21世纪应用型本科规划教材

高等数学

（下册）

主　编　尧雪莉　胡艳梅　梁海峰
副主编　尚海涛　周　勇　王　剑

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

21世纪应用型本科规划教材

高等数学

（下册）

主　编　尧雪莉　胡艳梅　梁海峰
副主编　尚海涛　周　勇　王　剑

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书按照全国最新工科类本科数学课程教学指导委员会提出的“数学课程教学基本要求”，根据面向21世纪工科数学教学内容和课程体系改革的基本精神编写。本教材吸收国内外优秀教材之优点，注重对抽象概念的通俗剖析，强调对常用方法的简洁概括，结构清晰、概念准确、深入浅出、言简意赅。本书着力于对空间直角坐标系与向量运算、多元函数、重积分、曲线与曲面积分、级数等抽象概念进行通俗的解释：从实例中引入这些抽象概念，将枯燥的概念具体化、通俗化，使学生更容易理解。

在应用技术型大学转型背景下，在教材中融入了数学建模思想，精选现实生活中的一些问题简化成例题，可以更好地培养学生的应用能力和创新能力。

本书可作为应用型本科院校各工科专业“高等数学”课程的教材，也可供工程技术人员自学参考。

图书在版编目（ＣＩＰ）数据

高等数学. 下册 / 尧雪莉, 胡艳梅, 梁海峰主编
. -- 北京 : 中国水利水电出版社, 2017.8
21世纪应用型本科规划教材
ISBN 978-7-5170-5680-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①尧… ②胡… ③梁… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第173754号

书　名	21世纪应用型本科规划教材 **高等数学（下册）** GAODENG SHUXUE
作　者	主　编　尧雪莉　胡艳梅　梁海峰 副主编　尚海涛　周　勇　王　剑
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）
经　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	中国水利水电出版社微机排版中心
印　刷	北京瑞斯通印务发展有限公司
规　格	184mm×260mm　16开本　13.75印张　326千字
版　次	2017年8月第1版　2017年8月第1次印刷
印　数	0001—3000册
定　价	**38.00**元

凡购买我社图书，如有缺页、倒页、脱页的，本社营销中心负责调换

前言

QIANYAN

高等数学自牛顿、莱布尼茨创立以来，经过三百多年的发展，理论体系已很完备。在信息化时代，地方院校向应用技术型大学转型的背景下，我们从当前高等数学教学改革的趋势和学生的需求出发，将数学与现实生活相结合，把教材编得更为通俗、清晰、实用。

本书借鉴美国微积分教学改革坚持的四项原则，即将微积分概念的四个侧面——图像、数值、符号、语言同时展现给学生，注重用自然语言描述概念，用图像形象地反映概念。这给了我们一个启示，将数学建模思想融入教材：精选生活实例，从中引入抽象的概念，将枯燥的概念具体化、通俗化，使学生真切地感受到这些定义来自于现实生活，便于培养学生的应用实践能力。

本书以变量为线索，以极限为核心，把高等数学的主要概念编织成一个清晰的体系。例如：连续是函数的极限等于函数值；导数是改变量之商的极限；定积分是一元函数特殊和式的极限；重积分是多元函数特殊和式的极限；无穷级数是部分和式的极限。着力于对极限、连续、微分、定积分、重积分、曲线积分、曲面积分、无穷级数等抽象概念进行通俗的解释，引入具体生活案例力图使这些抽象概念具体化、通俗化，使学生真切地感受到这些定义来源于生活，更容易理解。

本书最大的特点是将建模思想融入教材中，将数学和现实生活案例相结合。在导数与微分部分我们引入核弹头大小与爆炸距离模型、飞机的降落模型；在积分部分我们引入标尺的设计模型；在微分方程中引入马尔萨斯人口指数增长模型、放射性元素衰变的数学模型、阻滞增长模型（Logistic 模型）；在多元函数微分中融入最佳满意度模型；重积分中融入容器储水量模型，等等。在教材的附录中我们精选了几个典型的数学模型，使读者更多地了解数学与现实生活案例的关系，感受到数学的魅力，从而培养读者的数学应用意识。

书中标注“＊”的内容为选修内容，习题精选了部分考研试题，习题前

括号中的数字是指考研年份。

非常感谢华东交通大学理工学院数学教研室全体教师的努力，特别是梁海峰、尧雪莉、尚海涛、赵岚、赖邦城等老师的倾情付出，本书才得以按时完成。由于时间仓促以及编者水平有限，书中错误和不足之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编者

2017 年 5 月

目 录
MULU

第九章　空间解析几何与向量代数

平面解析几何通过建立平面直角坐标系把平面上的点 M 与实数对 (x,y) 对应起来，即使“形”与“数”对应起来，几何曲线与代数方程对应起来，从而将几何与代数统一起来.

