中南大学数学与统计学院高等数学教学与研究中心

大学数学系列课程学习辅导与同步练习

高等数学·下

◉ 秦宣云 任叶庆 刘旺梅 杨淑平 编著

中南大學出版社
www.csupress.com.cn

中南大学数学与统计学院高等数学教学与研究中心

大学数学系列课程学习辅导与同步练习

高等数学·下

秦宣云　任叶庆　刘旺梅　杨淑平　编著

中南大學出版社
www.csupress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

大学数学系列课程学习辅导与同步练习/张鸿雁等编著.
—长沙:中南大学出版社,2015.8
ISBN 978-7-5487-1892-5

Ⅰ.大... Ⅱ.张... Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 200444 号

大学数学系列课程学习辅导与同步练习

张鸿雁 等 编著

□**责任编辑** 谢贵良
□**责任印制** 易红卫
□**出版发行** 中南大学出版社
社址:长沙市麓山南路　　邮编:410083
发行科电话:0731-88876770　　传真:0731-88710482
□**印　　装** 长沙市宏发印刷有限公司

□**开　　本** 787×1092 1/16 □**印张** 44.5 □**字数** 680 千字
□**版　　次** 2015 年 9 月第 1 版 □**印次** 2015 年 9 月第 1 次印刷
□**书　　号** ISBN 978-7-5487-1892-5
□**定　　价** 90.00 元(共四册)

前 言

大学数学系列课程包括高等数学(上、下)、线性代数、概率论与数理统计等课程，它是高等院校各专业必修的基础理论课，是高等院校人才培养的关键环节。认真扎实学好大学数学系列课程有助于学生科学思维能力、数学运用能力、创新探索能力的培养，有利于后续课程的学习，并为进一步深造奠定必要的数学基础和科学素养。

2013 年，中南大学首批“开放式精品示范课堂建设计划”资助建设高等数学开放式精品示范课堂建设。课程建设团队经过 2 年的探索、研究与实践，形成了特色鲜明的大学数学开放式课堂教学模式，受到了学校领导与学生的肯定与支持，决定面向全校推广应用。

为配合开放式课堂教学模式改革的实践，适应学生自主研学、自由探索的需要，激发学生对本课程学习的积极性，有效地将课堂学习延伸到课外，方便师生互动、规范作业，大学数学系列课程教学团队经多年的经验积累、对课程教学的不断改革钻研，精心设计了《大学数学系列课程学习辅导与同步练习》，作为课程学习的配套资料，其内容主要包括课程知识结构、重点难点、知识点综合例题、课程导学、同步练习，内容设置加强了对课堂教学的针对性，力求达到课前预学、课后复习、作业练习、巩固提高的目的，通过课前、课间、课后环节自主性、探索性、讨论式、启发式学习，加深对教学内容的理解，培养学生独立运用理论知识、严密思考与科学计算的能力。

《大学数学系列课程学习辅导与同步练习》涵盖了整个大学一年级两个学期及大学二年级上学期的所有大学数学系列(高等数学(上、下)、线性代数、概率论与数理统计)课程的内容，配套同步练习册代替了学生的大学数学作业本，每套同步练习含填空、选择、计算、证明题。填空、选择只要将答案填入即可，计算、证明题需在活页纸下方或反面空白处写出主要步骤。为方便教师批改、学生同步学习，课程导学、同步练习作为活页形式，课前完成下次课程的导学，课后完成上次课相应的一套同步练习，并交任课教师批阅，教师批阅后返回给学生，以备复习时使用。做好课程教学的导学和同步练习是学好大学数学系列课程的重要环节。教科书上的习题可作为同学们课外练习补充、复习之用。

书山有路勤为径，学海无涯苦作舟。希望同学们充分利用《大学数学系列课程学习辅导与同步练习》，自主学习，在科学的道路上不断进取、勇往直前，学有所成!

