“十三五”国家重点图书

北京市科学技术协会科普创作出版资金资助

数学与人文 · 第二十一辑

数学百草园

Mathematics & Humanities

主 编 丘成桐 刘克峰 杨 乐 季理真

副主编 杨 静

高等教育出版社

“十三五”

北京市科学 … 助

数学与人文·第二十一辑

Mathematics & Humanities

数学百草园

SHUXUE BAICAOYUAN

主编 丘成桐 刘克峰 杨乐 季理真

副主编 杨静

高等教育出版社·北京

International Press

图书在版编目（CIP）数据

数学百草园 / 丘成桐等主编. -- 北京：高等教育出版社，2017.3
（数学与人文; 第 21 辑）
ISBN 978-7-04-046505-1

I. ①数… II. ①丘… III. ①数学-文集
IV. ①O1-53

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第229513号

出 品 人　苏雨恒
总 监 制　吴　向
总 策 划　李冰祥
策　　划　李华英
责任编辑　李华英
书籍设计　王凌波
责任校对　胡美萍
责任印制　韩　刚

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码　100120
购书热线　010-58581118
咨询电话　400-810-0598
网　　址　http://www.hep.edu.cn
　　　　　http://www.hep.com.cn
网上订购　http://www.hepmall.com.cn
　　　　　http://www.hepmall.com
　　　　　http://www.hepmall.cn
印　　刷　涿州市星河印刷有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　14.5
字　　数　250 千字
版　　次　2017年3月第1版
印　　次　2017年3月第1次印刷
定　　价　29.00元

物 料 号　46505-00

丛书编委会

《数学与人文》丛书序言

丘成桐

《数学与人文》是一套国际化的数学普及丛书，我们将邀请当代第一流的中外科学家谈他们的研究经历和成功经验。活跃在研究前沿的数学家们将会用轻松的文笔，通俗地介绍数学各领域激动人心的最新进展、某个数学专题精彩曲折的发展历史以及数学在现代科学技术中的广泛应用。

数学是一门很有意义、很美丽、同时也很重要的科学。从实用来讲，数学遍及物理、工程、生物、化学和经济，甚至与社会科学有很密切的关系，数学为这些学科的发展提供了必不可少的工具；同时数学对于解释自然界的纷繁现象也具有基本的重要性；可是数学也兼具诗歌与散文的内在气质，所以数学是一门很特殊的学科。它既有文学性的方面，也有应用性的方面，也可以对于认识大自然做出贡献，我本人对这几方面都很感兴趣，探讨它们之间妙趣横生的关系，让我真正享受到了研究数学的乐趣。

我想不只数学家能够体会到这种美，作为一种基础理论，物理学家和工程师也可以体会到数学的美。用一种很简单的语言解释很繁复、很自然的现象，这是数学享有“科学皇后”地位的重要原因之一。我们在中学念过最简单的平面几何，由几个简单的公理能够推出很复杂的定理，同时每一步的推理又是完全没有错误的，这是一个很美妙的现象。进一步，我们可以用现代微积分甚至更高深的数学方法来描述大自然里面的所有现象。比如，面部表情或者衣服飘动等现象，我们可以用数学来描述；还有密码的问题、计算机的各种各样的问题都可以用数学来解释。以简驭繁，这是一种很美好的感觉，就好像我们能够从朴素的外在表现，得到美的感受。这是与文化艺术共通的语言，不单是数学才有的。一幅张大千或者齐白石的国画，寥寥几笔，栩栩如生的美景便跃然纸上。

很明显，我们国家领导人早已欣赏到数学的美和数学的重要性，在 2000 年，江泽民先生在澳门濠江中学提出一个几何命题：五角星的五角套上五个环后，环环相交的五个点必定共圆，意义深远，海内外的数学家都极为欣赏这个高雅的几何命题，经过媒体的传播后，大大地激励了国人对数学的热情，我希望这套丛书也能够达到同样的效果，让数学成为我们国人文化的一部分，让我们的年轻人在中学念书时就懂得欣赏大自然的真和美。

