朱德祥代数与几何讲义

第3卷

朱德祥　著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

ZHUDEXIANG DAISHU YU JIHE JIANGYI

朱德祥代数与几何讲义

第3卷

朱德祥　著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

该书是昆明师范学院数学系1951—1957年使用的自编讲义.1954年经教育部批准,作为全国高等师范院校交流教材.作者为国立清华大学十级(1934—1938)杰出校友、著名几何学家、数学教育家朱德祥教授.本书共四章,分别论述:二次曲线上之交比、二次曲面上之交比、虚圆点及绝对圆、二次曲线束,二次曲线列.

该书可作为高等院校数学与应用数学专业的教学参考用书,也可作为数学爱好者学习射影几何的参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

朱德祥代数与几何讲义.第3卷/朱德祥著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2017.4

ISBN 978-7-5603-6186-4

Ⅰ.①朱… Ⅱ.①朱… Ⅲ.①代数-高等学校-教学参考资料②几何-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O15②O18

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第211427号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 杜莹雪
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张10 字数103千字
版　　次 2017年4月第1版 2017年4月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-6186-4
定　　价 28.00元

前　　言

1° 此書係以 René Garnier 氏所著代數与幾何 (Leçons d'Algèbre et de Géométrie, Gauthier-Villas, Paris) 上中两册為藍本加以增删寫成. 一九五一年開始在昆明師範学院數学系試教.

2° 前四章係代數預備知識, 祇作徵引之便, 讀過高等代數的可以不讀.

3° 倘時间不敷, 可略去一部份材料, 比方略去 5.23, 5.44, 6I.8, 7I (而將其中重要概念分散在 7II 中講), 8I.10, 8II.4 的 4°, 5°, 6°; 9.9; 9.11, 10.11, 11.7, 12.3, 12.4, 13.10—13.104, 大致無損於系统上的啣接.

4° 每一章必須配合適当習題, 能聯繫平面幾何及解析幾何尤佳. 書中例題較少, 宜適当增加.

5° 編者学識淺薄, 錯誤必难免, 敬希教正.

朱德祥

一九五一年八月於昆明師範学院

此項講義业經譯初等幾何学講義, 於一九五四奉中央人民教育部批准, 作為高等師範学校交流教材, 寄各师範学院及师範专修科.

◎ 目录

第十章 二次曲線上之交比

10.1 二次曲線之簡化方程（the reduced form of the equation of a conic）. 選擇適宜的坐標三角形，則秩 $=3$ 之二次曲線，其齊次方程恒可化成下形（6 II·5）

$$\sum_{i=1}^{3} f_i^2 = 0,$$

其中 f_i 係 x_1, x_2, x_3 之三独立線性方式，係數或实或複. 此式可書為

$$(f_1 + i f_2)(f_1 - i f_2) + f_3^2 = 0;$$

若命

$$X_1 = -f_1 - i f_2,$$

$$X_2 = f_1 - i f_2,$$

$$X_3 = f_3,$$

则得

(1) $$X_1 X_2 = X_3^2;$$

因 X_1, X_2, X_3 為 f_1, f_2, f_3 之独立方式，而 f_1, f_2, f_3 為 x_1, x_2, x_3 之独立方式，故由独立方式組之定義（3·2），X_1, X_2, X_3 亦為 x_1, x_2, x_3 之独立方式；故可取 X_k 為三線坐標. 於是，選擇適宜的坐標，凡秩 $=3$ 之二次曲線其方程恒可化為 (1) 之形式.

且若已知二次曲線為實的，則其方程恒可以一實係數變換而化呈 (1) 形. 蓋其方程必呈 $\pm(f_1^2 + f_2^2 - f_3^2) = 0$ 之形，而 f_k 有实係數，於是用上法於

$$f_1^2 + f_2^2 - f_3^2 = (f_1 - f_3)(f_1 + f_3) + f_2^2,$$

便得结論.