空间解析几何则通过建立空间直角坐标系，把空间曲面、空间曲线与代数方程、代数方程组对应起来. 空间解析几何以向量代数作为工具，分别研究了空间曲面、空间曲线、空间平面和空间直线.

第一节　空间直角坐标系与向量

一、空间直角坐标系

在空间取定一点 O 作为原点，过 O 作三条互相垂直且有相同单位长度的数轴，分别称为 x 轴、y 轴和 z 轴. 通常将 x 轴和 y 轴置于水平面上，z 轴取铅直方向，三个坐标轴的次序按右手法则排序：用右手握住 z 轴，四个手指从 x 轴正向旋转 $90°$ 到 y 轴正向时拇指的指向就是 z 轴的正向. 这样建立的空间直角坐标系称为右手系（图 9-1).

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样定出的三个平面统称为坐标面. 如 x 轴及 y 轴所确定的坐标面叫作 xOy 面，另外两个由 y 轴及 z 轴和由 z 轴及 x 轴所确定的坐标面，分别叫作 yOz 面及 zOx 面. 三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫作卦限. 含有 x 轴、y 轴、z 轴正半轴的那个卦限叫作第一卦限，其他第二、第三、第四卦限，均在 xOy 面的上方，按逆时针方向确定. 第五至第八卦限，在 xOy 面的下方，由第一卦限之下的第五卦限，按逆时针方向确定，这八个卦限分别用字母Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示（图 9-2).

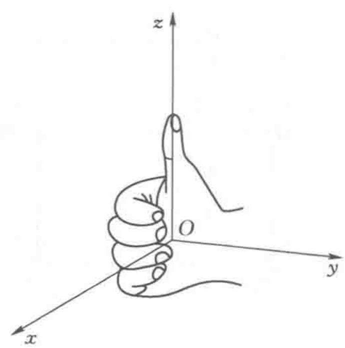


图 9-1

二、空间中点的坐标与两点间的距离

1. 空间中点的坐标

有了空间直角坐标系，就可以建立空间中的点 M 和有序数组 (x,y,z) 之间的对应关系. 设 M 为空间一已知点，我们过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴，它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 P、Q、R（图 9-3)，这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的

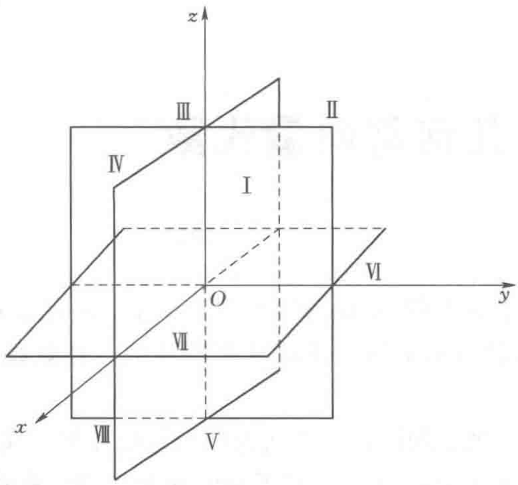


图 9-2

坐标依次为 x、y、z. 于是空间一点 M 就唯一确定了一个有序数组 (x,y,z)；反过来，已知一有序数组 (x,y,z)，我们可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P，在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q，在 z 轴上取坐标为 z 的点 R，然后通过 P、Q 与 R 分别作 x 轴、y 轴和 z 轴的垂直平面. 这三个垂直平面的交点 M 便是由有序数组 (x,y,z) 所确定的唯一的点. 这样，就建立了空间的点 M 和有序数组 (x,y,z) 之间的一一对应关系. 这组数 (x,y,z) 就叫作点 M 的坐标，并依次称 x、y、z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标. 坐标为 x、y、z 的点 M（图 9-3）通常记为 $M(x,y,z)$.

