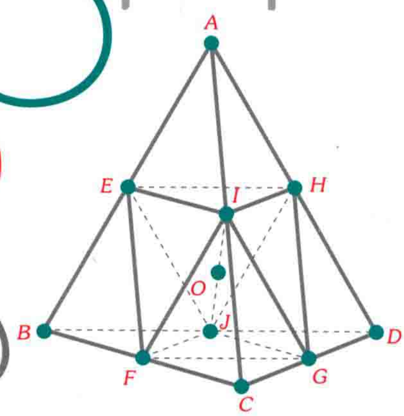
问题·方法

——中学数学探究案例集

上海市教育委员会教学研究室立项的科研项目

项目编号JX09JC01201605

肖恩利 / 编著



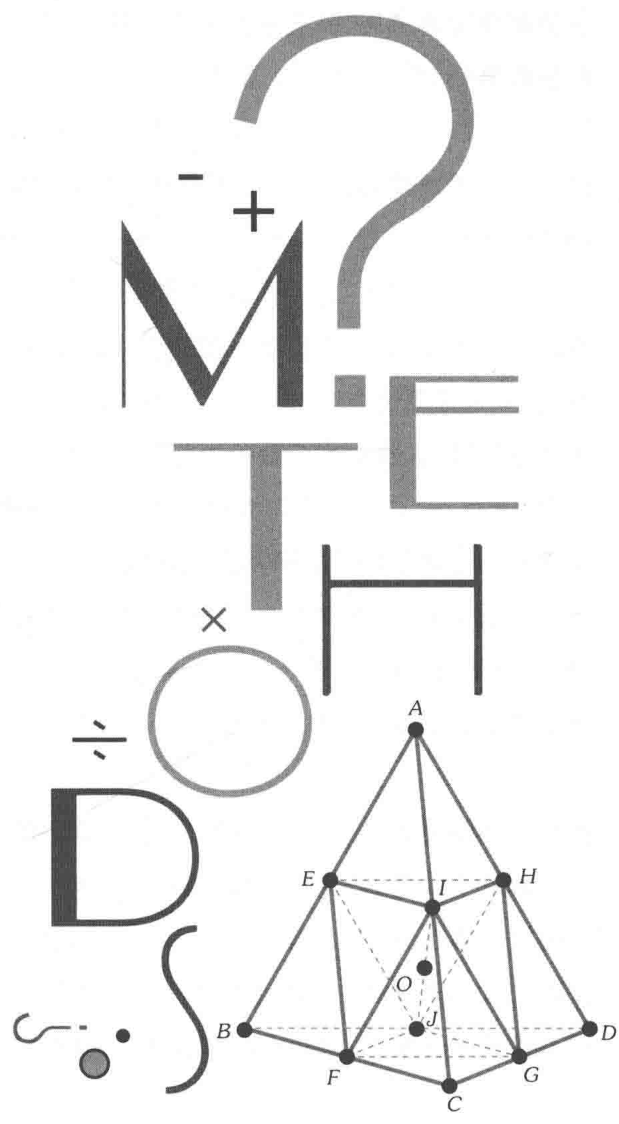
上海社会科学院出版社
SHANGHAI ACADEMY OF SOCIAL SCIENCES PRESS

问题·方法

——中学数学探究案例集

上海市教育委员会教学研究室立项的科研项目
项目编号JX09JC01201605

肖恩利 / 编著



上海社会科学院出版社
SHANGHAI ACADEMY OF SOCIAL SCIENCES PRESS

图书在版编目(CIP)数据

问题·方法:中学数学探究案例集/肖恩利编著. —上海:上海社会科学院出版社,2017

ISBN 978-7-5520-1905-6

Ⅰ. ①问… Ⅱ. ①肖… Ⅲ. ①中学数学课-教案(教育) Ⅳ. ①G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第034904号

问题·方法——中学数学探究案例集

编　　著:肖恩利
责任编辑:成　俊
封面设计:郁心蓝
出版发行:上海社会科学院出版社
　　　　上海顺昌路622号　邮编200025
　　　　电话总机021-63315900　销售热线021-53063735
　　　　http://www.sassp.org.cn　E-mail:sassp@sass.org.cn
印　　刷:上海龙腾印务有限公司
开　　本:787mm×1092mm　1/16开
印　　张:10.75
字　　数:234千字
版　　次:2017年6月第1版　2017年6月第1次印刷

