国家社科基金
GUOJIA SHEKE JIJIN HOUQI ZIZHU XIANGMU
后期资助项目

临界的传递逻辑

——模态逻辑的濒表格性问题探究

杜珊珊　等著

科学出版社

国家社科基金
GUOJIA SHEKE JIJIN HOUQI ZIZHU XIANGMU
后期资助项目

临界的传递逻辑

——模态逻辑的濒表格性问题探究

杜珊珊　康宏逵　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书详述传递的濒表格逻辑的判据及其应用，以及在此基础上所做的关于濒表格逻辑的若干研究结果，解决了传递逻辑格的濒表格性的语义判据，以及传递逻辑格的子格NExtQ4中濒表格逻辑族的基数、分类及公理化问题，展示了如何将已有的传递的濒表格逻辑的结果纳入本书提出的方法和视野。全书共分为三个部分——序篇、主篇和附录。序篇介绍了背景知识，回顾了传递的濒表格逻辑的研究发展史；主篇完整叙述了传递的濒表格逻辑的语义判据的证明、应用过程及其他相关的研究结果；附录给读者提供了备查的相关知识。

本书适合从事模态逻辑研究的科学工作者阅读，也可供逻辑学相关专业的研究生、本科生学习和参考。

图书在版编目(CIP)数据

临界的传递逻辑：模态逻辑的濒表格性问题探究/杜珊珊，康宏逵著. —北京：科学出版社，2017.7

国家社科基金后期资助项目

ISBN 978-7-03-053081-3

I. ①临… II. ①杜… ②康… III. ①模态逻辑－研究 IV. ①B815.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 125610 号

责任编辑：郭勇斌 邓新平 / 责任校对：刘亚琦
责任印制：张 倩 / 封面设计：蔡美宇

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新科印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 7 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2017 年 7 月第一次印刷 印张：15 3/4
字数：266 000

定价：78.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

国家社科基金后期资助项目
出版说明

后期资助项目是国家社科基金项目主要类别之一，旨在鼓励广大人文社会科学工作者潜心治学，扎实研究，多出优秀成果，进一步发挥国家社科基金在繁荣发展哲学社会科学中的示范引导作用。后期资助项目主要资助已基本完成且尚未出版的人文社会科学基础研究的优秀学术成果，以资助学术专著为主，也资助少量学术价值较高的资料汇编和学术含量较高的工具书。为扩大后期资助项目的学术影响，促进成果转化，全国哲学社会科学规划办公室按照“统一设计、统一标识、统一版式、形成系列”的总体要求，组织出版国家社科基金后期资助项目成果。

全国哲学社会科学规划办公室

2014 年 7 月

目　录

第一编　序　篇

第一章　背景知识一览

模态逻辑已经发展为一门大学科了。这个逻辑分支里铢积寸累来的资料，也许还谈不上浩如烟海，说它洋洋大观怕是绝不会过分的。好在理解本书主旨所必需的背景知识并不多，也不深。而且，本书对背景知识的介绍力求详细、浅显，并配以图和例进行说明，让从未接触过模态逻辑的读者也能领会大意。如果读者想更深入地把握某些背景知识，请参考两位俄罗斯学者查格罗夫（A. Chagrov）和扎哈里雅雪夫（M. Zakharyaschev）用英文编写的著名教材《模态逻辑》[①]。为了方便读者，本书在各方面都尽可能与该书保持一致，在记法和作图上也是如此。

第一节　逻辑 K4 及其正规扩充

一、模态语言ML

逻辑总是表述在语言中，本书所要研究的模态逻辑也是表述在一类特定的语言中。这类语言有无数不同的变种，它们的共同点在于都给古典命题逻辑语言添上一个模态算子□（通称“必然性算子”或“匣子”；也可以添上□的对偶模态算子◇，通称“可能性算子”或“钻石”）。本书从一开始就选定这类模态语言的一个变种，命名为ML。

语言ML的初始符号包括，也只包括：

- 命题变号：p，q，r，p_0，q_0，r_0，p_1，q_1，r_1，$\cdots$；
- 命题常号：$\perp$（假）；
- 布尔算子：$\wedge$（合取），$\vee$（析取），$\rightarrow$（蕴涵）；
- 模态算子：□（必然）；
- 括号：（，）。

语言ML的公式记为ML-公式，只要不致混淆也经常简称公式。它们是由ML的初始符号依照下列形成规则构造出来的序列：

- 所有命题变号和命题常号$\perp$是（原子）公式；
- 如果ψ 和 χ 是公式，那么$(\psi \wedge \chi)$，$(\psi \vee \chi)$和$(\psi \rightarrow \chi)$也是公式；

① Chagrov，A. et al，*Modal Logic*，Oxford，Oxford University Press，1997.

