普通高等教育“十三五”规划教材

大学物理

DAXUE WULI

上册

牛 犇 主编
张春志 主审

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等教育“十三五”规划教材

大学物理

上册

牛　犇　主　编

高　辉　杨　爽　副主编

张春志　主　审

中国铁道出版社

CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 提 要

本书是大学工科物理教材.全书分为上下两册,本书为上册,内容包括质点运动学、质点运动的守恒定律、刚体的转动、狭义相对论基础、机械振动、机械波和电磁波、光的干涉、光的衍射、光的偏振、广义相对论简介等.

全书内容精炼,难易适中,力图在有限的课时内完成“大学物理课程”基本内容的传授,同时扩大知识面,培养学生的创新能力.为了能在传授知识的同时培养学生的科学素养,本书每章均附有阅读材料,还选编了部分科学家简介.

本书适合作为普通高等院校理工科“大学物理”课程的教材,也可作为高校人文类专业的物理课程教材或参考书,亦可作为高校自学考试、函授教材.

图书在版编目(CIP)数据

大学物理.上册/牛犇主编.—北京:中国铁道出版社,2017.2
普通高等教育“十三五”规划教材
ISBN 978-7-113-22848-4

Ⅰ.①大… Ⅱ.①牛… Ⅲ.①物理学—高等学校—教材 Ⅳ.①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 029531 号

书　　名:大学物理·上册
作　　者:牛　犇　主编

策　　划:王文欢　　　　读者热线:(010)63550836
责任编辑:左婷婷
封面设计:刘　颖
封面制作:白　雪
责任校对:张玉华
责任印制:郭向伟

出版发行:中国铁道出版社(100054,北京市西城区右安门西街 8 号)
网　　址:http://www.51eds.com
印　　刷:三河市宏盛印务有限公司
版　　次:2017 年 2 月第 1 版　　2017 年 2 月第 1 次印刷
开　　本:720mm×960mm　1/16　印张:16.75　字数:403 千
书　　号:ISBN 978-7-113-22848-4
定　　价:38.00 元

前　言

本书编者根据教育部关于“非物理类理工科大学物理课程教学基本要求”,总结编者多年的教学实践,专门为应用型本科院校各工科专业而编写.

本教材分为上、下两册.其中《大学物理·上册》内容为力学、狭义相对论基础、振动与波动、波动光学、广义相对论简介.《大学物理·下册》内容为静电场、稳恒磁场、电磁感应、气体动理论、热力学基础、量子物理基础.

本书具有以下特点:

1. 对教学体系做了大胆的调整

根据多年教学经验,本书对教学内容做了适当调整:上册先主讲运动学和力学,然后讲授狭义相对论,之后是振动和波动,波动光学,使内容自然地从力学过度到波动光学,最后简要介绍了广义相对论基本理论;下册主要介绍电磁学基本知识,着重讲授电磁感应的基本知识,之后讲解热力学基础知识,最后介绍了量子物理基础知识,并简要地介绍了整个物理学体系.

2. 将大学物理知识与现代教学理念接轨

在确保经典物理学内容的同时,使教材更加贴近慕课、“互联网+教学”等全新教学模式下的教学内容革新,剔除了繁琐的数学推导,力求做到浅显易懂,面向应用型工科学生,使本科教学中学生更加容易掌握物理知识点,不断在思维创新中得到提高.

本书中标有*的部分为选学内容,各院校可根据实际情况进行取舍.

本书由牛犇任主编,高辉、杨爽任副主编,张春志任主审,具体分工如下:第1章、第2章、第3章、第10章由牛犇编写,第4章、第5章由杨爽编写,第6章、第7章、第8章、第9章由高辉编写.本书得到了哈尔滨石油学院和黑龙江省教育科学规划办公室青年专项课题的资助,赵学阳、鲁婷婷老师对本书的编写工作也提出了宝贵意见,在此谨表谢意.

在本书的编写过程中,参考和借鉴了一些国内外同类优秀教材,在此向其作者一并表示诚挚的谢意.

由于编者水平有限,书中难免有许多错误和疏漏,恳请读者批评指正.