ISBN 978-7-5520-1905-6/G·634　　定价:45.00元

序　一

近些年来,“研究性学习”已经成为基础教育中的一个高频词汇.一位教师是否能真正有效地指导学生进行研究性学习,其自身对本学科的理解与研究能力是至关重要的.但在现实中情况并不令人乐观,教师自身的研究能力常常是一个短板.因此,教师的专业发展既包含对教育理论的学习与研究,也应该包含对任教学科的深入思考与探索.

复旦大学附属中学的肖恩利老师结合他多年数学教学、指导优秀学生竞赛和初等数学研究的一些体会,对初等数学研究作了较为深入的探究与实践,深入思考并研究了许多有意义的真问题,积累了大量成果,形成了这本具有个人特色的初等数学研究专著.

在这本专著中,肖老师较为系统地总结了进行初等数学研究的一些方法,并以案例的形式对如何发现问题、提出问题以及研究问题的方法进行了说明和补充.专著首先对“初等数学研究”的内容进行了一些综述和范围界定,并将该专著中“初等数学研究”的主要内容概括为“初等数学的命题与解题的研究(包括教材、试题等)”;“基于数学软件环境下的数学思想与方法(类比、猜想等)的研究”;“结合高等数学方法的初等数学问题研究”以及“数学史的研究与初等数学问题的溯源研究”等四个方面.这一概括既符合数学科学特质,也符合初等数学教育特质,体现了作者独到的思考.在此基础上,作者进一步重点讨论了在进行初等数学研究时的工具(如信息技术的使用)和重要的思想方法(如类比与联想、一般化与特殊化、正向思维与逆向思维、极限思想与整体思想)等.对研究工具和思想方法作了科学归纳.

当然,仔细研读了这本专著后,我们可以感受到作者的核心目的并不局限于方法的罗列和划分,而是向基础数学教育工作者提出这样一个问题:怎样让数学的“教”与“学”成为一个整体?作者提出了这样一个观点:教师的“教”与学生的“学”实际上是一枚硬币的两个面,并且在一定条件下是可以转化的,即教师的“学”与学生的“教”,体现了教学相长的教育理念.因此教师应该养成时时思考的习惯,既要对数学知识体系有完整而深刻的认识和经常性的思考,又要善于从学生的“学”中学习.

该专著中提供的案例,既有作者或同事教学过程中碰到的问题,如“关于正四面体射影面积问题的向量处理”“球和圆柱侧面可展性的一个证明”,也有他们由一些数学问题出发引起的思考,如“四边形的内切椭圆”“Calkin-Wilf 树,Stern-Brocot 树与正有理数的排列”等.从这些案例中可以看出,肖老师在初等数学研究领域多年的坚持与积累,以及对初等数学问题的敏锐和扎实

的数学功底.这些为一线数学教师的专业发展提供了一个可参考、可借鉴的真实案例.

李秋明

2017 年 4 月

（李秋明，复旦大学附属中学数学教研组组长，上海市中小学正高级教师，上海市特级教师.兼任上海市教育学会中小学数学专业委员会委员，上海市数学会理事，上海市教师学研究会数学专业委员会副主任，上海市普教系统高级教师评审委员会委员，上海市名师、名校长培养工程中学数学基地主持人.中国数学奥林匹克高级教练员，杨浦知识创新区第六批、第七批、第八批拔尖人才.）

序　二

我与肖恩利老师之间，极其投缘. 2002 年，他从华东师范大学硕士研究生毕业分配到复旦附中，与我同处一个办公室十多年. 认识他，为我的后半生交来一些好运.

我们一起讨论过很多大学或中学的一些数学问题的思路，许多都涉及数学教学问题，这样经常的讨论，促使我不断养成坚持阅读的习惯. 当时，复旦附中对新来的教师的培养还是传统的、经验型的，即一位老教师带教一位新教师的“传、帮、带”模式，我带教的青年教师就是肖恩利. 所以，在教学上，相互接触的机会比其他老师要多一些.