前　言

我们知道百草园来自于鲁迅先生的文章。鲁迅正是从百草园走出，踏上了探求新生活之路，吹响唤醒民众的号角。后人向百草园走去，则是追寻先生的足迹，由此生发无限的情思，汲取奋力进击的精神。本辑取名《数学百草园》，展示了数学世界的诸多美好，希望激发更多的青年读者学习科学、学习数学的兴趣，在这本小册子中，获得一些有益的启迪。

数学是人类智慧的结晶，是全人类宝贵的精神财富。今天数学的繁荣昌盛，得益于千百年来数学工作者的辛勤劳动，介绍数学少不了回顾数学大师的经历。

“大师访谈”栏目收录了三篇对当代数学大师的访谈稿，通过人物访谈，读者可以身临其境，面对面地与数学家交流。Robert Griess 教授讲述了自己如何构造 Monster 群并证明其存在的经历，以及在教学方面的体会；皮埃尔 · 德利涅教授回忆了自己的成长经历、研究心得和在各地的见闻；Endre Szemeredi 教授介绍了自己的研究内容和风格，以及一些有趣的个人经历。

人物传记与人物访谈不同，读者可以较为全面、完整、客观地了解一个科学家的生平和贡献。一个人的成长离不开他所处的环境和背景，《为学不随流俗转，超越创新常道间——段一士教授的学术人生》和《黎曼生平》的作者都曾是传记主人公的学生，这两篇传记分别描绘了处在不同时期的中外两位科学家一生的经历和贡献，以及不同的个性特点。从中我们看到个人行为与其生活的家庭、学科发展和社会环境的诸多联系。

对数学家的追思是对逝者最好的纪念，“数学星空”栏目专题纪念龚昇先生。龚先生是我国著名的数学家和教育家，在单复变函数论、多复变函数论及调和分析方面都做出过突出的贡献，他在中国科学技术大学工作了三十余年，为培养年轻数学家与数学组织工作做出了杰出的贡献。陆启铿院士、万哲先院士、丘成桐院士、刘浩教授、刘太顺教授、陆洪文教授、王世坤教授等人作为龚先生曾经的同事、学生，以真挚感人的笔触深切缅怀了龚先生，让我们从不同侧面更多地了解了龚先生。

数学的发展离不开数学家们的敏锐观察和深刻思想，“数学沉思”栏目包

含了本丛书主编丘成桐教授的三篇文章:《四十六年家国梦，八千里地学子心》、《回首哈佛数学 150 年》、《科学人才的引进问题》，分别从青年学子、高校院系、国家三个层面，对如何取得长足的发展和成功进行了深入的思考。丘先生结合个人的成长和研究经历，向读者介绍了非常宝贵的经验和启发性的观点。“无论是国家或是个人，只要有崇高的理想，只要我们愿意拼尽全力向着标杆直跑，成功的机会往往比自己或别人想象的大得多!”“科技以基础科学为基础，而基础科学的发展乃是百年大计，不可不计较做学问和做人的态度。”

除此之外，我们还希望呈现给读者更多的数学在不同方向上的成就和发展历程。威尔莫猜想是 1965 年 T. J. Willmore 提出的关于曲面曲率的一个猜想,《关于曲面的威尔莫猜想》和《威尔莫猜想的解决》这两篇文章介绍了这个猜想的历史由来，以及对它的解决和证明思路。《汉语文本挖掘中的统计模型》一文集合了哈佛大学统计系、光启高等理工研究院和哈佛大学东亚语言文明系的学者的共同成果，面对当前信息技术的不断发展，他们提出了一种对汉语文本进行自我学习（无训练集）的统计分析方法，向读者展示了如何从海量文本中提取信息。《伽罗瓦理论概述》简要描述了伽罗瓦理论诞生的历史。《西方传入我国的第一部概率论专著——〈决疑数学〉》一文的标题已经很清楚地告诉了读者此文的主要内容，这篇文章有助于我们了解概率论是如何传入我国的。