编　者

2017.01

目　　录

第 1 章 质点运动学

力学是学习物理学的起点，经典力学研究的是宏观物体的低速运动（相对于光速而言）．以牛顿定律为基础的经典力学为整个物理学夯实了理论基础，也为人类对自然规律的认识开拓了道路．随着经典力学的内容的不断深化，其在机械、土木、石油、交通、航空、航天等工程技术领域的应用更加广泛．广泛的基础性应用一直是物理学力学方向的发展方向．本章主要针对质点的运动状态、质点运动方程和质点运动描述的相对性三个主要方面，研究机械运动的物体在空间的位置随时间变化的关系．

1.1 质　点

对于任何物体来说，运动都是永恒的，绝对静止的物体是不存在的．运动是绝对的，但运动的描述却是相对的．同一个物体相对于不同的参考标准可能具有不同的运动状态，因此，要描述物体的运动状态，需要先说明选取的参考标准才有意义．例如，坐在行进中列车上的人相对于车厢来说是静止的，但相对于地面来说却是运动的．为描述一个物体的位置及其运动而选择的参考标准叫做**参考系**．

对于不同的参考系，对同一物体运动的描述就会不同．从地面上看来垂直下落的雨点，对行驶着的汽车里的旅客看来却是向后倾斜的．因此，当我们研究某一物体的运动时，必须明确指出这种运动是相对于哪一个参考系来说的，否则就无法确定物体的运动情况．

参考系的选择主要取决于研究问题的性质和是否便捷，是由观察者自主选取的．通常情况下，在研究地面上物体的运动时，若不作特别说明，均选地面或相对地面静止的物体作为参考系．选定参考系后，为了描述物体的运动规律，就必须在参考系上建立适当的坐标系．坐标系包括直角坐标系、极坐标系、自然坐标系、球坐标系等．通常情况下，在研究力学问题时选取直角坐标系．一般把坐标系的原点和轴固定在参考系上，运动物体的位置就由它在坐标系中的坐标值决定．这样，物体相对于坐标系的运动也就是相对于参考系的运动．当参考系选定后，物体运动的性质、轨道形状等也就确定了，且不会因为坐标系的选择不同而有所不同．坐标系选择得当，可以使计算简化．

任何物体均有形状及大小，但在有些问题中，物体的形状及大小对问题的讨论影响不大，可以忽略．这时便可将物体抽象成为一个只有质量而无形状大小的几何点，这样的点称为**质点**．由两个或两个以上质点所组成的系统称为质点系．

一个物体能否被看做质点须视研究问题的性质而定．一般而言，当物体的尺度远小于它运动的空间范围时，物体上的每一点的运动情况均可视为相同，就可以把这个物体看做一个质点．如果所研究的问题不涉及物体的转动及形变，这时也可将物体视为一个质点．什么样的物体可以视为质点，要由所研究问题的具体条件来定．例如，当研究地球绕太阳公转规律时，

由于地球直径(1.28×10^4 km)比地球到太阳的距离(1.50×10^8 km)小得多,因而可以忽略地球的线度和形状,这时可将地球视为质点;但若研究地球的自转时,显然就不能将地球视为质点了,必须把它视为球体.因此,如果物体的形状和大小对我们所研究的问题影响很小,我们就可把物体看做质点.

质点只是在几何上作为一个点来处理,但它并不是一个纯粹的点,它仍然是一个物体,具有质量、动量、能量等各种物理属性,只不过这些量不是分布在有限的体积范围内而是集中在一个几何点上.

如果物体在所研究的问题中不能被视为质点,则可设法将它分割成许多个线度极小的质量元,质量元中每一点的运动均可认为相同,这时质量元便可视为质点;而整个物体则可视为质点系.也就是说,质量连续分布的物体可以当做质点系来处理.

质点是一个理想化模型.在物理中常常用理想模型来代替实际研究的对象,以突出主要因素,这在一定条件下简化了问题的处理,突出了主要矛盾.这是物理学中常用的研究方法.

1.2 质点运动的描述

1.2.1 位置矢量

设一质点相对于选定的参考系运动,为了描述质点的位置随时间的变化,首先选取一个坐标系,最常见的是直角坐标系,参看图1.1.