➢ 如果 ψ 是公式，$(\Box\psi)$ 也是公式。

按照惯例，逻辑学者在他们的研究工作中需要区分对象语言和元语言。在本书中，ML是对象语言。众所周知，哪怕只是想把对象语言描述出来（如表述它的公式形成规则），也必须使用元语言。本书不详细规定所要使用的元语言，只提出若干惯用的约定：用小写希腊字母 φ，ψ，χ 等表示ML-公式；用大写希腊字母 Γ，Δ，Θ 等表示ML-公式集，用 For 指全体ML-公式集；另外，本书采取“自名的说话方式”，用对象语言ML的符号或公式充当它们自身的名称。

语言ML的初始符号不多、形成规则不灵活，所以，用初始符号按形成规则一板一眼地书写，动辄就会产生冗长而不易辨认的公式，例如，$(((p\to q)\to((q\to\bot)\to(p\to\bot)))\wedge(((q\to\bot)\to(p\to\bot))\to(p\to q)))$，为了避免这样的麻烦，本书容许在元语言中实行两项变通措施，而不去触动对象语言本身：

第一，借助缩写定义，引进语言ML原来没有的一些新符号，例如，布尔算子 $\neg$（否定）和 $\leftrightarrow$（等值）、命题常号 $\top$（真）及模态算子 $\Box$ 的对偶算子 $\Diamond$（可能）：

$$(\neg\psi)=_{def}(\psi\to\bot)$$
$$(\psi\leftrightarrow\chi)=_{def}((\psi\to\chi)\wedge(\chi\to\psi))$$
$$\top=_{def}(\neg\bot)$$
$$\Diamond\psi=_{def}\neg\Box\neg\psi$$

在这些定义中，记号 $=_{def}$ 左侧只是右侧的ML-公式在元语言中的缩写，它们本身不是ML-公式。

第二，按某些约定来省略ML-公式中的括号，例如：

➢ 最外层的括号可以省去；

➢ $\vee$ 和 $\wedge$ 优先于[①] $\to$ 和 $\leftrightarrow$；

➢ $\wedge$ 优先于 $\vee$；

➢ $\neg$ 优先于其他布尔算子；

➢ $\Box$ 和 $\Diamond$ 优先于一切布尔算子；

➢ $\to$ 和 $\leftrightarrow$ 内部及同一命题联结词（否定除外）内部采用左结合原则[②]。

---

① 与较优先的联结词相联系的括号可以省略，而不必考虑优先性较弱的联结词。反之不可以。

② 所谓“左结合原则”是指当 $\to$ 和 $\leftrightarrow$ 或者同一命题联结词（否定除外）连续出现时，位于左边的联结词优先于位于右边的联结词。

举例来说，根据上述省略括号的约定[①]，几个缩写定义可以改写成：

$$\neg\psi =_{def} \psi \to \bot$$

$$\psi \leftrightarrow \chi =_{def} (\psi \to \chi) \wedge (\chi \to \psi)$$

$$\top =_{def} \neg\bot$$

$$\Diamond\psi =_{def} \neg\Box\neg\psi$$

现在同时应用本书的两项变通办法，原先那个冗长而不易辨认的ML-公式便缩短很多，变成了

$$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)^{②}$$

按前文标出的布尔算子的读法，它应当读作“p蕴涵q”等值于“非q蕴涵非p”，意思一目了然。

二、正规模态逻辑

一个逻辑不是别的，就是某种语言中配上了一套演绎装置——公理与推论规则——的公式集。那么，什么是正规模态逻辑呢？

令L是任意ML-公式集。考虑L是不是具备以下两个特点：

（1）L包括全体古典重言式集Cl；L包含模态公式$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$。

（2）L在分离规则下封闭，即如果$\varphi \to \psi \in L$，$\varphi \in L$那么$\psi \in L$；L在代入规则下封闭，即如果$\varphi \in L$，那么$\varphi^s \in L$，此处φ^s是指φ的任何代入特例；L在必然化规则下封闭，即如果$\varphi \in L$，那么$\Box\varphi \in L$。