本辑的内容从多个角度阐释了数学精神，如同百草园一样丰富多彩，希望读者能从中多得到一点收获。

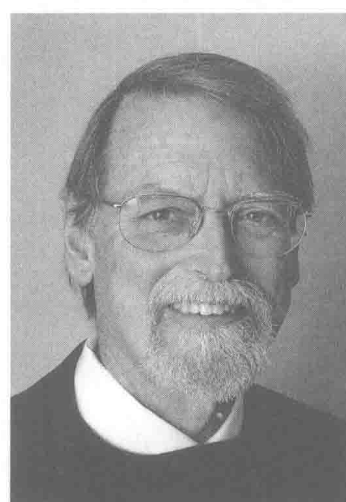
目　录

数学之美

——从一个神经科学实验讲起

大卫 · 芒福德
译者：周树静

大卫 · 芒福德（David Mumford），美国代数几何学家，长期任教于哈佛大学，曾获菲尔兹奖（1974）、麦克阿瑟奖（1987）、沃尔夫奖（2008）。他后来转往应用数学，研究视觉与模式理论，现为哈佛与布朗大学退休教授。



芒福德

针对数学的普遍特性，一般大众对两个问题相当感兴趣，一是数学家很喜欢谈的“美丽结果”，到底是什么意思？二是做数学研究时，是否有一些特定的大脑皮质会十分活跃？

最近，阿蒂亚（Michael Atiyah）和泽基（Semir Zeki）两位教授合作，以令人讶异的实验研究将两个问题合而为一，名为“数学美感经验与其神经关联”（The experience of mathematical beauty and its neural correlates）。他们请 15 位数学家观察 60 个公式，以丑、中性、美为这些公式评分（见下页图），同时以功能性核磁共振造影（fMRI）扫描他们的脑部。这项研究的主要结论是美感评价和内侧眼窝额叶皮质（medial orbital frontal cortex；mOFC）有某种程度的关联（虽然 mOFC 活动相对于基线减弱的现象有点奇怪）。