设 t 时刻质点位于空间的 P 点,则 P 点的位置可由三个坐标 x、y、z 来确定,即 $P(x,y,z)$;还可以采用矢量表示法,即用从坐标原点 O 到 P 点的有向线段 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{r}$ 来表示,矢量 $\boldsymbol{r}$ 叫做**位置矢量**,简称**位矢**.位矢 $\boldsymbol{r}$ 的大小等于原点 O 到 P 点之间的距离,方向由 O 点指向 P 点,相应地,坐标 x、y、z 也就是位矢 $\boldsymbol{r}$ 在直角坐标轴上的三个分量.

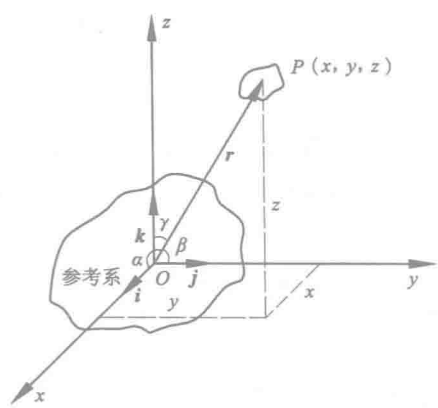


图1.1 直角坐标系中物体的位置

在直角坐标系中,位矢 $\boldsymbol{r}$ 可以表示成

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{1.1}$$

式中,$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x、y、z 三个坐标轴的单位矢量.位矢的大小 r 由下式决定

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{1.2}$$

位矢 $\boldsymbol{r}$ 的方向由下述方向余弦决定

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\quad \cos\beta=\frac{y}{r},\quad \cos\gamma=\frac{z}{r}$$

式中,α、β、γ 分别表示位矢 $\boldsymbol{r}$ 与 x、y、z 三个坐标轴的夹角.

1.2.2 质点运动方程

当质点运动时,质点的空间位置将随时间而变化,这时质点的位矢 $\boldsymbol{r}$ 是时间 t 的函数.表示位矢随时间变化的函数式称为**运动方程**,可以写作

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{1.3a}$$

在直角坐标系中，运动方程表示为

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t) \tag{1.3b}$$

质点的运动方程描述了质点的运动规律．已知质点的运动方程，就可以求出质点在任意时刻的位置，确定质点在任意时刻的速度和加速度，还可以由各时刻的坐标值描述出质点在空间的运动路线．我们把运动质点在空间所经过的路径称为**轨道**，它是位矢 $\boldsymbol{r}$ 的末端随时间变化而描绘出的一条连续曲线．从运动方程中消去 t 即可得到**轨道方程**．

由上可知，运动方程表明 $\boldsymbol{r}$ 与 t 的函数关系，而轨道方程则是位置坐标 x、y、z 之间的关系式，两者是不同的．

例如，已知某质点的运动方程为

$$x=A\cos\omega t,\quad y=A\sin\omega t,\quad z=0$$

式中，A、ω 均为常量．从 x、y 两式中消去 t 后得轨道方程

$$x^2+y^2=A^2,\quad z=0$$

以上两式表示质点在 $z=0$ 的平面内做以原点为中心、半径为 A 的圆周运动．

1.2.3　位移

要研究质点的运动，不仅要知道它的位置，更重要的是要知道它的位置变化．设质点沿图 1.2 所示的曲线 AB 运动，在时刻 t，质点位于 A 点，位置矢量为 $\boldsymbol{r}_A$，在时刻 $t+\Delta t$，质点运动到 B 点，位置矢量为 $\boldsymbol{r}_B$．我们定义：由始点 A 到终点 B 的有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 为质点在时间 Δt 内的**位移矢量**，简称**位移**，即

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A=\Delta\boldsymbol{r} \tag{1.4}$$

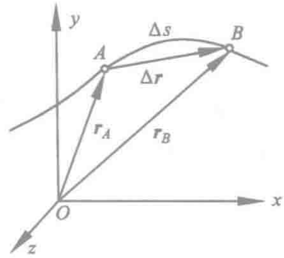


图 1.2　曲线运动中的位移

位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 反映了质点位置的变化，质点在某一时间内的位移等于同一时间内位置矢量的增量．位移是矢量，它的大小等于始点和终点之间的距离，其方向由始点指向终点．

