随机现象中的规律性.

在工农业生产中,这种频率的稳定性广泛存在着.例如,对某化工厂一种产品的质量进行抽检,考察 A="出现正品",得到如表 1-2 所示的数据.

表 1-2 某化工厂正品率的抽检结果

n	10	50	100	200	400	600	800	1 000
n_A	9	35	87	171	362	548	727	912
$f_n(A)$	0.9	0.7	0.87	0.855	0.905	0.913	0.909	0.912

抽检结果表明,该厂产品的正品率稳定于 0.91.又如,某农科所对一种棉花种子进行发芽率试验,记 B="该棉花种子发芽",统计出如表 1-3 所示的数据.

表 1-3 某农科所棉花种子发芽率的试验结果

n	5	10	100	200	400	600	800	1 000
n_B	3	7	55	122	236	372	464	610
$f_n(B)$	0.6	0.7	0.55	0.61	0.59	0.62	0.58	0.61

试验结果表明,该棉花种子的发芽率稳定于 0.6.

再举一个为众人所关心的实例:中国民航局在对飞机故障进行统计分析后,发布了飞机架次故障率稳定于 $0.013/10^5$ 即 $13/10^8$(亿分之 13)的结果,因此得出了"飞机是世界上最安全的交通工具之一"这一重要结论.