这篇文章的主旨，是要论证主观性与参与者从事数学活动时的兴奋感（包括美的知觉），会因数学家不同而有很大的差异，因此思考数学时很可能

阿蒂亚与泽基的 60 个公式

下表列出阿蒂亚为这次实验选的 60 个公式，本来的文件中还有各公式的简短说明，但这里因篇幅限制删除。

1	$1+e^{i\pi}=0$	31	$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$
2	$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$	32	$\sum_{k=0}^{\infty}ar^k=\frac{a}{1-r},\ \lvert r\rvert<1$
3	$V-E+F=2$	33	$\int f d\mu=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}f\circ T^k$
4	$\int_M KdA+\int_{\partial M}\kappa_g ds=2\pi\chi(M)$	34	$\int_{\partial M}\omega=\int_M d\omega$
5	$e^{ix}=\cos x+i\sin x$	35	$\sqrt{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-n^2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{n^2}{4}}$
6	$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$	36	$\langle B,B\rangle_t=t$
7	$\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s},\ s\in\mathbb{C},\mathrm{Re}(s)>1$	37	$\prod_{k=0}^{\infty}(1+x^k)=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n$
8	$\exp(X)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^n}{n!}$	38	$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\geqslant\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n}},a_k>0$
9	$\mathcal{F}_x[e^{-ax^2}](k)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\pi^2k^2/a^2}$	39	$\lvert\emptyset\rvert=0$
10	$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	40	$T=de+\omega\wedge e,\ R=d\omega+\omega\wedge\omega$
11	$2^{\lvert S\rvert}>\lvert S\rvert$	41	$n!=n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+o(n))$
12	$z_{n+1}=z_n^2+c$	42	$\chi_\Omega(\exp X)=\int_\Omega e^{i\langle F,X\rangle+\sigma(F)}$
13	$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-y)f(y)dy$	43	$V_n(r)=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}r^n$
14	$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4396^{4k}}$	44	$S^2\cong CP^1\cong SO(3)/SO(2)$
15	$1729=1^3+12^3=9^3+10^3$	45	$\mathbb{Z}\overset{2\times}{\hookrightarrow}\mathbb{Z}\twoheadrightarrow\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
16	$a^2+b^2=c^2$	46	$R^{\alpha}_{\beta[\gamma\delta;\lambda]}=0$
17	$\frac{d}{dx}\int_a^x f(s)ds=f(x)$	47	$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$
18	$\oint_\gamma f(z)dz=2\pi i\sum\mathrm{Res}(f,a_k)$	48	$\{\gamma_i,\gamma_j\}=2\eta_{ij}$
19	$\frac{dx}{dt}=x(\alpha-\beta y),\ \frac{dy}{dt}=-y(\gamma-\delta x)$	49	$1=\sum_{n=2}^{\infty}(\zeta(n)-1)$
20	$\frac{\partial\rho}{\partial t}=D\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}$	50	$A\cap A^C=\emptyset$
21	$\pi=\frac{c}{d}$	51	$U^C=\emptyset$
22	$\frac{d}{dx}e^x=e^x$	52	$A=\int_{\sigma(A)}\lambda dE_\lambda$
23	$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$	53	$\int\theta d\theta=1,\int d\theta=0$
24	$\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$	54	$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$
25	$\lVert x+y\rVert\leqslant\lVert x\rVert+\lVert y\rVert$	55	$\Delta\varphi=0$
26	$\pi(x)\sim\frac{x}{\log x}$	56	$x^2-ny^2=1$
27	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$	57	$\varphi_{tt}-\varphi_{xx}+\sin\varphi=0$
28	$3^2+4^2=5^2$	58	$a^n+b^n=c^n,n>2$
29	$\frac{d^n}{dz^n}f(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw$	59	$\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$
30	$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots$	60	$\nabla_\mu\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)=0$

牵涉到相当不同的脑区。我的说法并没有什么科学依据，主要是来自我与数学同仁的互动交谈，惊讶地发现大家“做数学”的方式真是南辕北辙。

容我先向读者致歉，大部分我想说的，即使你不是数学家也能理解，但是为了言而有据，我不得不述及许多数学家与数学结果，这些部分可能只有我的数学家朋友比较熟悉。文中我为非数学家提供一些让想法更明白的背景，但这种折中并不容易。

我认为数学家可以分成几个部落，区别在于促使他们进入神秘思考世界的不同强烈动因。我喜欢把这些部落称为“探险家”(Explorer)、“炼金师”(Alchemist)、“角力士”(Wrestler)、“侦探”(Detective)。当然，有许多数学家往返于不同的部落，某些数学结果也很难明显归类于某一个部落的特性。

探险家喜欢追问有什么东西具备怎样的性质？以及如果有的话，总共有几种。探险家觉得他们正在发现遥远数学大陆的风土，倚靠纯粹思考的力量或灵光闪烁，传回异国事物的信息。对他们而言，最美丽的东西莫过于他们发现的全新事物，这种想法更被他们之中名为“寻宝家”(Gem Collector)的子部落奉为圭臬。探险家部落里还有另一个子部落称为“地图测绘师”(Mapper)，他们希望能提供描述新大陆的某种地图，而不仅止于景点要览(sehenswürdigkeiten)而已。

炼金师最兴奋的事，是找出两个原来毫不相干的数学领域彼此之间的连接，这就像是把一个烧瓶中的液体倒入另一个烧瓶，然后令人惊奇的事情就发生了，好像爆炸一样！

角力士把焦点放在不同物体的相对大小或强度，他们的蓬勃发展靠的不是数与数的等式，而是不等式——某个量能否用另一个量来估计或限制，渐近地估计成长的大小或速率。这个部落主要是由分析学家和擅于测量函数大小的“积分人”所构成，但是所有领域的人都受到他们的吸引。