此结果亦可以幾何方法得之：設坐標三角形$A_1A_2A_3$之頂點A_1,A_2在二次曲線C上，而A_3為C在A_1,A_2之切線相交点．設C之方程為

$$\sum_{i,j}^{1-3} a_{ij}x_ix_j=0\quad,\quad a_{ij}=a_{ji},\quad |a_{ij}|\neq 0,$$

則因A_1,A_2在C上，故$a_{11}=0=a_{22}$．又因A_1與A_3，A_2與A_3為相配点，故$a_{13}=0=a_{23}$．因之，上言方程變為

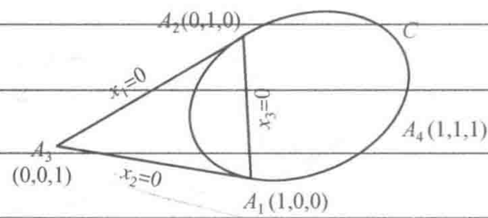

图 41

$$a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2=0.\qquad (a_{12}a_{33}\neq 0)$$

命 $\bar{x}_1=\dfrac{-2a_{12}}{a_{33}}x_1$，$\bar{x}_2=x_2$，$\bar{x}_3=x_3$，則得(1)．末後之變換，等於選擇合宜之單位點(unit point) (1,1,1)，即選C上一點為單位點者．

以下假定坐標三角形及單位點已選定如上述，則C之方程呈簡化形(1)：$x_1x_2=x_3^2$．今介紹參數$t=x_1/x_3$，則(1)可表為

(2) $$x_1=t^2,\quad x_2=1,\quad x_3=t;$$

當$t\to\infty$時，則用下之表示法

$$x_1=1,\quad x_2=t^{-2},\quad x_3=t^{-1},$$

即以t^2除(2)而得者．特別，當$t=0$，∞及1時，便得頂点$A_2(0,1,0)$，$A_1(1,0,0)$及單位點$A_4(1,1,1)$．

注意，對應於二次曲線上任一點(x_1,x_2,x_3)之t值，祇有一個，即$t=x_1/x_3=x_3/x_2$．反之，於t之一值，C上祇有一對應點．故曲線C上

之點，而參數表示法(2)之t值，有一一對應関係．如是之表示(2)，稱為曲線C之本性的表示(proper representation)，參看10·3末．

10·2 二次曲線上四點之交比(The cross ratio of 4 points on a conic)．設A為二次曲線(2)上之一點，其相當之參數值為$t=a$．設有一直線D：

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0 \tag{3}$$

通過A點．欲求D與C之交點，聯解(2)，(3)：以(2)代入(3)得

$$u_1t^2+u_3t+u_2=0.$$

由假設D過A點，故此方程之一根為a，以t表另一根，則

$$a+t=-\frac{u_3}{u_1}, \quad at=\frac{u_2}{u_1}; \tag{4}$$

至是，(3)可書為

$$x_1+at\,x_2-(a+t)x_3=0,$$

亦即 $$(x_1-ax_3)+t(ax_2-x_3)=0.$$

當參數t變時，此方程代表以A為頂點之一束直線D(6I·61)：

$$D_1+tD_2=0,$$

其中D_1，D_2表線性方式．故(6I·7)直線D四位置之交比，等於其對應t值之交比．

以M_i表C上任意四点，而以t_i表參數t之對應值，於是有

$$A(M_1M_2M_3M_4)=(t_1t_2t_3t_4). \tag{5}$$

此式右端與A之參數a無関；故線束之頂点A可為二次曲線上任意之點而(5)式仍合．故若以A，B表二次曲線上任意二點，則有

(6) $$A(M_1M_2M_3M_4)=B(M_1M_2M_3M_4)=(t_1t_2t_3t_4).$$

定義：给定二次曲線上任意四點，聯此四點至其上任一點A，得四直線，其交比称為二次曲線上該四點之交比，此交比只因已知點M_i而變，不與曲線上之A點相涉，記之為$(M_1M_2M_3M_4)$.

今設A，B為二次曲線C上兩定點，而M為其上一動點（圖42）.

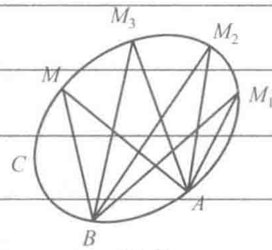

图 42

設M_1, M_2, M_3為M之三特殊位置，由上所云有

$$A(M_1M_2M_3M)=B(M_1M_2M_3M).$$

故(61·72)以A及B為頂点之兩束直線AM及BM，彼此有投影對應關係：当M在二次曲線C上移動時，直線AM及BM描畫兩投影線束．是為Chasles氏定理.

最後，自直線A_1A_2（圖41）之極$A_3(0,0,1)$，聯線至C上任一點M$(t^2,1,t)$，則直線A_3M之坐標為(61·2)此二矢量之矢積

$$A_3\wedge M=(-1,t^2,0).$$

設M_1, M_2為C上任兩点，其參數分别為t_1, t_2．聯線自A_3至$A_1(t=\infty)$，$A_2(t=0)$，$M_1(t=t_1)$，$M_2(t=t_2)$，則有

$$A_3(A_1A_2M_1M_2)=(\infty\ 0\ t_1^2\ t_2^2)=\frac{t_2^2}{t_1^2}=\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2=(A_1A_2M_1M_2)^2,$$

此公式以後将用之(12·21).