坐标面上和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征. 例如：如果点 M 在 yOz 面上，则 $x=0$；同样，在 zOx 面上的点，$y=0$；在 xOy 面上的点，$z=0$. 如果点 M 在 x 轴上，则 $y=z=0$；同样，在 y 轴上的点，有 $z=x=0$；在 z 轴上的点，有 $x=y=0$. 如点 M 为原点，则 $x=y=z=0$.

点 $M(x,y,z)$ 关于 $z=0$ 平面对称点为 $M'(x,y,-z)$，点 M 关于 x 轴（即 $y=0$ 平面与 $z=0$ 平面的交线）的对称点是 $M''(x,-y,-z)$，点 M 关于原点的对称点是 $M'''(-x,-y,-z)$.

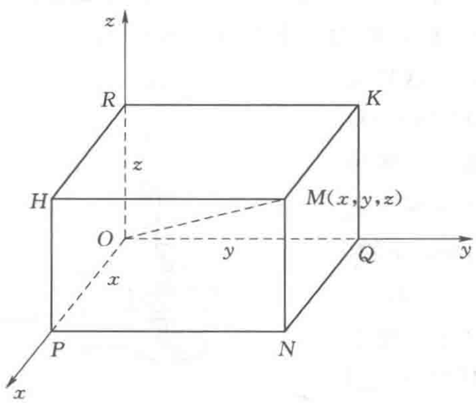


图 9-3

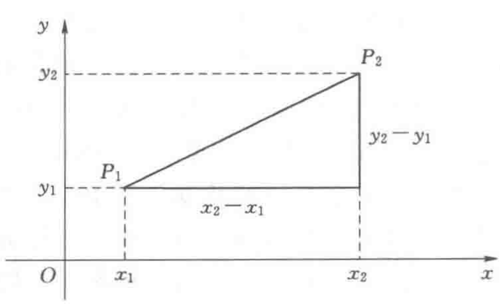


图 9-4

2. 空间中两点间的距离

平面上的两点 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$，根据勾股定理，其距离 $d=|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$（图 9-4）.

空间中两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$，其距离为

$$d=|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{9-1}$$

特殊地，原点 $O(0,0,0)$ 到点 $M(x,y,z)$ 的距离为（图 9－3）

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

【例 9－1】 证明以 $A(4,3,1)$、$B(7,1,2)$、$C(5,2,3)$ 为顶点的 $\triangle ABC$ 是一等腰三角形.

证：

$$|AB|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14$$

$$|BC|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6$$

$$|CA|^2=(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2=6$$

由于 $|BC|=|CA|=\sqrt{6}$，所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

【例 9－2】 在 x 轴上求与 $A(-2,1,1)$ 和 $B(0,1,2)$ 等距离的点.

解： 因为所求的点 P 在 x 轴上，所以设该点为 $p(x,0,0)$，依题意有

$$|pA|=|pB|$$

即

$$\sqrt{(x+2)^2+(0-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(0-1)^2+(0-2)^2}$$

两边去根号，解得

$$x=-\frac{1}{4}$$

所以，所求的点为 $M\left(-\frac{1}{4},\ 0,\ 0\right)$.

三、向量的概念

在研究力学、物理学以及其他应用科学时，常会遇到这样一类量，它们既有大小，又有方向，例如力、力矩、位移、速度、加速度等，这一类量叫作向量.

在数学上，往往用一条有方向的线段，即有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 M_1 为起点、M_2 为终点的有向线段所表示的向量，记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$. 有时也用一个黑体字母或用一个上面加箭头的字母表示向量. 例如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{F}$ 等.

现实中的向量有些与起点有关，有些与起点无关. 但数学中，只研究与起点无关的向量，称为自由向量. 自由向量具有平移不变性，可以平移，但不可旋转和伸缩. 因为平移不改变其方向和大小，但旋转改变方向，伸缩改变大小. 如遇与起点有关的向量，则在一般原则下作特殊处理.

以坐标原点 O 为起点，向一个点 M 引向量 $\overrightarrow{OM}$，这个向量叫作点 M 对于点 O 的向径，常用黑体字 $\boldsymbol{r}$ 表示. 由于我们只讨论自由向量，所以如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，且方向相同，我们就说向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 这就是说，经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.

向量的大小叫作向量的模. 向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$、$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的模依次记作 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$、$|\boldsymbol{a}|$、$|\boldsymbol{b}|$. 模等于 1 的向量叫作单位向量. 模等于零的向量叫作零向量，记作 $\vec{0}$ 或 $\mathbf{0}$. 零向量的起点和终点重合，它的方向可以看作是任意的.