最后，侦探则是固执地追寻最困难深刻的问题，到处找寻线索，确定保有持续追查的路线，经常要花上数年或数十年的光景。这个部落有一个称为“露天采矿者”(Strip Miner)的子部落，其中的数学家相信在可见的表层下方有一整个隐藏的矿层，因此必须先剥除表面的地层才能真正解决问题。这个隐藏的矿层通常更抽象，就像语法语言学家所追求的“深层结构”(deep structure)一样。另一个子部落称为“施洗者”(Baptizer)，他们为事物择取崭新的名称，借由形式的定义与命名，才让原先隐藏的关键对象得以展露其重要意义。

探险家

下面，我想针对每一部落，举出他们认为优美的结果，以及部落中我所知道或交谈过的数学家。

探险家部落最典型的发现是古希腊的五个柏拉图物体，也就是仅有的凸正多面体（经由旋转，可以将某顶点或面转到另一顶点或面的多面体）。这项发现有人归功于泰特托斯（Theaetetus），柏拉图曾经在他的对话录《蒂迈欧篇》（*Timaeus*）中描述过，并由欧几里得在《几何原本》中仔细构造出来。有件事很有趣，据我所知，不论是印度或中国的典籍，在 17 世纪与西方数学传统交汇之前，完全不曾出现 12 面体与 20 面体的记载。

将数学宇宙从三维扩张到高维的想法，启动了一波探险家的淘金潮。19 世纪，瑞士数学家司拉弗里（Ludwig Schläfli）将正多面体的名单延伸到 n 维，四维有六种，更高维度则都只有三种。到了 20 世纪，探讨所有可能的低维流形（无论是拓扑、分段线性或光滑的分类）一直是大家瞩目的焦点。

我熟识的与我同一代的数学家瑟斯顿（William Thurston），显然是探险家部落的一员。瑟斯顿是绝妙的拓扑学家，更令我好奇的是他天生斜视，因此对三维世界的理解，被迫要更依赖大脑的顶叶区域（parietal area）与手眼协调，而非靠枕叶皮质（occipital cortex）以立体视觉来学习。我从没碰到过任何人具备与他类似的可视化技能，或许考克斯特（Harold S. M. Coxeter）是例外。

不过探险家型的数学家并不全是几何学家，有限单群（finite simple group）的全面表列无疑是 20 世纪最优美与令人惊异的发现之一。阿廷（Michael Artin）虽然不是标准的探险家（他的后半职业生涯奉献给侦探型的研究），但他发现了一片极为丰富的非交换环（non-commutative ring）世界，介于近乎交换与完全无限制的广大领域之间。他踏入的是没有人知道可以发现什么的大陆，这项探险仍在进行中。另外还有最奇特、近乎神学的“高阶无穷”领域，这是集合论者所揭露的世界。

我自己的职业生涯集中在“地图测绘师”这个子部落。我所绘制的地图是簇的模空间（moduli spaces of varieties，这是有限维的空间）与欧氏空间子流形的模空间（无穷维的空间）。不过，我们有证据相信最早的探险家部落成员，甚至最早的数学家，基本上是地图测绘师。我所想的是以楔形文字书写勘查泥板的故事，当时世界上最早的组织性国家，正面临记录田地所有权与从农民课税的政务。很幸运，人类拥有许多公元前 3000 年到约前 500 年的美索不达米亚泥板，其中许多泥板包含土地的简图，或因勘查业务而生的几何建物的地图。很显然，应该就是这些泥板抄写员接着发明了几何代数、毕氏法则以及二次方程，这是基于实际的土地运用与会计难题而产生的。他们