必须注意，位移是描述质点位置变化的物理量，它仅仅表示质点在一段时间内位置变化的总效果，它并不代表质点实际所通过的路程．在图 1.2 中，A 到 B 的轨迹的长度是质点的路程 Δs，而位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 是有向线段 $\overrightarrow{AB}$，它的大小 $|\Delta\boldsymbol{r}|$ 为割线 AB 的长度．一般来说，$|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta s$，仅在 $\Delta t\to 0$ 时，才有 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s$．即使在直线运动中，位移和路程也是两个不同的概念．质点只有做单向直线运动时，才有 $\Delta s=|\Delta\boldsymbol{r}|$．

在直角坐标系中，位移的表达式为

$$\Delta\boldsymbol{r}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}=(\Delta x)\boldsymbol{i}+(\Delta y)\boldsymbol{j}+(\Delta z)\boldsymbol{k} \tag{1.5}$$

位移的模为

$$|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{1.6}$$

位置矢量和位移在量值上都表示长度，国际单位制(SI)中单位为米，符号为 m.

1.2.4　速度

研究质点的运动时，不仅要知道质点的位移，还需知道质点运动的快慢程度和方向，为此我们引入速度这一物理量．

如图 1.2 所示，在时刻 t 到 $t+\Delta t$ 的这段时间内，质点的位移为 $\Delta\boldsymbol{r}$. 定义 $\Delta\boldsymbol{r}$ 与 Δt 的比值为质点在 Δt 时间内的**平均速度**，即

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\overrightarrow{AB}}{\Delta t}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1.7}$$

平均速度是矢量，其方向与位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向相同，大小为$\frac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{\Delta t}$.

平均速度仅反映了质点在某一段时间内位移的平均变化，而在 Δt 时间内，质点各个时刻的运动情况不一定相同，质点运动的快慢和方向也是可以不断变化的.

为了精确地描述质点在某一时刻或某一位置的运动情况，我们可将 Δt 无限地减小，当 $\Delta t\to 0$ 时，$\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$将趋近于一个确定的极限矢量，这个极限矢量确切地描述了质点在某时刻或某一位置时质点运动的快慢程度和方向. 我们定义质点在 t 时刻的**瞬时速度**（以下简称**速度**）为

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1.8}$$

瞬时速度等于当时间趋近于零时平均速度的极限值，即**速度等于位置矢量对时间的一阶导数**.

速度是矢量，具有大小和方向. 速度的方向就是在 t 时刻质点的运动方向，当 Δt 趋近于零时，由位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的极限方向确定，即沿质点所在处轨道的切线方向，并指向质点前进的一方.

为了描述质点运动的快慢，我们引入了一个叫做**速率**的物理量. 速率是标量，它描述质点所经历路程变化的快慢，而不考虑质点运动的方向. 如图 1.2 所示，质点在 Δt 时间内所行经的路程为曲线段 AB，其长度为 Δs，Δs 与 Δt 的比值就称为在时间 Δt 内质点的**平均速率**，即

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1.9}$$

平均速率是标量，而平均速度是矢量，这是两个不同的物理量，即使是平均速度的量值与平均速率也不一定相等. 例如，在某一段时间内质点环行了一个闭合路径，显然质点的位移等于零，平均速度为零，而质点的平均速率则不等于零. 但在 $\Delta t\to 0$ 的极限条件下，曲线 AB 的长度 Δs 与直线 AB 的长度 $|\Delta\boldsymbol{r}|$ 相等，即在 $\Delta t\to 0$ 时，$\mathrm{d}s=|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$，所以**瞬时速率**

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{\Delta t}=|\boldsymbol{v}| \tag{1.10}$$

即瞬时速度的大小即为瞬时速率.