两个非零向量如果它们的方向相同或者相反，就称这两个向量平行．向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$．由于零向量的方向可以看作是任意的，因此可以认为零向量与任何向量都平行．

四、向量的线性运算

1. 向量的加减

中学物理学过作为向量的力、速度及其合成．例如，力 $\overrightarrow{F}_1$ 与 $\overrightarrow{F}_2$ 相加，其合力 $\overrightarrow{F}$ 是以 $\overrightarrow{F}_1$ 与 $\overrightarrow{F}_2$ 为邻边的平行四边形的对角线向量［图 9－5（a)］．再如速度 $\overrightarrow{v}_1$ 与 $\overrightarrow{v}_2$ 相加，其合速度 $\overrightarrow{v}$ 是以 $\overrightarrow{v}_1$ 与 $\overrightarrow{v}_2$ 为邻边的平行四边形的对角线向量［图 9－5（b)］．

一般地，两个向量 $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 相加，其和是以 $\overrightarrow{a}$ 与 $\overrightarrow{b}$ 为邻边的平行四边形的对角线向量 $\overrightarrow{c}$，即 $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$［图 9－5（c)］．这种求和法则称为向量相加的平行四边形法则．

由于向量可以平移，若把 $\overrightarrow{b}$ 的起点平移到 $\overrightarrow{a}$ 的终点，则连线 $\overrightarrow{a}$ 的起点和 $\overrightarrow{b}$ 的终点的向量，也是平行四边形对角线向量 $\overrightarrow{c}$［图 9－5（d)］，即 $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$，这种求向量和的法则称为向量相加的三角形法则．