当且仅当公式集L兼具两个特点，即同时满足条件（1）和（2），L是正规模态逻辑，简称正规逻辑；只要不引起混淆，也可简称之为逻辑。

全体ML-公式集For自动满足这一切条件，For是一正规模态逻辑，而且是其中的最大者。正规模态逻辑中间必有一最小者，被命名为K[③]。可以把它表述为

$$\mathrm{K} = \mathrm{Cl} \oplus \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$$

这里的Cl指的是古典命题逻辑（等于古典重言式集），$\oplus$表示公式集$\mathrm{Cl} \cup \{\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)\}$在分离、代入、必然化下的闭包。

一般地说，对任何正规模态逻辑L，总是存在一个ML-公式集Γ，使得

---

① 省略括号的约定还可以参见丘奇（A. Church）所撰写的教材 *Introduction to Mathematical Logic*（*Volume I*）（Princeton，Princeton University Press，1956，p. 79）的相关说明。

② 严格说来，完全省略括号的结果应该是：$p \to q \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$。有时候，当完全省略括号得到的“公式”并不比不完全省略的“公式”更清楚的时候，本书就不采取完全省略括号的做法。

③ 意在纪念逻辑学家克里普克（S. Kripke）。

$$L = \mathrm{K} \oplus \Gamma$$

这里 $\oplus$ 指公式集 $\mathrm{K} \cup \Gamma$ 在分离、代入、必然化下的闭包。这里提醒读者，倘若公式集 $\mathrm{K} \cup \Gamma$ 只须在分离和代入下封闭，我们就写成：

$$L = \mathrm{K} + \Gamma$$

这时，L 称为拟正规逻辑。正规逻辑当然都是拟正规的，反之却不尽然。

认识（正规或拟正规）逻辑的数目比天文数字还要大得多，对初学者领悟现代模态逻辑的精神十分重要。至今仍有不少人把一切模态逻辑都看成“演算”，更有甚者，误认为模态逻辑无非是路易士（C. I. Lewis，现代模态逻辑创始人）时代的几个实例，即演算S1～S9。要澄清这个问题就得先来谈谈正规逻辑的公理化概念。

当我们使用 $L = \mathrm{K} \oplus \Gamma$ 这种表示法的时候，不管公式集 Γ 是不是递归的或可判定的，都可以说 Γ 是 L 的（基于K的）公理集，Γ 把 L 公理化了。其实，用递归论术语，不难给出公理集 Γ 和逻辑 L 在能行性程度方面的不同类型：

（1）Γ 是有穷集，这时 L 称为有穷可公理化的；

（2）Γ 是递归可枚举（的无穷）集，这时 L 称为递归可公理化的；

（3）Γ 不是递归可枚举集，这时 L 称为非递归可公理化的。

可举例说明。试想象按以下模式给出的正规逻辑 U：

$$U = \mathrm{K} \oplus \Delta$$

此处 $\Delta=\{\Diamond\Box\bot \wedge \Diamond\Diamond\top \to \Box^{k}\Diamond\top：k \in X\}$，$X$ 是一自然数集，$\Box^{k}\Diamond\top$ 是 $\overbrace{\Box\cdots\Box}^{k\text{个}\Box}\Diamond\top$ 的缩写。递归论表明，自然数集 X 可以是有穷的、递归可枚举的或者不是递归可枚举的，这决定着公理集 Δ 和逻辑 U 也会分别归入类型（1）、（2）或（3）。既然非递归可枚举的自然数集的总数为 $2^{\aleph_0}$，那么，毫无疑问，非递归可公理化的逻辑 U 的总数也为 $2^{\aleph_0}$。