10.3 空间二次曲线之表示法. 欲表明二次曲线(2)上四點之交比，等於其參數t之交比，遂稱t為該二次曲線之一投影參數(projective parameter)，或该二次曲線與t投影相關(法文 la conique est rapportée projectivement à t). 易見凡與t投影相繫之參數T，均可取為该二次曲線之投影參數. 逆理亦真，蓋等式$(T_1T_2T_3T)=(t_1t_2t_3t)$即表明$T$為$t$之投影函數. 但對於新參數言，表示$x_1, x_2, x_3$之公式通常較(2)為複雜：去分母後，$x_i$為$t$之二次三項式.

普遍言之，試研究空间之點

(7) $$x_i=a_it^2+b_it+c_i \qquad (i=1,2,3,4)$$

所成之軌跡，其中x_i表四面坐標.

第一，若係數a_i, b_i, c_i所成矩陣T之秩為3，則(7)表一二次曲線，以t為投影參數. 例如設x_1, x_2, x_3中係數a_i, b_i, c_i之行列式$\neq 0$，則公式

$$x_1=a_1X_1+b_1X_2+c_1X_3,$$
$$x_2=a_2X_1+b_2X_2+c_2X_3,$$
$$x_3=a_3X_1+b_3X_2+c_3X_3,$$
$$x_4=a_4X_1+b_4X_2+c_4X_3+X_4$$

之行列式$\neq 0$而確定一坐標之變換，但對新坐標四面體言，點(7)乃為

$$X_1=t^2,\quad X_2=t,\quad X_3=1,\quad X_4=0$$

所定；亦即曲線(7)為一二次曲線而與t投影相關.

第二，設矩陣T之秩為2，例如設$a_1b_2-a_2b_1\neq 0$；則方式

$$f_i\equiv a_iy_1+b_iy_2+c_iy_3 \qquad (i=1,2,3,4)$$

前兩個為独立的，而f_3, f_4則為f_1, f_2之線性組合. 點(7)之軌跡在兩平面

$$x_k = \alpha_k x_1 + \beta_k x_2 \qquad (k=3,4)$$

上，故即為一直線；此直線対参數 x_2/x_1 投影相関，但通常並不対t投影相関：蓋若然者，x_2/x_1 対t将投影相繫．而對應於互不相等之四個t值 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 所得 x_2/x_1 之四值，其交比等於

$$(\alpha\beta\gamma\delta)\cdot\frac{A\alpha\gamma+B(\alpha+\gamma)+C}{A\beta\gamma+B(\beta+\gamma)+C}\cdot\frac{A\beta\delta+B(\beta+\delta)+C}{A\alpha\delta+B(\alpha+\delta)+C},$$

其中 $\quad A=a_1b_2-a_2b_1,\quad B=a_1c_2-a_2c_1,\quad C=b_1c_2-b_2c_1,$

而欲上式等於 $(\alpha\beta\gamma\delta)$，則必需 $AC-B^2=0$，亦即必需(5.6末)含t之方程 $x_1=0$ 及 $x_2=0$ 有一公共根，而此根亦必為兩方程 $x_3=0=x_4$ 之根，蓋 f_3，f_4 為 f_1 及 f_2 之線性組合也．在此款，将(7)之右端约去一公因子 $\mu t+\lambda$，則(7)将化為(6I.5)一直線之投影表示法．

当矩陣T之秩為2而诸方程 $x_i=0$ 無公根時，於 x_2/x_1 之一值，t有兩对應值，此乃一對合中之兩對應值(5.6)；吾人稱 x_2/x_1 之值或直線(7)上之點，対一對合中之一對點單意的相関(法文 rapportés univoquement)．

当一直線或一二次曲線対一参數投影相関時，則於直線或二次曲線上一點，其参數祇有一對應值：如是之表示法称為本性的(proper)；当一直線対一對合單意的相関時，則於直線上一點，其参數之對應值不祇一個：如斯之表示法，称為非本性的(improper)．

10.4 二次曲線上之投影變換及對合(projectivity and involution on a conic)．——調和分割—— 先研究二次曲線C上之四點 M_1, M_2, M_3, M_4 交比等於 -1 之款；此四点称為在C上成調和分割．