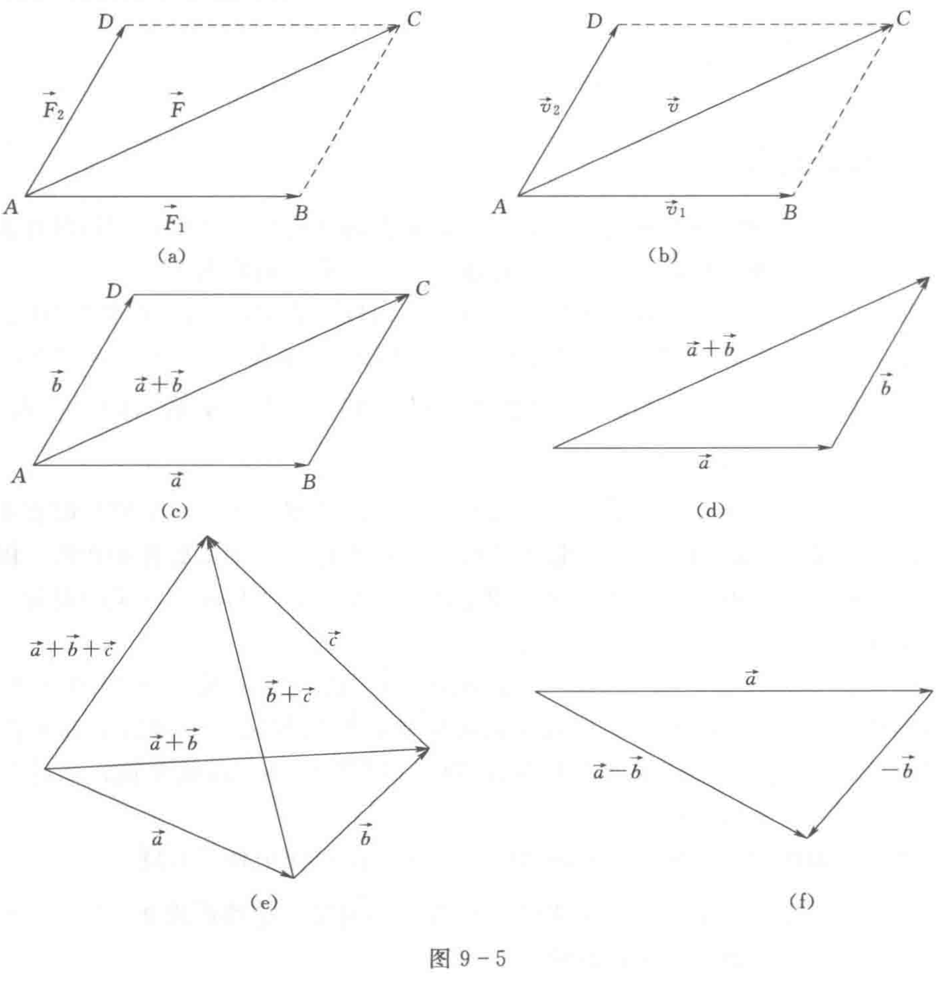


图 9－5

依据三角形法则，当三个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 首尾相接时，连接 $\vec{a}$ 的起点和 $\vec{c}$ 的终点的向量即为 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ [图 9-5 (e)]. 一般地，当 n 个向量 $\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，…，$\vec{a}_n$ 首尾相接时，连接 $\vec{a}_1$ 的起点和 $\vec{a}_n$ 的终点的向量即为 $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n$.

向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差规定为

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

若把 $\vec{a}$ 与 $-\vec{b}$ 首尾相接，则连接 $\vec{a}$ 的起点和 $-\vec{b}$ 的终点的向量为 $\vec{a}-\vec{b}$ [图 9-5 (f)].

向量加法满足：

(1) 交换律：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ [图 9-5 (c)].

(2) 结合律：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ [图 9-5 (e)].

2. 数乘向量

实数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的乘积是一个向量，记为 $\lambda\vec{a}$，其模 $|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$，其方向，当 $\lambda>0$ 时与 $\vec{a}$ 相同；当 $\lambda<0$ 时与 $\vec{a}$ 相反，也就是说，非零 λ 乘向量 $\vec{a}$，只是把向量 $\vec{a}$ 伸缩 λ 倍，伸缩前后的向量平行.

当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 是零向量，即 $\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

数乘向量满足：

(1) 结合律：$\lambda(\mu\vec{a})=\mu(\lambda\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$.

(2) 分配律：$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$，$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

向量的加减运算和数乘运算统称为向量的线性运算.

【例 9-3】 在平行四边形 $ABCD$（图 9-6）中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$、$\overrightarrow{MD}$，其中 M 是平行四边形对角线的交点.

解： 由于平行四边形的对角线互相平分，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$，即 $-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{MA}$，于是 $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

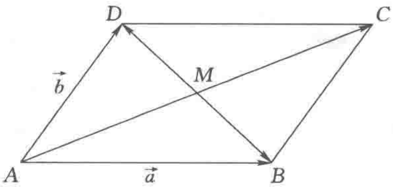


图 9-6

因为 $\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$，所以 $\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

又因 $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$，所以 $\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

由于 $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$，所以 $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

按照数乘向量的运算，与非零向量 $\vec{a}$ 同方向的单位向量 $\vec{e_a}$ 为

$$\vec{e_a}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \tag{9-2}$$

显然，$\frac{1}{|\vec{a}|}>0$，故 $\vec{e_a}$ 与 $\vec{a}$ 方向相同，又因 $|\vec{e_a}|=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=1$，故 $\vec{e_a}$ 是与 $\vec{a}$ 同方向的单位向量.

定理 9-1 两个非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行的充要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

证：充分性：若 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$，则 $\lambda>0$ 时，$\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 方向相同；$\lambda<0$ 时，$\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 方向相反，即 $\vec{b}\parallel\vec{a}$.

必要性：若 $\vec{b}\parallel\vec{a}$，当 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向时，取 $\lambda=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$，于是有 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$；当 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 反向时，取 $\lambda=-\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$，于是有 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

唯一性：若 λ 不唯一，有 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ 且 $\vec{b}=\mu\vec{a}$，两式相减得 $(\lambda-\mu)\vec{a}=\vec{0}$，即 $|\lambda-\mu||\vec{a}|=0$，因 $|\vec{a}|\neq0$，故 $|\lambda-\mu|=0$，即 $\lambda=\mu$，λ 唯一.

五、向量的坐标表示式

设 x 轴、y 轴、z 轴正向的单位向量分别为 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$，应用向量加法法则，由图 9-3 有

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

该式称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标分解式，$x\vec{i}$、$y\vec{j}$、$z\vec{k}$ 称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 沿三个坐标轴方向的分向量，x、y、z 称为 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标，记为 $\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$. 不难看出，$(x,y,z)$ 既可以表示空间一点 M，又可以表示 M 点的位置向量 $\overrightarrow{OM}$（亦称向径）. 表示点时用 $M(x,y,z)$，表示位置向量时用 $\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$.

有了向量的坐标表示式，就可以将向量的几何运算转化为向量坐标之间的代数运算.