有穷的和递归可枚举的公理集 Γ 都是递归集或可判定集，存在一算法或机械程序来判别任意公式在不在 Γ 中。按逻辑学界久已形成的惯用语，有穷可公理化或递归可公理化的逻辑才称得上“演算”，其余不是。从能行性着眼，只有演算可取。遗憾的是，演算的数目显然受可能的算法的数目所限，至多可数无穷多个，而逻辑的数目多到不可数，其中无法能行处置的逻辑同样多到不可数。现代模态逻辑绝不只顾演算而不顾其余，它要把全部逻辑统统纳入自己的视野，尽力揭示这庞然总体的复杂结构，不拘泥于能行性是现代化潮流的一个很本质的特色。

三、形形色色的K4-逻辑

给定逻辑L和L'。如果$L\subseteq L'$，L称为L'的子逻辑，L'称为L的扩充。如果$L\subseteq L'$但$L\neq L'$，L称为L'的真子逻辑，L'称为L的真扩充。要留心，（真）子逻辑和（真）扩充都有正规与非正规之分。

既然K是最小正规逻辑，其他一切正规逻辑当然都是K的正规真扩充。本书最为关注的一个乃是

$$\mathrm{K4}=\mathrm{K}\oplus\Box p\to\Box\Box p$$

K4的公理$\Box p\to\Box\Box p$原是路易士系统S4的特征性公理，人称公理“4”。现在的人往往改名为tra[①]。

不妨顺便一提，tra只是公理序列：

$$tra_n=\bigwedge_{i=1}^{n}\Box^i p\to\Box^{n+1}p^{②}\ (n\geqslant 1)$$

的第一项的强化。由该公理序列得出一系列的正规逻辑：

$$\mathrm{K4}^n=\mathrm{K}\oplus tra_n$$

都是K4的真子逻辑。本书后面将偶尔拿$\mathrm{K4}^n$与K4作比较。

凡是K4的扩充，模态逻辑学者照例以“K4-逻辑”相称。在本书中，这自然是“K4-正规逻辑”的简称[③]。

有几个路标似的K4-逻辑是本书格外关注的：

$$\mathrm{D4}=\mathrm{K4}\oplus\Diamond\top=\mathrm{K4}\oplus d$$

$$\mathrm{S4}=\mathrm{K4}\oplus\Box p\to p=\mathrm{K4}\oplus t$$

$$\mathrm{Q4}=\mathrm{K4}\oplus\Diamond\Box\bot\vee\Box\bot=\mathrm{K4}\oplus q$$

$$\mathrm{GL}=\mathrm{K4}\oplus\Box(\Box p\to p)\to\Box p=\mathrm{K4}\oplus la$$

其中，D4是S4的真子逻辑，Q4是GL的真子逻辑，但D4（及其正规扩充）与Q4（及其正规扩充）是不可比较的。例如，$\mathrm{D4}\not\subseteq\mathrm{Q4}$，并且$\mathrm{Q4}\not\subseteq\mathrm{D4}$——因为$\Diamond\top\notin\mathrm{Q4}$，而$\Diamond\Box\bot\vee\Box\bot\notin\mathrm{D4}$。

每个K4-逻辑至少有一个真扩充，除For之外。For是最大的K4-逻辑，也是唯一不一致的K4-逻辑，任何公式φ与其否定式$\neg\varphi$同为For的一员。

有两个极大的一致K4-逻辑很值得一提，它们是

$$\mathrm{Triv}=\mathrm{K4}\oplus\Box p\leftrightarrow p=\mathrm{K}\oplus\Box p\leftrightarrow p$$

---

① “传递性”的英译名 transitivity 的前三个字母，这么称呼有语义学上的理由，详见后文。

② 这里用$\Box^n\varphi$指代公式$\underbrace{\Box\cdots\Box}_{n}\varphi$。类似地，用$\Diamond^n\varphi$指代公式$\underbrace{\Diamond\cdots\Diamond}_{n}\varphi$。