对于证明并不感兴趣，只关心土地测量例如距离与面积的各种算法，他们称之为手持绳索与测量芦苇的女神尼莎芭（Nisaba）的智慧。

阿蒂亚与泽基的公式名单中只有很少的探险家结果，或许是因为他们的成就通常不以公式呈现，但是其中仍然包含了三颗宝石：#12 的芒德布罗集（Mandelbrot set）；#15 是将一整数以两种方式表示成立方和，因为拉曼努真（Srinivasa Ramanujan）将这个表示告知利特尔伍德（John Littlewood）而闻名；#28 是 $(3,4,5)$ 可构成直角三角形。

顺便一提，由费德曼（Bob Feldman）和洛克摩（Dan Rockmore）所启动的 Concinnitas 计划，邀请了十位数理科学家选出十个公式。其中包含了从有限单群选出的一颗宝石：芮（Rimhak Ree）所发现的群。另外，在我自己的研究里带来无穷乐趣的事情之一，就是发现特别而无人知晓的几何物体，例如我曾发现一个负曲率的代数曲面，但是它的同调群却和正曲率的 $\mathbb{P}^2$ 一样。

炼金师

对许多人来说，数学中最美妙的结果，莫过于面对两个非常遥远的主题，却能揭露两者之间的深刻关系，例如代数与几何、代数与分析，或者几何与分析之间的连接。这样的连接暗示了某种隐藏的统一性，只是以前被我们的凡人之眼所忽略，唯有偶然窥见时才绽放炫目的光芒。

一个早期的范例是三等分角的几何问题与解三次方程的代数方程之间的连接。前者是古希腊传统的重要未解问题之一。而在文艺复兴时期，意大利代数学者发现了一个神秘的三次方程的解公式，即使在根都是实数解的情况，他们的公式本身却导引出复数以及其立方根解。大约 1593 年，法国数学家韦达（François Viète）成为建立其间连接的“炼金师”，他说明一旦可以三等分角就可以解相对应的三次方程，反之亦然。不过一直等到 18 世纪，另一个法国数学家棣莫弗（Abraham de Moivre）才能以他的公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

真正解释这个结果，这也是不折不扣的炼金术。不过我将 18 世纪与 19 世纪初的大数学家——瑞士的欧拉与德国的高斯归类为“露天采矿者”，他们揭示了隐藏于复数代数背后的二维几何。棣莫弗公式的欧拉形式出现在阿蒂亚与泽基公式名单的 #1 与 #5。

另一位典型的炼金师是我的博士论文指导老师查利斯基（Oscar Zariski），他最深刻的工作，是揭示了由纯代数学家所发展的交换代数工具，拥有重要的几何意义，能够用来解决某些代数几何意大利学派所引出的混乱议题，尤其查利斯基主定理（Main Theorem）以及解消奇点的研究，更说明了整闭包

（integral closure）和赋值环（valuation ring）概念与几何的关系。他经常说最好的研究不是证明新定理，而是创造可以一用再用的新技术。

黎曼–罗赫定理（Riemann-Roch theorem）是炼金师知名的宝贵资源。刚开始，这个定理连接了复分析与代数曲线的几何理论，接着借由纯代数扩张到特征数 p 的情况，然后又被希策布鲁赫（Fritz Hirzebruch）用当红的代数拓扑工具推广到高维。再后阿蒂亚和辛格（Isadore Singer）将它连接到一般椭圆偏微分方程组，一举将分析、拓扑、几何连接起来。阿蒂亚很谦虚地没将这个公式放到名单中，不过他倒是手书其中的特殊情况——希策布鲁赫示标公式（Hirzebruch signature formula），收在费德曼和洛克摩的 Concinnitas 计划中，以细点蚀刻（aquatint）制成版画呈现。