感谢中南大学开放式精品示范课堂建设计划的项目支持，感谢中南大学数学与统计学院大学数学系列课程教学团队全体教师的无私奉献，感谢中南大学出版社的大力支持。

中南大学
高等数学教学与研究中心
2015 年 9 月 20 日

目 录

第 5 章　空间解析几何

Ⅰ. 学习内容要点与要求

1. 理解向量的概念，熟练掌握向量的运算：线性运算（加、减、数乘）和乘积运算（数量积、向量积和混合积）.

2. 掌握向量的坐标表示，熟练掌握用向量坐标进行向量的运算.

3. 掌握两个向量夹角的求法与垂直、平行的条件.

4. 掌握平面方程和直线方程及其特点，熟练掌握各种求平面方程和直线方程的方法.

5. 掌握点到直线、点到平面及两异面直线的距离公式.

6. 理解曲面方程的概念，掌握常用二次曲面：球面、椭球面、锥面、椭圆抛物面的标准方程及其图形，掌握以坐标轴为旋转轴的旋转曲面方程及母线平行于坐标轴的柱面方程及以坐标原点为顶点的锥面方程.

7. 会用平面束的方法解决有关直线与平面的各类问题.

8. 会利用平面的法向量和直线的方向向量研究平面与平面、直线与直线、平面与直线的位置关系.

9. 会用截痕法研究二次曲面.

10. 了解空间曲线的参数方程和一般方程，会求空间曲线投影到坐标面的投影柱面及投影曲线方程.

Ⅱ. 重点、难点与知识结构

重点

1. 向量的几何运算和代数运算；

2. 平面方程和直线方程的建立.

难点

1. 坐标法和向量算法的运用；

2. 空间想象能力的培养.

本章知识点网络图

- 空间解析几何
  - 向量的概念
    - 定义
      - 概念:有大小又有方向
      - 表示法:有向线段或一个黑体字母
    - 运算
      - 线性运算:加、减、数乘及运算性质
      - 乘积运算:数量积、向量积、混合积及运算性质
  - 空间直角坐标系
    - 曲线
      - 表示法:一般式、参数式
      - 特殊曲线 —— 直线的表示法:一般式、对称式、参数式
    - 曲面
      - 概念:动点的空间轨迹
      - 表示法:一般式、参数式
      - 特殊曲面
        - 平面:点法式、一般式、截距式
        - 二次曲面:球面、柱面、旋转曲面等

Ⅲ. 典型例题分析

空间解析几何是在建立空间直角坐标系的基础上，用代数方法来研究和解决空间几何问题. 主要包括向量代数、空间直线与平面以及二次曲面等内容. 通过这一章的学习，培养空间想象能力，娴熟的向量代数的计算能力和推理、演绎的逻辑思维能力，为进一步研究多元函数及其微积分作必要的准备.

一、向量运算及应用

例 1 已知 $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{10}$，$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{2}$，$|\boldsymbol{c}| = 1$ 及 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} =$ __________.

解 由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$ 知 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2 = 29$，又

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2 &= |\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\\ &= 13+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}),\end{aligned}$$

所以，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{2}(29-13) = 8$.

例 2 已知向量 $\boldsymbol{x}$ 与向量 $\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 平行，且满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x} = 34$，则向量 $\boldsymbol{x} =$ ______.

解 设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$，由 $\boldsymbol{x} /\!/ \boldsymbol{a}$，得 $\dfrac{x_1}{-2} = \dfrac{x_2}{3} = \dfrac{x_3}{2}$，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x} = 34$，得 $-2x_1+3x_2+2x_3 = 34$，解得 $\boldsymbol{x} = -4\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$.

例 3 设向量 $\boldsymbol{a} = (1, -1, 1)$，$\boldsymbol{b} = (3, -4, 5)$，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，$\lambda$ 为实数，试证：使模 $|\boldsymbol{x}|$ 最小的向量 $\boldsymbol{x}$ 垂直于向量 $\boldsymbol{b}$.

解 $|\boldsymbol{x}|^2 = (\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|^2+\lambda^2|\boldsymbol{b}|^2+2\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 3+24\lambda+50\lambda^2$.