③ 本书以后也会经常使用“传递逻辑”这样的简称。

$$\text{Abs}=\text{K4}\oplus\Box\bot=\text{K}\oplus\Box\bot$$

只有不一致逻辑For是Triv和Abs的真扩充。这两个逻辑显得怪异至极，本书用“无谓”与“无稽”充当它们的中文名字，它们在K4-逻辑中间起着“超级路标”的作用。

令模态学者最好奇的问题不是还有哪一些未被介绍的K4-逻辑，因为K4-逻辑同样多到不可数，这无从回答。令他们最好奇的问题是不同类型的K4-逻辑依何种规律分布。

第二节　K4-逻辑的克里普克语义学

我们的论述至今不曾超越K4-逻辑的语法学，现在要跨出这个界限，转入它们的语义学。当然，还是循序渐进，从一般的正规逻辑谈起。

一、框架和模型

资格最老的模态语义学要算代数语义学，萌发于现代模态逻辑诞生之初。它不仅恰当，还能提供一些特别强大的工具，但不在本书讨论之内。步代数语义学后尘的主要是关系语义学，其早期形态不十分公正地被人冠以“克里普克语义学”的称号。克里普克语义学不尽恰当，并不具备最初期待的那种普遍意义，这已经不容置疑。然而，在某些特殊的论域里，它依然有足够的生命力。本节所要处理的课题——濒表格的K4-逻辑研究——恰好是这样一个论域。

克里普克语义学的基本语义结构是（克里普克）框架和（克里普克）模型。

每个框架$\mathfrak{F}$由一个（非空的）集合W与一个定义在W上的二元关系R构成：

$$\mathfrak{F}=\langle W,\ R\rangle$$

W称为可能世界集，它的元素称为可能世界。也可采取哲学上更为中立的术语，把W说成一个点集，不去管点是什么东西。当W被看作一个世界集时，R称为W中的世界之间的可通达性关系。对x，$y\in W$，如果xRy，就说从世界x可通达世界y；也有不少模态学者爱用拟人化的比喻，说x看得见y；更中立的用语则说y是x的R-后继（或x是y的R-前趋），写成：

$$y\in x\uparrow\ （或\ x\in y\downarrow）$$

此处$x\uparrow$指x的R-后继集，$y\downarrow$指y的R-前趋集。这种记法是有歧义的，但经常无伤大雅。$x\uparrow^{-}=x\uparrow\setminus\{x\}$（$x\downarrow^{-}=x\downarrow\setminus\{x\}$）中的每个点被称为$x$的真

后继（真前趋）。每个 $y\in x\uparrow^-$（$x\downarrow^-$）是点x的直接后继（直接前趋），如果对每个 $z\in W$，$x\vec{R}y$（$y\vec{R}x$）并且$\neg\exists z\in W(x\vec{R}z\vec{R}y)(\neg\exists z\in W(y\vec{R}z\vec{R}x))$，这里$u\vec{R}v$被视为$uRv\wedge\neg vRu$的缩写。

例1.1　给出一个框架 $\mathfrak{F}_0=\langle W_0,R_0\rangle$，如图1-1所示。

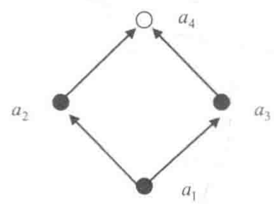

图 1-1　框架$\mathfrak{F}_0$

其中，$W_0=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，$R_0=\{\langle a_1,a_2\rangle,\langle a_1,a_3\rangle,\langle a_2,a_4\rangle,\langle a_3,a_4\rangle,\langle a_4,a_4\rangle\}$。自返点用∘表示，禁自返点用•表示，可通达关系用→表示。既然a_4是$\mathfrak{F}_0$中唯一的自返点，只有a_4画成∘，其余都画成•。每个模型是一个对子：

$$\mathfrak{M}=\langle\mathfrak{F},\mathfrak{V}\rangle$$

其中，$\mathfrak{F}=\langle W,R\rangle$是一个框架，$\mathfrak{V}$是$\mathfrak{F}$中（对全体变号）的一个赋值，也就是从语言ML的命题变号集Var到世界集W的幂集2^W中的一个函数。对每个命题变号p，$\mathfrak{V}(p)$是W的某子集，意指原子公式p在其中为真的那些可能世界的集合；反之，$W\setminus\mathfrak{V}(p)$意指$p$为假的那些可能世界的集合。由此出发，便可规定任意公式在给定模型中的真假条件。