在直角坐标系中，由于

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

所以，速度 $\boldsymbol{v}$ 可表示为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k} \tag{1.11}$$

式中

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\quad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

是速度在 x、y、z 轴的分量. 可见，速度 $\boldsymbol{v}$ 在三个坐标轴上的分量等于相应坐标对时间的一阶导数. 速度的大小也可以表示为

$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} \tag{1.12}$$

速度的方向由下述方向余弦确定

$$\cos\alpha=\frac{v_x}{|\boldsymbol{v}|},\quad \cos\beta=\frac{v_y}{|\boldsymbol{v}|},\quad \cos\gamma=\frac{v_z}{|\boldsymbol{v}|}$$

式中，α、β、γ 分别表示速度 $\boldsymbol{v}$ 与 x、y、z 三个坐标轴的夹角．

在国际单位制(SI)中速度的单位是米每秒，符号 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

1.2.5　加速度

在一般情况下，质点的运动速度是在改变的，不但速度的大小可以改变，方向也可以改变，为了描述质点速度的变化情况，我们引入加速度这个物理量．

如图 1.3 所示，质点在 t 时刻位于 A 点，速度为 $\boldsymbol{v}_A$，在 $t+\Delta t$ 时刻，质点到达 B 点，速度为 $\boldsymbol{v}_B$，则在时间 Δt 内质点速度的增量为

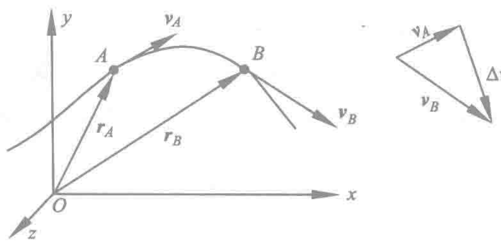


图 1.3　速度的增量

$$\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A$$

我们把速度的增量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 与其所经历的时间 Δt 之比称为质点在时间 Δt 内的**平均加速度**，即

$$\overline{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1.13}$$

平均加速度是矢量，其方向与速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 的方向相同，大小为$\dfrac{|\Delta\boldsymbol{v}|}{\Delta t}$，它表示时间 Δt 内速度 $\boldsymbol{v}$ 随时间的平均变化率．平均加速度只能粗略地描述一段时间内速度变化的大致情况，而不能精确描述质点在某一时刻速度的变化情况．为了精确地描述质点在任一时刻 t 或任一位置处的速度变化情况，我们引入瞬时加速度的概念．

我们把当时间 $\Delta t\to 0$ 时平均加速度的极限值，定义为质点在某时刻或某位置的**瞬时加速度**(简称**加速度**)，其数学表达式为

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.14}$$

即**加速度是速度随时间的变化率，加速度等于速度矢量对时间的一阶导数，或位置矢量对时间的二阶导数**．

在直角坐标系中，加速度可表示为

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{1.15}$$

其中，a_x、a_y、a_z 分别是加速度 $\boldsymbol{a}$ 的三个分量

$$\begin{aligned} a_x&=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\\ a_y&=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\\ a_z&=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\end{aligned} \tag{1.16}$$

加速度的大小是

$$a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{1.17}$$

加速度的方向由下述方向余弦确定

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}$$

式中,α、β、γ 分别表示加速度 $\boldsymbol{a}$ 与 x、y、z 三个坐标轴的夹角 .

加速度是矢量,加速度的方向就是当 $\Delta t \to 0$ 时速度增量 $\Delta \boldsymbol{v}$ 的极限方向 . 加速度 $\boldsymbol{a}$ 的方向与该时刻速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向一般是不相同的. 当质点做变速直线运动时,加速度与速度的方向在同一直线上,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 同方向,质点做加速运动;$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 反方向,质点做减速运动. 质点做曲线运动时,加速度总是指向轨迹凹的一边 . 如果速率逐渐增加,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 成锐角(如图 1.4(a)所示);如果速率逐渐减小,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 成钝角(如图1.4(b)所示);如果速率不变,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 成直角(如图 1.4(c)所示).

在国际单位制(SI)中加速度的单位是米每二次方秒,用符号 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ 表示 .