设
$$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z),\ \vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$$
即
$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\ \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$$

利用向量加法的交换律与结合律及数乘向量的结合律与分配律，有

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x)\vec{i}+(a_y+b_y)\vec{j}+(a_z+b_z)\vec{k}$$
$$\vec{a}-\vec{b}=(a_x-b_x)\vec{i}+(a_y-b_y)\vec{j}+(a_z-b_z)\vec{k}$$
$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x)\vec{i}+(\lambda a_y)\vec{j}+(\lambda a_z)\vec{k}$$

即
$$\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z)$$
$$\vec{a}-\vec{b}=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z)$$
$$\overrightarrow{\lambda a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$$

由此可见，对向量进行加减与数乘，只需对向量各坐标进行相应运算即可. 根据定理 9-1，对两个非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$，$\vec{b}\parallel\vec{a}$ 相当于 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$，即

$$(b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z)=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$$

上式相当于
$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$$

即平行向量的对应坐标成比例. 当 $a_x=0$ 时，应理解为

$$b_x=0,\quad \frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$$

【例 9-4】 设 $\vec{a}=(4,3,0)$，$\vec{b}=(1,-2,2)$，求 $\vec{a}+2\vec{b}$.

解：$\vec{a}+2\vec{b}=(4,3,0)+2(1,-2,2)=(4,3,0)+(2,-4,4)=(6,-1,4)$

六、向量的模、方向角、投影

1. 向量的模与两点间的距离公式

设向量$\vec{r}=(x,y,z)$，作$\vec{r}=\overrightarrow{OM}$，如图 9-3 所示，有

$$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$
$$|\vec{r}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

设有点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和点 $B(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

A、B 间的距离为

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

【例 9-5】 已知两点 $A(1,1,0)$ 和 $B(2,1,1)$，求与$\overrightarrow{AB}$方向相同的单位向量$\vec{e}$.

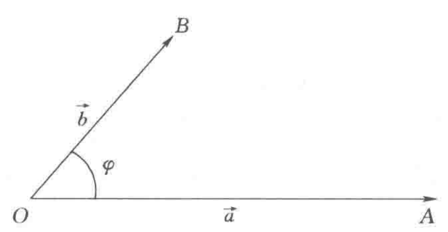
解：因
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2,1,1)-(1,1,0)=(1,0,1)$$
$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$$

所以
$$\vec{e}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$$

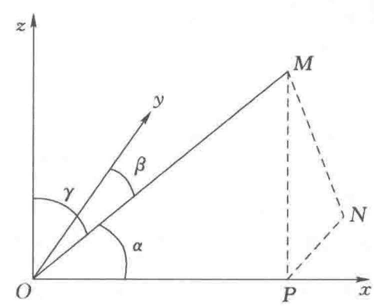
2. 方向角与方向余弦

非零向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的夹角是指不超过 π 的那个角 φ [图 9-7 (a)]，记为 $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ 或 $(\widehat{\vec{b},\vec{a}})$，即 $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\varphi$.

非零向量 $\vec{r}$ 与三条坐标轴正向的夹角 α、β、γ 称为向量 $\vec{r}$ 的方向角 [图 9-7 (b)]. $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\vec{r}$ 的方向余弦. 显然，



(a)



(b)

图 9-7

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{r}|},\quad \cos\beta=\frac{y}{|\vec{r}|},\quad \cos\gamma=\frac{z}{|\vec{r}|} \tag{9-3}$$
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

因此，向量 $\vec{r}$ 的方向余弦就是与 $\vec{r}$ 同方向的单位向量，即

$$\vec{e_r}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

【例 9-6】 已知两点 $A(0,2,\sqrt{2})$ 和 $B(1,1,0)$，求向量$\overrightarrow{AB}$的方向余弦、方向角及与

$\overrightarrow{AB}$同方向的单位向量.

解：因$\overrightarrow{AB}=(1,-1,-\sqrt{2})$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-\sqrt{2})^2}=2$

所以
$$\cos\alpha=\frac{1}{2},\quad \cos\beta=-\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\alpha=\frac{\pi}{3},\quad \beta=\frac{2\pi}{3},\quad \gamma=\frac{3\pi}{4}$$

与$\overrightarrow{AB}$同方向的单位向量$\vec{e}$为
$$\vec{e}=\frac{1}{|\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(1,-1,-\sqrt{2})=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

3. 点、向量在坐标轴上的投影

当光线垂直照射到直线或平面上时，几何体投向直线或平面形成的影子，称为几何体在直线或平面上的投影❶.