例1.1.1　现在给出两个模型 $\mathfrak{M}_0=\langle\mathfrak{F}_0,\mathfrak{V}_0\rangle$和$\mathfrak{N}_0=\langle\mathfrak{F}_0,\mathfrak{V}_0'\rangle$。它们的底部框架同为$\mathfrak{F}_0$，值$\mathfrak{V}_0$与$\mathfrak{V}_0'$不同：

$$a_4\in\mathfrak{V}_0(p),\ \ a_4\notin\mathfrak{V}_0'(p)$$

用图1-2表现这个差异，在$\mathfrak{M}_0$的图中把p放在点a_4的左方，在$\mathfrak{N}_0$的图中把p放在点a_4的右方。这是很醒目的示意法。假使某一点的左右两方都不写p，就意味着在该点怎么给p赋值都无所谓。

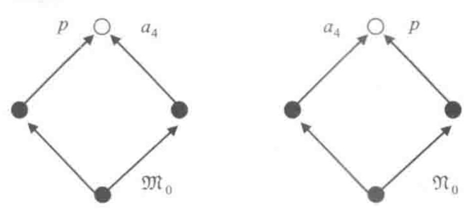

图 1-2　模型$\mathfrak{M}_0$和$\mathfrak{N}_0$

现在到了最关键的一步，要正式表述克里普克语义学的真理定义。

设$\mathfrak{M}=\langle\mathfrak{F},\mathfrak{V}\rangle$，此处$\mathfrak{F}=\langle W, R\rangle$。公式$\varphi$在模型$\mathfrak{M}$中在点$x$上是真的，记为

$$(\mathfrak{M}, x)\models\varphi\ \text{（其否定记为}(\mathfrak{M}, x)\not\models\varphi\text{）}$$

其定义是施归纳于公式φ的结构：

➢ $(\mathfrak{M}, x)\models p$，当且仅当$x\in\mathfrak{V}(p)$，　$p\in\mathrm{Var}$；

➢ $(\mathfrak{M}, x)\not\models\bot$；

➢ $(\mathfrak{M}, x)\models\psi\wedge\chi$，当且仅当$(\mathfrak{M}, x)\models\psi$，并且$(\mathfrak{M}, x)\models\chi$；

　$(\mathfrak{M}, x)\models\psi\vee\chi$，当且仅当$(\mathfrak{M}, x)\models\psi$，或者$(\mathfrak{M}, x)\models\chi$；

　$(\mathfrak{M}, x)\models\psi\to\chi$，当且仅当$(\mathfrak{M}, x)\models\psi$实质蕴涵$(\mathfrak{M}, x)\models\chi$；

　　　　当且仅当$(\mathfrak{M}, x)\not\models\psi$，或者$(\mathfrak{M}, x)\models\chi$；

➢ $(\mathfrak{M}, x)\models\Box\psi$，当且仅当对$x$的所有$R$-后继$y$, $(\mathfrak{M}, y)\models\psi$。

又，根据$\neg$和$\Diamond$的缩写定义，得出

➢ $(\mathfrak{M}, x)\models\neg\psi$，当且仅当$(\mathfrak{M}, x)\not\models\psi$；

➢ $(\mathfrak{M}, x)\models\Diamond\psi$，当且仅当对$x$的某个$R$-后继$y$, $(\mathfrak{M}, y)\models\psi$。

进一步说，公式φ在模型$\mathfrak{M}$中是真的，记为

$$\mathfrak{M}\models\varphi$$

定义成：

➢ $\mathfrak{M}\models\varphi$，当且仅当对每个$x\in W$, $(\mathfrak{M}, x)\models\varphi$。

如果φ在$\mathfrak{M}$中不真，我们就说φ被$\mathfrak{M}$证伪，有时也说$\mathfrak{M}$是φ的反模型，记为$\mathfrak{M}\not\models\varphi$。

例1.1.2　考虑公式$\Box\Diamond p$在模型$\mathfrak{M}_0$中是不是真的。

（1）$a_4\in\mathfrak{V}_0(p)$，可见$(\mathfrak{M}_0, a_4)\models p$。又因为$a_4\in a_4\uparrow$，$(\mathfrak{M}_0, a_4)\models\Diamond p$。然而，$a_4\uparrow=\{a_4\}$，所以$(\mathfrak{M}_0, a_4)\models\Box\Diamond p$。

（2）已知$(\mathfrak{M}_0, a_4)\models\Diamond p$，但$a_3\uparrow=\{a_4\}$，所以$(\mathfrak{M}_0, a_3)\models\Box\Diamond p$。