在这一系列公式版画里，还囊括了戴森–麦克唐纳（Dyson-MacDonald）的 $\tau(n)$ 组合公式，这些是复分析的数值，是显然的炼金师杰作。最后，还有一个十分怪异的 $1/\pi$ 公式，是阿蒂亚与泽基的 #14 公式。我怀疑作者收录这个公式，是因为他们猜测许多人会认为这是个丑公式。对于这个公式的来源我毫无概念，不过发现它的人隶属于“巴洛克炼金师”子部落。它和 π 更简明但无疑是炼金公式的 #30 正好形成对比。

角力士

与数的角力可以回溯到阿基米德，他喜欢估计 π 值，玩赏巨大的数。至大和至小对角力士充满了吸引力。微积分出自牛顿与莱布尼兹的研究，就莱布尼兹的微积分思路，我们必须区分无穷小（infinitesimal）与无穷小的平方，相较之下，后者比前者是更无穷的小。对无穷大和无穷小采取放任的心态，主导了 18 世纪数学家的思考，更导致荒腔走板的炼金研究，像是以下颇为奇怪的公式就来自欧拉：

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots,$$
$$\frac{1}{4} = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots。$$

当然，欧拉知道这些算式只有从很特别的角度来观看才有意义，他自己并没发疯。事实上，也许有很多人会认为上述式子是很美的公式。在那个时代，更值得注意且能让人理解的角力士成就，是逼近 $n!$ 的斯特林公式（Stirling's formula，#41）。

角力士部落的现代之父应该是 19 世纪的法国数学家柯西（Augustin-Louis Cauchy），正是他最后将微积分严格化了。以他命名的柯西不等式，也

就是，两向量内积的绝对值小于或等于两向量长度的乘积：

$$|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|,$$

仍然是数学中仅有最重要的不等式。阿蒂亚与泽基将与它相关的三角不等式放在 #25。

我所受的训练不是角力士，不过后来因为应用数学的研究而学到一些。我真心爱上俄国分析学家索伯列夫（Sergei Sobolev）美妙的不等式，其中最简单的情形足以描述许多近世角力士所处理的问题：设 $f(x)$ 是光滑实函数，对任何两个实数 a, b，有以下柯西不等式的简单推论：

$$(f(b) - f(a))^2 \leqslant |b - a| \cdot \int_a^b \left(\frac{df}{dx}\right)^2 dx。$$

于是数学家会说导数的平方积分上界“控制”了逐点的函数值。

当我在哈佛大学教代数几何时，我们习惯将纽约大学库朗学院的分析学家想成场上的壮硕汉子，全部都是角力士。相反，我也听说他们用“法国酥饼”这种字眼，描述穿越大西洋从巴黎传到哈佛的抽象数学方法。

除了库朗学院的一干数学家，丘成桐是我曾经接触的最令人赞叹的角力士。有一次，他展示如何很快地推导出一堆我竭思耗神想要处理的不等式，他告诉我掌握这项技巧是他研究生学习过程的一大步。

重要的是我们必须认识到，在纯数学的世界之外，不等式对经济学、计算器科学、统计学、对局论、作业研究等领域来说，都是核心工具。或许唯有纯数学才是脱离常轨执着于等式，而大部分的现实世界则是以不等式来运作。

阿蒂亚与泽基名单上的角力士公式，还有 #11 的康托不等式、#26 的质数定理、#38 的对数凸性。

侦探

针对费马的宣称，当 $n > 3$ 时，$x^n + y^n = z^n$ 没有正整数解，怀尔斯（Andrew Wiles）说他曾经着魔般地钻研了八年。在美国公共电视网（PBS）的访谈里，怀尔斯这么描述这段经过：

> 我习惯每天进书房，试着找出模式。我尝试做些计算来解释一小部分的数学疑问，尝试将它与某些数学已知的广阔架构整合，进而厘清我正在思考的特定数学问题。有时我会去查书，看看别人怎么处理；有时我得试试更改想法，再多做点计算；有时我会发现这些以前根本没人研究过，甭谈如何运用。这时我就得发展全新的想法，该如何解决还是一个谜。这个问题基本上一直盘旋