求投影可通过从几何体向直线或平面作垂线得到. 设u轴由点O和单位向量$\vec{e_u}$确定. 过点M作u轴的垂线MM'，则垂足M'称为点M在u轴上的投影，用点M'的坐标u表示[图9－8 (a)].

对任给向量$\vec{r}$，作$\overrightarrow{OM}=\vec{r}$，在$\vec{r}$与$u$轴决定的平面内过点$M$作$u$轴的垂线$MM'$，设$\overrightarrow{OM'}=u\vec{e_u}$，则向量$\overrightarrow{OM'}$称为$\vec{r}$在$u$轴上的投影，用$\overrightarrow{OM'}$的坐标$u$表示[图9－8 (b)].

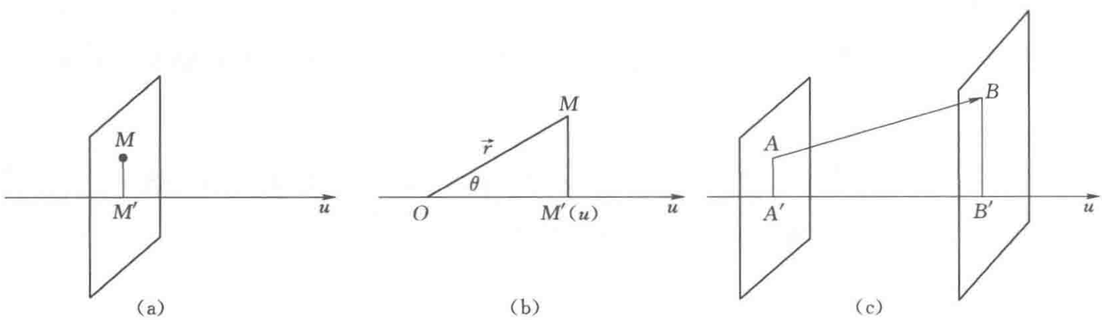


图9－8

记为$prj_u\vec{r}=u$或$(\vec{r})_u=u$. 当$u>0$时，$\vec{r}$的投影向量与u轴方向相同；当$u<0$时，$\vec{r}$的投影向量与u轴方向相反. 设$\vec{r}$与u轴正向的夹角为θ，则$u=|\vec{r}|\cos\theta$.

一般向量$\overrightarrow{AB}$在u轴上的投影如图9－8 (c) 所示. 由投影定义可知，向量$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$在三条坐标轴上的投影分别为$a_x\vec{i}$、$a_y\vec{j}$、$a_z\vec{k}$，可分别用坐标a_x、a_y、a_z表示，即
$$prj_x\vec{a}=a_x,\quad prj_y\vec{a}=a_y,\quad prj_z\vec{a}=a_z$$
或
$$(\vec{a})_x=a_x,\quad (\vec{a})_y=a_y,\quad (\vec{a})_z=a_z$$

向量的投影具有与坐标相同的性质.

性质1　$(\vec{a})_u=|\vec{a}|\cos\theta$ (θ为$\vec{a}$与u轴正向的夹角).

性质2　$(\vec{a}+\vec{b})_u=(\vec{a})_u+(\vec{b})_u$.

❶ 本书仅讨论垂直投射形成的投影.

性质 3　$(\lambda\vec{a})_u=\lambda(\vec{a})_u$.

习　题　9-1

1. 在 z 轴上求一点 M，使它与点 $A(-4,1,7)$、$B(3,5,-2)$ 的距离相等.

2. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上，其底面中心在坐标原点，底面的顶点在 x 轴和 y 轴上，求其各顶点的坐标.

3. 求点 $M(4,-3,5)$ 到各坐标轴的距离.

4. 求平行于向量 $\vec{\alpha}=(6,7,-6)$ 的单位向量.

5. 已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$，试计算 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

6. 一向量的终点在点 $B(2,-1,7)$，其在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 4、-4 和 7，求此向量起点 A 的坐标.

7. 设 $\vec{a}=(3,5,8)$，$\vec{b}=(2,-4,-7)$，$\vec{c}=(5,1,-4)$，求 $4\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$ 在 x 轴上的投影和在 y 轴上的分量.

第二节　点 积 与 向 量 积

一、点积 $\vec{a}\cdot\vec{b}$

点积常用于表示常力做功、证垂直、算夹角、算投影.