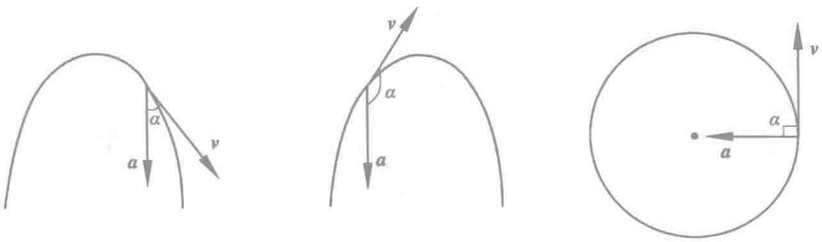


图 1.4 曲线运动中加速度的方向

1.2.6 运动学中的两类基本问题

1. 第一类问题

若已知质点的运动学方程,则可通过求导来计算质点的速度和加速度,这类问题称为第一类问题,它是计算速度与加速度的一种基本方法 .

例 1.1 已知某质点的运动学方程为 $\boldsymbol{r} = 5t\boldsymbol{i} + 15t^2\boldsymbol{j} - 10\boldsymbol{k}$,求 :(1)$t_1 = 1$ s 到 $t_2 = 2$ s 时间内质点的位移;(2)在 $t_1 = 1$ s 时的速度和加速度 .

解 (1)根据定义得

$t_1 = 1$ s 时　　$\boldsymbol{r}_1 = 5\boldsymbol{i} + 15\boldsymbol{j} - 10\boldsymbol{k}$

$t_2 = 2$ s 时　　$\boldsymbol{r}_2 = 10\boldsymbol{i} + 60\boldsymbol{j} - 10\boldsymbol{k}$

位移

$$\begin{aligned}\Delta \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = (10-5)\boldsymbol{i} + (60-15)\boldsymbol{j} + [(-10)-(-10)]\boldsymbol{k} \\ &= 5\boldsymbol{i} + 45\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

(2)根据定义可以求出任意时刻 t 质点的速度矢量、加速度矢量

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = 5\boldsymbol{i} + 30t\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = 30\boldsymbol{j}$$

将 $t_1=1\text{s}$ 代入，即可求出该时刻质点的速度、加速度

$$\boldsymbol{v}=5\boldsymbol{i}+30\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{a}=30\boldsymbol{j}$$

它们的大小为

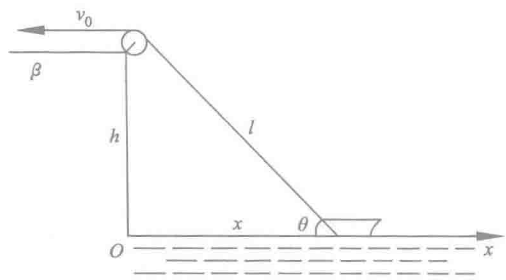
$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{5^2+30^2}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}=30.41\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1},\quad a=|\boldsymbol{a}|=30\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

速度矢量的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{5}{30.41}=0.164,\quad \cos\beta=\frac{30}{30.41}=0.987$$

质点运动的加速度与时间无关，等于常数，$a=30\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$，方向为沿 y 轴正方向．

例 1.2　在离水面高 h 的岸上，有人用绳拉船靠岸，如例 1.2 图所示．设人以匀速率 v_0 收绳，试求：当船距岸边 x_0 时，船的速度和加速度的大小各是多少？



例 1.2 图

解　建立坐标系如例 1.2 图所示，设任意时刻绳长为 l，船处于 x 位置．船在运动过程中，l 和 x 均是 t 的函数．由题意可知，收绳过程中 l 随时间减小，故

$$v_0=-\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$$

且满足关系

$$l^2=x^2+h^2$$

对上述关系两边求导得

$$2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

则船运动的速度为

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{l}{x}v_0=-\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}v_0$$

对速度求导即可得到船运动的加速度

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\frac{v_0}{x^2}\left(x\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}-l\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)=-\frac{h^2v_0^2}{x^3}$$

代入 x_0 即得船在该处的速度和加速度

$$v=-\frac{\sqrt{h^2+x_0^2}}{x_0}v_0$$

$$a=-\frac{h^2v_0^2}{x_0^3}$$

因为 $x>0$，所以 $v<0$，这表明船的速度方向与选定的 x 轴正方向相反．同理，$a<0$，船的加速度方向也和选定的 x 轴正方向相反．v、a 同方向，表示船做变加速直线运动．

2. 第二类问题

若已知质点的加速度（或速度）及初始条件（$t=0$ 时的速度和位矢），则可通过积分运算来计算质点的速度或位矢，这类问题称为第二类问题，它是计算速度或位矢的另一种基本方法．

例 1.3 已知质点做匀加速直线运动,加速度为 a,求这个质点的运动方程.