当 $\lambda = -\dfrac{6}{25}$ 时，$|\boldsymbol{x}|$ 最小，此时，$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{a}-\dfrac{6}{25}\boldsymbol{b} = \left(\dfrac{7}{25}, -\dfrac{1}{25}, -\dfrac{5}{25}\right)$，因为 $\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{b} = \dfrac{7}{25}\cdot 3+\dfrac{1}{25}\cdot 4-\dfrac{5}{25}\cdot 5 = 0$，所以 $\boldsymbol{x}_0 \perp \boldsymbol{b}$.

例 4　设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 均为非零向量，其中任意两个向量不共线，但 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，试证：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

证　因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，所以可设 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mu\boldsymbol{a}$，两式相减得 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{c}-\mu\boldsymbol{a}$，即 $(1+\mu)\boldsymbol{a}=(1+\lambda)\boldsymbol{c}$. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ 为非零向量不共线，所以只能 $\mu=-1$, $\lambda=-1$，代入即得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

例 5　已知 $\boldsymbol{a}=(2,2,1)$, $\boldsymbol{b}=(3,1,-2)$, $\boldsymbol{c}=(4,-2,3)$，判断向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 是否共面.

解　$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$，而

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}2&2&1\\3&1&-2\\4&-2&3\end{vmatrix}=-30\neq 0,$$

所以向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 不共面.

例 6　设 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，其中 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.（1）试确定 λ 的值，使 $\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$；（2）确定 $\boldsymbol{\lambda}$ 的值，使以 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为邻边的平行四边形面积为 6.

解　（1）$\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$，即　$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\lambda+4=0$，故 $\lambda=-2$.

（2）以 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为邻边的平行四边形的面积等于 $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|$，

而 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})-\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(2-\lambda)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$

于是 $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=|2-\lambda|\,|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|2-\lambda|\,|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|=2|2-\lambda|$.

当　$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=6$ 时，$2|2-\lambda|=6$, $|2-\lambda|=3$，解出 $\lambda=-1$ 或 5.

例 7　已知向量 $\boldsymbol{PA}=(2,-3,6)$, $\boldsymbol{PB}=(-1,2,-2)$, $|\boldsymbol{PC}|=3\sqrt{42}$，且 $\boldsymbol{PC}$ 平分 $\angle APB$，求向量 $\boldsymbol{PC}$.

解　取向量 $\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{PA}|}\boldsymbol{PA}=\dfrac{1}{7}(2,-3,6)$, $\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{PB}|}\boldsymbol{PB}=\dfrac{1}{3}(-1,2,-2)$.

则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\left(\dfrac{2}{7},-\dfrac{3}{7},\dfrac{6}{7}\right)+\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)=\left(-\dfrac{1}{21},\dfrac{5}{21},\dfrac{4}{21}\right)$，又 PC 平分 $\angle APB$，所以可取 $\boldsymbol{PC}=3\sqrt{42}\cdot\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=3\sqrt{42}\cdot\dfrac{21}{\sqrt{42}}\cdot\left(-\dfrac{1}{21},\dfrac{5}{21},\dfrac{4}{21}\right)=(-3,15,12)$.

例 8　设 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b}|}{2x}$.

解
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b}|}{2x}&=\lim_{x\to 0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b}|^2}{2x(|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}-x\boldsymbol{b}|)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{4x\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{2x\cdot 2|\boldsymbol{a}|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}.\end{aligned}$$

小结：向量运算包括线性运算和乘积运算，要求熟练掌握向量运算的各种形式.

如数量积有以下三种计算公式：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$,

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$,

(3) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$;

在数量积的运算性质中 (1) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，(2) $|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ 应用最广.

在向量积的计算公式以及运算性质中重点掌握：

(1) 向量积模的几何意义：$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 在数值上表示以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积；

(2) 共线性质：$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 或两向量对应坐标成比例.

在混合积的计算公式和性质中重点掌握：

(1) 混合积的几何意义：$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积的绝对值为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为相邻棱的平行六面体的体积($\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面)；

(2) $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$.

二、平面和直线方程的建立

例 1　一平面垂直于平面 $z=0$，并且通过从点 $(1,-1,1)$ 到直线 $\begin{cases}y-z+1=0\\x=0\end{cases}$ 的垂线，求此平面方程.