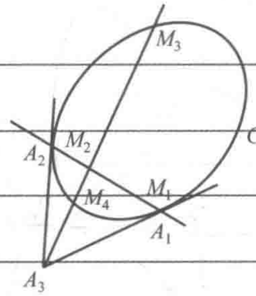

图 43

吾人恒可選擇坐標三角形使M_1及M_2为頂點A_1及A_2重合．對應於M_1，M_2，M_3，M_4之参數值分别為$t=\infty$，0，t_3，t_4．而$(t_1t_2t_3t_4)=-1$即為$t_3+t_4=0$．此條件甚易解釋之．設

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$$

為直線M_3M_4之方程；由(4)有

$$-\frac{u_3}{u_1}=t_3+t_4=0;$$

故直線M_3M_4通過頂點A_3．反之，經過A_3之割線交C於M_3，M_4而有$t_3+t_4=0$．故M_i $(i=1,2,3,4)$在二次曲線C上成調和分割之充要條件為：M_1M_2及M_3M_4對於C成相配直線．

10·41 投影對應．設M，M'為二次曲線C上兩點，其参數分别為t及t'．若t及t'间有一投影関係

$$t'=\frac{at+b}{ct+d}, \tag{8}$$

则称M及M'在C上投影對應．于是由(6)，於任意四個對應位置（前三者為固定的），有

$$(M_1M_2M_3M)=(M_1'M_2'M_3'M'),$$

此関係表明：M'与M之對應関係有一内在性質，易言之，与表示该二次曲

线所选之参数无关.

此对应关係可以几何作图法实现之. 假設投影变换之两個双点互異，取为坐標三角形之顶点 A_1 及 A_2；则投影变换(8)应以 $t=0$ 及 $t=\infty$（10·1末）为两個双根；故(8)可書为 $t'=kt$，k 表一常数. 設

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$$

为联 M, M' 之直线；於是無论 t 为何应同時有

$$u_1t^2+u_3t+u_2=0,$$

$$u_1k^2t^2+u_3kt+u_2=0,$$

由是得

$$\frac{u_1}{1}=\frac{u_2}{kt^2}=\frac{-u_3}{(k+1)t},$$

因之得

(9) $$(1+k)^2u_1u_2=ku_3^2.$$

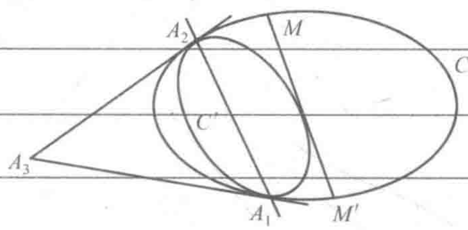

图 44

直线MM′包成一二次曲线这一事实，可以综合法证之，参考孙泽瀛著近世几何学 p.131例题.

故直线MM′包成一二次曲线 C'（图44）；且 C' 在投影变换之双点 A_1 及 A_2 与 C 相切；蓋（例如）经過 A_1 之两切线，亦即切线之 $u_1=0$ 者，变而为一條（$u_1=0=u_3$）；此切线亦即 $x_2=0$ 而 A_1 在 C' 上，因其向 C' 所作两切线重合也.

備考. 当 $k=1$ 時，则有 $t'=t$；此時包线 C' 与 C 重合；故 C 之切线方程为 $4u_1u_2=u_3^2$，此固可直接求得之. 此结果可重新表明 C 与 C' 为双切（double contact）（即在两点相切）之性质；欲明之，祗需应用十三章（13.6

末）之一命题於其切线方程.

讀者可讨论投影變換有重合双點之款；将投影関係書成 $t'=t+a$ 之形，将見 MM' 包成二次曲線 $u_3^2-4u_1u_2-a^2u_1^2=0$；其与 C 之四交点重合於 A_1.［由 13.5 及 13.6 之定理，两二次曲線在 A_1 點呈三級相切（a contact of the third order）］.

10.42 二次曲線上之對合. 試察包線 C' 之切線方程(9)是否可以分解.(9)之判别式不計數字因子為 $k(1+k)^4$. $k=0$ 之款今置而不论，因其相当之投影變換為降秩的. 故僅当 $k=-1$ 時，(9)之判别式方能等於零；此時(9)變為 $u_3^2=0$：二次曲線 C' 降秩為一双點 A_3：由是为直線 MM' 均通過 A_3 點. 如是復得以前之一结果，蓋当 $k=-1$ 時，投影變換變為對合（$t+t'=0$）；M，M' 两點与 A_1 及 A_2 成調和分割；故對於二次曲線言，MM' 及 A_1A_2 為相配直線. 故欲在二次曲線上產生一對合，可由一任意定點引動割線；此割線截 C 之两點，相互對合地對應，而對合之两個双點即从該定點所作两切線之切點.