（3）与（2）类似，$(\mathfrak{M}_0, a_2)\models\Box\Diamond p$。

（4）从$a_2\uparrow=\{a_4\}=a_3\uparrow$和$(\mathfrak{M}_0, a_4)\models p$得到$(\mathfrak{M}_0, a_2)\models\Diamond p$和$(\mathfrak{M}_0, a_3)\models\Diamond p$。鉴于$a_1\uparrow=\{a_2, a_3\}$，我们有$(\mathfrak{M}_0, a_1)\models\Box\Diamond p$。

既然对所有$x\in W_0$都有$(\mathfrak{M}_0, x)\models\Box\Diamond p$，足见$\mathfrak{M}_0\models\Box\Diamond p$。

正规逻辑的语义研究把最大的关注点放在公式（公式集）在框架（框架类）中的有效性上面。有效性概念是以真理定义为基础的。

公式φ在框架$\mathfrak{F}$中在点$x\in W$上是有效的，记为

$$(\mathfrak{F}, x)\models\varphi$$

定义成：

➢ $(\mathfrak{F}, x) \vDash \varphi$，当且仅当对$\mathfrak{F}$上每个模型$\mathfrak{M}$都有$(\mathfrak{M}, x) \vDash \varphi$。

反之，记为$(\mathfrak{F}, x) \nvDash \varphi$。

公式φ在框架$\mathfrak{F}$中是有效的，记为

$$\mathfrak{F} \vDash \varphi$$

定义成：

➢ $\mathfrak{F} \vDash \varphi$，当且仅当对$\mathfrak{F}$上每个模型$\mathfrak{M}$都有$\mathfrak{M} \vDash \varphi$。

反之，说φ在$\mathfrak{F}$中无效或失效，也说$\mathfrak{F}$是φ的反驳框架，记为$\mathfrak{F} \nvDash \varphi$。

最后，公式集Γ在框架$\mathfrak{F}$中是有效的，记为

$$\mathfrak{F} \vDash \Gamma$$

定义成：

➢ $\mathfrak{F} \vDash \Gamma$，当且仅当对每个$\varphi \in \Gamma$，$\mathfrak{F} \vDash \varphi$。

例1.1.3　模态公式$ga = \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$，称为吉奇公理，它在图1-1所描绘的四点框架$\mathfrak{F}_0$中是有效的。事实上，$\mathfrak{F}_0$上的模型分为两类，要么使$p$在$a_4$上真，要么使$p$在$a_4$上假；因而要么与$\mathfrak{M}_0$相似，要么与$\mathfrak{N}_0$相似。已知$\mathfrak{M}_0 \vDash \Box\Diamond p$，又易知$\mathfrak{N}_0 \nvDash \Diamond\Box p$。这足以表明$\mathfrak{F}_0 \vDash \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$。

图1-3中的两点框架$\mathfrak{F}_1$是吉奇公理的反驳框架：

图 1-3　框架$\mathfrak{F}_1$——吉奇公理的某一反驳框架

要知道，$b_1\uparrow = \{b_2\}$而$b_2\uparrow = \varnothing$，所以，无需考虑$\mathfrak{F}_1$上的模型，也能看出：$(\mathfrak{F}_1, b_2) \vDash \Box p$，从而$(\mathfrak{F}_1, b_1) \vDash \Diamond\Box p$。但是，$(\mathfrak{F}_1, b_2) \nvDash \Diamond p$，从而会有$(\mathfrak{F}_1, b_1) \nvDash \Box\Diamond p$。结论：$\mathfrak{F}_1 \nvDash ga$。

本节引用了大批记号，希望读者不要只背诵记法，不去过问记法背后的指导思想。特别要强调，真理定义中涉及模态算子□和◇的那两个子句体现了关系语义学的特色。可能世界语义学的老祖宗——夸张一点说——是大哲学家莱布尼茨，至少是他最先主张，必然真理应当是在一切可能世界中为真，可能真理是在某些世界中为真。参照可能世界之间的可通达性关系来决定模态命题的真值，这是莱布尼茨根本没有想到的新观念。这种新观念的明智之处，三言两语就能点破。$x\uparrow$指称从世界x可通达的可能世界的全体，下面两个命题是大不相同的：