解　(法一) 设垂足为 $Q(0,y,y+1)$，直线 $\begin{cases}y-z+1=0\\x=0\end{cases}$ 的方向向量 $\boldsymbol{s}=(0,-1,-1)$，垂线的方向向量 $\boldsymbol{s}_1=(-1,y+1,y)$，$\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{s}_1\Rightarrow 1-(y+1)-y=0\Rightarrow y=-\dfrac{1}{2}$，

所以垂足为 $Q\left(0,-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$，因为所求平面垂直 $z=0$，故所求平面可设为 $Ax+By+D=0$

所求平面过 $P(1,-1,1)$，$Q\left(0,-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$，所以 $\begin{cases}A-B+D=0\\ \dfrac{-B}{2}+D=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=D\\B=2D\end{cases}$

故所求平面方程为 $x+2y+1=0$.

(法二) 设点 $(1,-1,1)$ 到直线 l_1：$\begin{cases}y-z+1=0\\x=0\end{cases}$ 的垂线为 l，过点 $(1,-1,1)$ 垂直于直线 l_1 的平面为 π，而直线 l_1 的方向向量为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\0&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}=-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，从而 π 的方程为 $-(y+1)-(z-1)=0$，即 $y+z=0$. 通过求解 $\begin{cases}y-z+1=0\\x=0\\y+z=0\end{cases}$ 得 π 与 l_1 的交点为 $\left(0,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，于是 l 的方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-\frac{1}{2}}=\dfrac{z-1}{\frac{1}{2}}$，$l$ 的一般式方程为

$$\begin{cases}x+2y+1=0,\\y+z=0.\end{cases}$$

因所求平面通过 l，可设所求平面方程为 $x+2y+1+\lambda(y+z)=0$，即 $x+(2+\lambda)y+\lambda z+1=0$，因它垂直于 $z=0$，故 $\lambda=0$，所以，所求平面方程为 $x+2y+1=0$.

例 2　求点 $(-1,2,0)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影.

解　设过点 $(-1,2,0)$ 且垂直于已知平面的直线为 L，显然 L 的方向向量就是已知平面

的法向量$(1,2,-1)$，所以直线L的方程为$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-1}$，其参数方程为$\begin{cases}x=-1+t\\y=2+2t\\z=-t\end{cases}$，故投影坐标可设为$(-1+t,2+2t,-t)$，将$(-1+t,2+2t,-t)$代入平面$x+2y-z+1=0$，得$t=-\frac{2}{3}$，所以投影为$\left(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

例3　求过点$(-1,0,4)$平行于平面$3x-4y+z-10=0$，又与直线$\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$相交的直线方程.

解　（法一）设所求直线L的方向向量为$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，因L与已知平面平行，所以

$$3m-4n+p=0. \tag{1}$$

设已知直线L_1的方向向量为$\boldsymbol{s}_1=(1,1,2)$，在L_1上取一点$B(-1,3,0)$，记$A(-1,0,4)$，作向量$\overrightarrow{AB}=(0,3,-4)$，由已知$\boldsymbol{s}$，$\boldsymbol{s}_1$，$\overrightarrow{AB}$共面，得

$$\begin{vmatrix}m&n&p\\1&1&2\\0&3&-4\end{vmatrix}=0\quad 或\ -10m+4n+3p=0 \tag{2}$$

联立式(1)、式(2)式得$n=\frac{19}{16}m$，$p=\frac{7}{4}m$；

故所求直线方程为　　$\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}$.

（法二）设已知直线为L_1，L_1的参数方程为$\begin{cases}x=t-1\\y=t+3\\z=2t\end{cases}$，设交点$M(t-1,t+3,2t)$，记$A(-1,0,4)$，则所求直线$L$的方向向量为$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{AM}=(t,t+3,2t-4)$，又已知$L$平行已知平面，故有$(t,t+3,2t-4)\cdot(3,-4,1)=0$即$t=16$，所以$\boldsymbol{s}=(16,19,28)$，从而所求直线方程为$\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}$.