设一物体在常力 $\vec{F}$ 作用下沿直线从点 M_1 移动到点 M_2，以 $\vec{S}$ 表示位移 $\overrightarrow{M_1M_2}$，则力 $\vec{F}$ 所做的功为

$$W=|\vec{F}||\vec{S}|\cos\theta$$

式中 θ 为 $\vec{F}$ 与 $\vec{S}$ 的夹角［图 9-9 (a)］，这样确定一个数量在许多实际问题中常常遇到，由此引入如下的点积定义.

定义 9-1　设 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为向量，θ 为其夹角，称 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的点积，记为 $\vec{a}\cdot\vec{b}$［图 9-9 (b)］，即

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \tag{9-4}$$

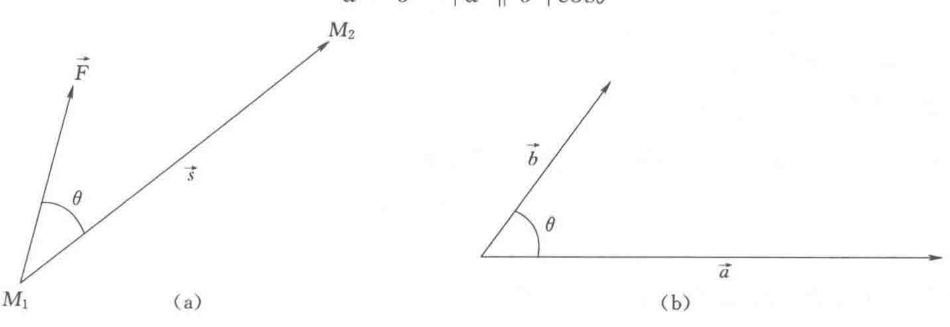


图 9-9

显然点积的结果是一个数，故点积又称为数量积，也称为内积.

据此定义，上述力所做功 W 是力 $\vec{F}$ 与位移 $\vec{S}$ 的点积，即 $W=\vec{F}\cdot\vec{S}$.

由点积定义可以推出：

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos\theta=|\vec{a}|^2$.

(2) 对于两个非零向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，其垂直的充要条件是点积为零，即

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

(3) $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影 $(\vec{a})_{\vec{b}}=|\vec{a}|\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$（$\theta$ 为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角）.

点积满足如下运算规律：

(1) 交换律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

(2) 分配律：$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

(3) 数乘结合律：$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

【例 9-7】 试用点积证明三角形的余弦定理.

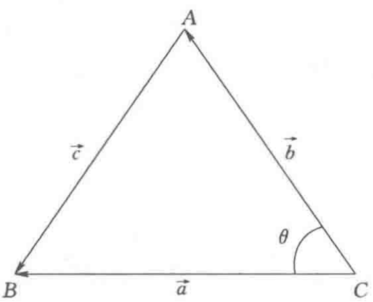


图 9-10

证： 如图 9-10 所示，$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$

$$\begin{aligned}|\vec{c}|^2&=\vec{c}\cdot\vec{c}=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})\\&=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{b}\\&=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\end{aligned}$$

设 $|\vec{a}|=a$，$|\vec{b}|=b$，$|\vec{c}|=c$，则有

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$

下面推导点积的坐标表示式.

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$，$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$，由于 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ 互相垂直，且模均为 1，所以有

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{i}=\vec{i}\cdot\vec{k}=0,\quad \vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$$

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})\\&=a_x\vec{i}\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})+a_y\vec{j}\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})+a_z\vec{k}\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})\\&=a_xb_x\vec{i}\cdot\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\cdot\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\cdot\vec{k}+a_yb_x\vec{j}\cdot\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\cdot\vec{j}+a_yb_z\vec{j}\cdot\vec{k}\\&\quad+a_zb_x\vec{k}\cdot\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\cdot\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\cdot\vec{k}\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\end{aligned}$$

这就是点积的坐标表示式.

由于 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$，所以对非零向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，有

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}\tag{9-5}$$

这就是两向量夹角余弦的坐标表示式.

【例 9-8】 已知三点 $C(1,1,1)$、$A(2,2,1)$ 和 $B(2,1,2)$，求 $\angle ACB$.

解： 从 C 到 A 的向量记为 $\boldsymbol{a}$，从 C 到 B 的向量记为 $\boldsymbol{b}$，则 $\angle ACB$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.