解 由定义 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$得

$$\mathrm{d}v=a\mathrm{d}t$$

设 $t=0$ 时,$v=v_0$,将上式两边积分

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_0^t a\mathrm{d}t=a\int_0^t\mathrm{d}t$$

由此可得

$$v=v_0+at \tag{1.18}$$

式(1.18)就是确定质点在匀加速直线运动中速度 v 的时间函数式.

又由定义

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v=v_0+at$$

设 $t=0$ 时,$x=x_0$,将上式变形后两边积分

$$\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x=\int_0^t(v_0+at)\mathrm{d}t$$

可得

$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2 \tag{1.19}$$

式(1.19)就是在匀加速直线运动中确定质点位置的时间函数式,也就是质点的运动方程.

此外,若把加速度改写为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

移项并对两边积分

$$\int_{x_0}^{x}a\mathrm{d}x=\int_{v_0}^{v}v\mathrm{d}v$$

可得

$$v^2=v_0^2+2a(x-x_0) \tag{1.20}$$

式(1.20)就是做匀加速直线运动中质点坐标 x 和速度 v 之间的关系式.

例 1.4 一位跳伞运动员在跳伞过程中的加速度 $a=A-Bv$,式中 A、B 均为大于0 的常量,v 为任意时刻的速度. 设初始时刻的速度为 0,求任意时刻的速度表达式.

解 本题已知加速度求速度,亦属第二类问题. 取运动员开始下落位置为坐标原点建立坐标轴,并取竖直向下为正向. 由题意知

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=a=A-Bv$$

分离变量求积分得

$$\int_0^v\frac{\mathrm{d}v}{A-Bv}=\int_0^t\mathrm{d}t$$

由积分公式 $\int\frac{\mathrm{d}x}{a+bx}=\frac{1}{b}\ln(a+bx)+c$,求解上式得

$$v=\frac{A}{B}(1-\mathrm{e}^{-Bt})$$

例 1.5　质点做直线运动,初速度为零,初始加速度为 a_0,质点出发后,每经过时间 τ,加速度均匀增加 b. 求经过 t 时间后,质点的速度和位移.

解　由题意知,加速度和时间的关系为

$$a = a_0 + \frac{b}{\tau}t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_0^v \mathrm{d}v = \int_0^t \left(a_0 + \frac{b}{\tau}t\right)\mathrm{d}t$$

解得速度为

$$v = a_0 t + \frac{b}{2\tau}t^2$$

由于 $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,设 $t=0$ 时,$x_0=0$,有

$$\int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t v\mathrm{d}t$$

$$x = \frac{1}{2}a_0 t^2 + \frac{b}{6\tau}t^3$$

1.3 曲线运动

1.3.1 质点运动的叠加原理

质点运动的叠加性也是运动的一个重要特征. 图 1.5 所示为用每 1/30 s 照明小球一次的频闪仪拍摄的两个小球运动路径的照片. 在同一时刻,同一高度,使一个球竖直下落,另一个球被水平抛射. 可以看出,尽管两个球在水平方向上的运动不同,但它们在竖直方向上,在相同的时间内,下落的高度总是相同的,即两球总是同时落地的. 这表明虽然两球的运动轨迹不同,但在竖直方向上的运动是相同的. 被水平抛射出去的球,水平方向的运动对其竖直方向的运动是没有影响的. 由此可见,抛体运动正是由水平方向和竖直方向两种运动(它们彼此独立)叠加而成.