例4　求与已知直线L_1：$\frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z}{1}$和$L_2$：$\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{1}$都相交，且与$L_3$：$\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{1}$平行的直线方程.

解　所求直线L的方向向量为$\boldsymbol{s}=(3,2,1)$，只要在L上找到一个定点P，即可求出，P最好选择L与L_1或L与L_2的交点. 为此将L_1与L_2化为参数方程：

$$L_1:\begin{cases}x=2t-3\\y=t+5\\z=t\end{cases},\qquad L_2:\begin{cases}x=t+3\\y=4t-1\\z=t\end{cases}$$

设L与L_1和L_2的交点分别对应参数t_1和t_2则知交点分别为

$$P(2t_1-3,t_1+5,t_1),\ Q(t_2+3,4t_2-1,t_2)$$

由于$\boldsymbol{PQ}\ /\!/\ \boldsymbol{s}$，故$\frac{(2t_1-3)-(t_2+3)}{3}=\frac{(t_1+5)-(4t_2-1)}{2}=\frac{t_1-t_2}{1}$，整理成

$\begin{cases} t_1 - 2t_2 = -6 \\ t_1 + 2t_2 = 6 \end{cases}$ 解出 $t_1 = 0$，所以 P 的坐标为 $(-3, 5, 0)$，故所求直线方程为

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{1}.$$

例 5 求点 $P(1, 2, -3)$ 到直线 L: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$ 的距离.

解 先求 P 在直线上的投影，即垂足. 为此，将直线改写成参数方程 $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$，则垂足可设为 $Q(1 + 2t, -1 - t, 2 + 3t)$，$\boldsymbol{PQ} = (2t, -3 - t, 5 + 3t)$，因为 $\boldsymbol{PQ}$ 垂直于已知直线的方向向量，故 $\boldsymbol{PQ} \perp (2, -1, 3) \Rightarrow 4t + 3 + t + 15 + 9t = 0 \Rightarrow t = -\frac{9}{7}$，所以

$\boldsymbol{PQ} = \left(-\frac{18}{7}, -\frac{12}{7}, \frac{8}{7}\right)$，所以 P 到直线的距离 $d = |\boldsymbol{PQ}| = \frac{2}{7}\sqrt{133}.$

例 6 设有直线 L: $\begin{cases} x + 3y + 2z + 1 = 0 \\ 2x - y - 10z + 3 = 0 \end{cases}$ 及平面 π: $4x - 2y + z - 2 = 0$，则直线 L ______.

(1) 平行于 π　(2) 在 π 上　(3) 垂直于 π　(4) 与 π 斜交

解 直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s} = \{-28, 14, -7\}$，平面 π 的法向量为 $\boldsymbol{n} = \{4, -2, 1\}$，由于

$\frac{-28}{4} = \frac{14}{-2} = \frac{-1}{1}$，知 $\boldsymbol{s} /\!/ \boldsymbol{n}$，故选(C)

例 7 求过点 $(3, 1, -2)$ 且通过直线 $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ 的平面方程.

解 通过一已知直线的平面有无数个，而我们只要其中一个，故可考虑用平面束的方法.

将直线 L: $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ 改写成直线的一般方程 $\begin{cases} 2x - 5y - 23 = 0 \\ y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$，过 L 的平面束为

$$2x - 5y - 23 + \lambda(y - 2z + 3) = 0$$

因所求平面过点 $(3, 1, -2)$，代入上述方程得 $\lambda = \frac{11}{4}$，

所以所求平面方程为 $2x - \frac{9}{4}y - \frac{11}{2}z - \frac{59}{4} = 0$. 即 $8x - 9y - 22z - 59 = 0.$

例 8 求直线 L: $\begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$ 在平面 π: $x - 2y + z = 0$ 上的投影直线方程.