此亦可直接证明之：蓋在此等直線 A_3MM' 中（图45），通一定割線 $A_3M_0M_0'$；

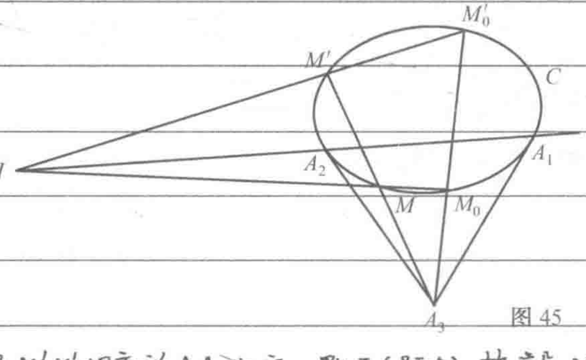

图 45

因而 M_0M 及 $M_0'M'$ 相交於 A_1A_2 上之一點 I（8I.5），故設 M_i 及 M_i'（$i=1,2,3$）

为M及M′之特殊位置，则有

$$(M_1M_2M_3M)=M_0(M_1M_2M_3M)=M_0(I_1I_2I_3I)=(I_1I_2I_3I)$$
$$=M_0'(I_1I_2I_3I)=M_0'(M_1'M_2'M_3'M')=(M_1'M_2'M_3'M'),$$

故M与M′之對應為投影的，又因其為對称的，故為對合的.

備攷. 若已知元素為實的，投影變換或對合(8)之双點亦可為虛的. 在此款C及C′相切於兩相配虛點(12·1末及13·5)，而当其為對合時，直線MM′绕C内之一點而旋轉.

10·5 Chasles氏定理之逆定理. 兩投影線束(projective pencils)中對應射線交點之軌跡，為經過此兩束頂点之一二次曲線.

設A_1及A_2為此兩投影線束之頂點(图46)，而M為兩對應射線

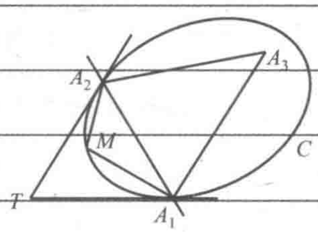

图 46

之交點. 问题在證明M之軌跡C為一二次曲線.

以坐標三角形之兩頂点置於A_1及A_2. 對應直線A_1M及A_2M之方程為

$$x_3=ux_2,\quad x_3=vx_1,$$

而由假設u及v间有如下之投影関係

(10) $$v=\frac{au+b}{cu+d},$$

a, b, c, d表常數. 故M點之軌跡方程為

$$\frac{x_3}{x_1}=\frac{ax_3+bx_2}{cx_3+dx_2},$$

亦即

(11) $$bx_1x_2+ax_1x_3-dx_2x_3-cx_3^2=0,$$

此確表一二次曲線C.

今往察在何種情形下，此二次曲線可以降秩．二次方式(11)(乘以2)之判别式為

$$\begin{vmatrix} 0 & b & a \\ b & 0 & -d \\ a & -d & -2c \end{vmatrix}=2b(bc-ad).$$

吾人不討論投影變換(10)降秩之款，故設 $bc-ad\neq 0$．故欲判别式為零，必需 $b=0$，而彼時方程(11)變為

(12) $$x_3(ax_1-dx_2-cx_3)=0;$$

故C降秩為兩直線，一為 A_1A_2: $x_3=0$，另一為一直線D: $ax_1-dx_2-cx_3=0$.

此結果可從幾何方面解釋之．當 $b=0$ 時，関係(10)變為

$$v=\frac{au}{cu+d},$$

可知u與v同時為零；反之，若u與v同時為零，則 $b=0$．故第一束中之直線 $x_3=0$ 對應於第二束中同一直線 $x_3=0$.

在此款，顯見凡直線 $x_3=0$ 上之點，均應在軌跡上，因之軌跡應分解為兩直線.

故二次曲線C降秩為兩直線之充要條件為：兩線束頂点之聯線 A_1A_2 視為属於一束時，其在另一束中之對應線即其本身.

10.51 備攷．1° 令M點沿曲線C趨於 A_2（圖46），則 A_1M 趨於 A_1A_2，