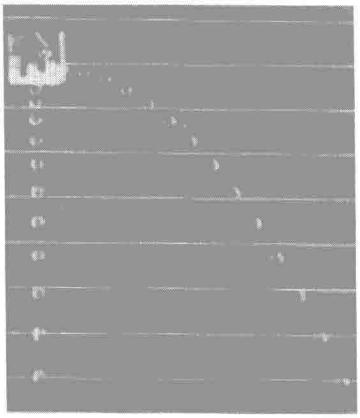


图 1.5　两个小球的频闪观测照片

大量实验事实证明,一个运动可以看成是几个同时进行的各自独立的简单运动的叠加. 这就是**运动叠加原理**. 或者说,任何一个方向的运动,都不会因为其他方向的运动是否存在而受到影响. 运动叠加原理也称为**运动的独立性原理**.

1.3.2 斜抛运动

一物体从地面上某点向空中抛出,它在空中的运动就称为**抛体运动**. 抛体运动是一种平面曲线运动.

当抛体以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 沿仰角 θ 的方向斜抛出去后,若不计空气阻力,则物体在整个运动过程中,只有一个铅直向下的重力加速度 $\boldsymbol{g}$. 如图 1.6,若取抛射点为坐标原点,沿水平方向和竖直

方向分别为 x 轴和 y 轴，从抛出时刻开始计时，$t=0$ 时，物体位于原点．则物体在整个运动过程中的加速度为

$$a_x=0,\quad a_y=-g \tag{1.21}$$

利用初始条件

$$x_0=0,\quad v_{0x}=v_0\cos\theta$$
$$y_0=0,\quad v_{0y}=v_0\sin\theta$$

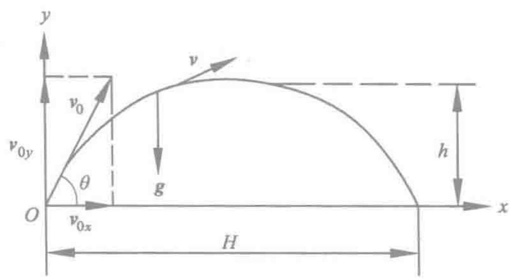


图 1.6　斜抛运动的轨迹

可求出物体在空中任意时刻的速度为

$$v_x=v_{0x}=v_0\cos\theta$$
$$v_y=v_0\sin\theta-gt \tag{1.22}$$

由 $v=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，可得物体的运动方程为

$$\begin{cases} x=\int_0^t v_x\mathrm{d}t=v_0t\cos\theta, \\ y=\int_0^t v_y\mathrm{d}t=v_0t\sin\theta-\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{1.23}$$

运动方程的矢量形式为

$$\boldsymbol{r}=(v_0t\cos\theta)\boldsymbol{i}+\left(v_0t\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2\right)\boldsymbol{j} \tag{1.24}$$

由上式可以看出，抛体运动是由沿 x 轴的匀速直线运动和沿 y 轴的匀变速直线运动叠加而成的．

消去式(1.23)中的 t，可得

$$y=x\tan\theta-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 \tag{1.25}$$

这就是斜抛物体的轨迹方程，它表明在略去空气阻力的情况下，抛体在空间所经历的路径为抛物线．

在式(1.25)中，令 $y=0$，可得抛物线与 x 轴的一个交点的坐标为

$$H=\frac{v_0^2\sin 2\theta}{g} \tag{1.26}$$

这就是抛体的射程．从上式可看出，在给定初速度 v_0 的情况下，射程 H 是抛射角 θ 的函数．要想射得最远，可令 $\sin 2\theta=1$，即在 $\theta=45°$时射程最大．

根据求函数极值的方法，将式(1.25)对 x 求导，并令 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，可得 $x=\dfrac{v_0^2\sin 2\theta}{2g}$，将它代入式(1.25)中，即得物体在飞行中所能达到的最大高度

$$h=\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g} \tag{1.27}$$

在上述讨论中忽略了空气阻力，但在实际中，空气阻力往往不能忽略，实际射程往往也要比真空中射程小很多．所以在实际中，除了要以上述式子为基础外，还要考虑空气阻力、风向、风力等的影响，并加以修正，才能得到抛体运动的正确结果．