解 过 L 的平面束方程为 $2x + y - z - 1 + \lambda(x + y - z + 1) = 0$，即

$$(\lambda + 2)x + (1 + \lambda)y + (-1 - \lambda)z - 1 + \lambda = 0 \tag{1}$$

与平面 π 垂直的平面 π' 的法向量为 $\boldsymbol{n}' = (\lambda + 2, 1 + \lambda, -1 - \lambda)$，由题意 $\boldsymbol{n}' \perp \boldsymbol{n}$，其中 $\boldsymbol{n} = (1, -2, 1)$，从而 $\lambda + 2 - 2 - 2\lambda - 1 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$，代入方程(1) 即得与平面

π 垂直的平面 π' 的方程为$\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z-\frac{3}{2}=0$，即 $3x+y-z-3=0$，所求直线 L 在平面 π 上的投影直线应为平面 π 与平面 π' 的交线

$$\begin{cases}x-2y+z=0,\\3x+y-z-3=0.\end{cases}$$

小结： 平面与直线方程建立的关键就是定点与定方向的问题，一个点与一个法向量唯一确定了一张平面，一个点与一个方向向量也唯一确定了一条空间直线. 对具有明显几何特征的线面问题，就要从点入手，借助向量运算工具算出方向并确定所需的一个点；如果所求的平面经过一条已知直线，一般用平面束方法简单有效.

三、空间曲面与空间直线

例1　指出下列二次曲面的名称.

(1) $4x^2-9y^2-9z^2=-25$；　(2) $4x^2-9y^2-9z^2=25$；

(3) $x^2+2y^2=4z$；　(4) $2(x-1)^2+(y-3)^2-(z-3)^2=0$.

解　(1) 将方程改写成如下的标准形式：$-\frac{x^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{5}{3}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(\frac{5}{3}\right)^2}=1$，该方程为单叶双曲面.

(2) 将方程改写成如下的标准形式：$\frac{x^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{5}{3}\right)^2}-\frac{z^2}{\left(\frac{5}{3}\right)^2}=1$，该方程为双叶双曲面.

(3) 将方程改写成如下的标准形式：$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=z$，该方程为椭圆抛物面.

(4) 将方程改写成如下的标准形式：$\frac{(x-1)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}+\frac{(y-2)^2}{1}=(z-3)^2$，该方程为椭圆锥面.

例2　直线 L：$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ 绕 z 轴旋转一周，求旋转曲面的方程.

解　设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为直线 L 的一点，故 $x_0=1$，即 P_0 的坐标为 $(1,y_0,z_0)$，当直线 L 绕 z 轴旋转时，$z=z_0$ 保持不变，动点 P 到 z 轴得距离保持不变，即 $r^2=1+y_0^2=x^2+y^2$，又由直线方程 $y_0=z_0$，因此 $r^2=x^2+y^2=1+y_0^2=1+z_0^2=1+z^2$，故此旋转曲面为单叶双曲面：$x^2+y^2-z^2=1$.

例3　求曲线 L：$\begin{cases}z=x^2+y^2\\x-2y+z=0\end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线方程.

解　从曲线 L 的方程 $\begin{cases}z=x^2+y^2\\x-2y+z=0\end{cases}$ 中分别消去 x，y，z 即可得曲线 L 在在三个坐标面上的投影柱面方程，再与坐标面方程联立方程组，即得投影曲线方程.

$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$ 两式联立，消去 x，得 $5y^2 + z^2 - 4yz - z = 0$，这是曲线 L 向 yOz 平面的投影柱面，此投影柱面与 yOz 的交线即为曲线 L 在 yOz 面上的投影曲线，故

$$\begin{cases} 5y^2 + z^2 - 4yz - z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

即为所求.

同理，消去 y 可得曲线 L 在 zOx 面上的投影曲线 $\begin{cases} 5x^2 + z^2 + 2xz - 4z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. 消去 z 可得曲线 L 在 xOy 面上的投影曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y + x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

例 4 求直线 l：$\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 π：$x - y + 2z - 1 = 0$ 上的投影直线 l_0 的方程，并求直线 l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

解 设经过 l 且垂直于平面 π 的平面方程为 π_1：$A(x-1) + By + C(z-1) = 0$，由条件可知 $\begin{cases} A - B + 2C = 0 \\ A + B - C = 0 \end{cases}$，解得 $A:B:C = -1:3:2$，于是 π_1 的方程为 $x - 3y - 2z + 1 = 0$，从而 l_0 的方程为 l_0：$\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ x - 3y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x = 2y \\ z = -\dfrac{1}{2}(y-1) \end{cases}$；于是直线 l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程为：$x^2 + z^2 = 4y^2 + \dfrac{1}{4}(y-1)^2$，即 $4x^2 - 17y^2 + 4z^2 + 2y - 1 = 0$.

（此题用平面束方程也简单）

例 5 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与柱面 $z^2 = 2x$ 所围立体在三个坐标面上的投影.

解 联立两曲面方程，得交线 L：$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z^2 = 2x \end{cases}$，消去 z 可得交线 L 在 xOy 面上的投影曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$，从而所围立体在 xOy 面上的投影为 $x^2 + y^2 \leqslant 2x$，是一个圆盘.

消去 x 可得交线 L 在 yOz 面上的投影曲线 $\begin{cases} \dfrac{z^4}{4} + y^2 - z^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} \left(\dfrac{z^2}{2} - 1\right)^2 + y^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ 从而所围立体在 yOz 面上的投影为 $\left(\dfrac{z^2}{2} - 1\right)^2 + y^2 \leqslant 1$，$z \geqslant 0$.

因为柱面 $z^2 = 2x$ 垂直于 zOx 面，柱面 $z^2 = 2x$ 在 zOx 面的投影曲线为 $\begin{cases} z^2 = 2x \\ y = 0 \end{cases}$，锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 是由 zOx 面上的直线 $z = x$ 绕 z 轴生成的旋转曲面，因此该锥面在在 zOx 面的投影曲线为 $\begin{cases} z = x \\ y = 0 \end{cases}$，所以所围立体在在 zOx 面的投影是由抛物线 $z^2 = 2x$ 与直线 $z = x$ 所围成的阴影部分，即 $x \leqslant z \leqslant \sqrt{2x}$.

小结：在空间曲面和空间曲线中，必须记住常见的二次曲面如球面、椭球面、柱面、锥

面、椭圆抛物面的标准方程特征. 特别是: (1) 平面曲线, 要能熟练写出以坐标轴为旋转轴的旋转曲面的方程, 其规律是: 曲线绕哪个轴旋转, 则该轴对应的变量不变, 而曲线方程中的另一个变量用该变量与第三变量的平方和的正负平方根代替; (2) 求曲线在哪个坐标面上的投影曲线就用消元法消去对应变量, 再与该坐标面方程联立方程组, 即得投影曲线方程.

第6章 多元函数微分学

Ⅰ. 学习内容要点与要求

1. 理解多元函数的概念，会求多元函数的定义域.
2. 理解偏导数和全微分的概念，掌握多元函数一阶、二阶偏导数的求法.
3. 掌握复合函数一阶偏导数的求法，会求复合函数的二阶偏导数.
4. 掌握求隐函数(包括由两个方程组成的方程组确定的隐函数）的偏导数.
5. 掌握方向导数与梯度的计算方法.
6. 掌握求空间曲线上一点的切线与法平面及曲面上一点的切平面与法线的方程.
7. 理解多元函数的极值和条件极值的概念，会求二元函数的极值.
8. 了解二元函数的极限与连续的概念，了解有界闭区域上连续函数的性质.
9. 了解全微分存在的必要条件和充分条件，
10. 了解方向导数与梯度的概念.
11. 了解空间曲线上一点的切线与法平面及曲面上一点的切平面与法线的概念，
12. 了解求条件极值的拉格朗日乘数法，会求解一些简单多元函数的最大值和最小值的应用问题.

Ⅱ. 重点、难点与知识结构

重点

1. 多元函数的概念；
2. 多元函数的极限与连续概念；
3. 偏导数和全微分的概念；
4. 多元函数微分法及几何应用；
5. 条件极值与最值.

难点

1. 二元函数的概念；
2. 二元函数偏导数、全微分的概念及其计算；