我们之间并不像传统的师徒，师道尊严，我的带教看似非常松散，但别具一格. 关于我课堂教学的课不必多听，只要知道我的教学风格即可. 我对一个人天天听我的课感到压力很大，担心不能把他带好，而且，经常有老师坐在教室听课是会分散学生的注意力的. 于是，想了一个减缓压力的办法，告诉他三原则：其一是多听曾容老师的课，因为曾容老师是沪上鼎鼎有名的数学特级教师，他对课堂教学又情有独钟，尤精于数学概念教学，他毕生努力实践的数学过程教学独树一帜，他老人家是首届苏步青中学数学奖的获奖人，曾担任两届中国数学会理事，上海市中小学数学教育研究会副理事长，上海市中学生业余数学学校校长，他可谓是国宝级人物. 其二是多听我的活动课、研究课，以保持听课的总量不变. 对于怎样教导培养学生，特别是指导学生研究型教学方面要多与我讨论，无论是数学专业的还是人生经历的，可以无话不谈，各抒已见，使年轻人没有思想负担，高高兴兴地去钻研教材. 其三是建议他多阅读书籍，尤其是要多了解数学的人文、历史、数学家的逸闻趣事. 要养成多去图书馆阅读、浏览数学杂志的习惯，向全国名师学习，博采众长. 这样持之以恒，教学水平一定会从量变到质变，产生飞跃.

带教他 3 年期满之后，他从徒弟渐渐变成了师傅. 但是，我们已经养成了习惯，还是喜欢经常在一起讨论数学问题，经常讨论拔尖学生的培养问题.

单就写数学教学辅导用书来说，我们有过长期合作的经历，每当出版社约我撰写著作，我就拟好提纲，将书的内容的整体框架设计好，写出一个样本，然后编好目录，先让他根据自己的兴趣、爱好自主挑选一半的任务，所剩下的任务归我完成. 如 2004 年由复旦大学出版社出版的《高考数学一月通》，2005 年由希望出版社、上海电子出版公司联合出版的《高考数学高分对策 80 讲》《高考数学复习测试题 30 套》，这 3 部著作有一百万字之多，都是这样由我和他共同完成的. 现在这三本书都已经绝版了，我还是会听到一些熟悉或不甚熟悉的朋友，称赞其使他们受益. 这给我很大的快慰. 今后每当读者读到以上三部著作，切记这是肖恩利与我合作的

产物.

他在编著书籍的任务中得到了锻炼,增长了才干,这使他拥有浓浓的成就感.我们之间,不仅编写数学教学参考资料,还合作写过多篇有关数学教学科研论文,发表于中文核心刊物,其中有的数学教学论文还被中国人民大学报刊复印中心《中学数学教学》杂志收录.长久以来,我经常把找我做的工作推给他去做,我觉得有些不好意思,我唯一心安理得的是,我所认识的人中,他是最合适的.数学杂志社邀我审稿、命题的任务,我也是交给他完成的.这是非常辛苦的工作,感谢他能如期按质按量地完成任务.

我认为肖恩利不仅数学论文写得很好,而且人品也很好.其长处有两点:一是与人为善.他计算机玩得很好,我经常向他请教计算机问题.无论我提出什么图形,他都可以尽善尽美地表现出来.他看我操作速度较慢,总是叫我有什么事给他帮忙做就行,这样既快又好.而我则不希望他代劳,一定要他具体教我操作,为的是学会了这门技术,可以更好地指导学生做数学课题.二是他善于发现问题,总结教学经验,数学钻研得精深.当你读完这部著作,一定能感受到他宽阔的知识面和严谨的文字表达功夫,以及他在数学园地耕耘中所达到的高度.

我得知肖恩利要编著《问题·方法——中学数学探究案例集》一书从酝酿到成稿已经有一年多时间了.还记得是在学校的大操场上参加2016年的第一次升旗仪式,他兴冲冲地告诉我,他申报的科研课题得到了杨浦区学科带头人的科研基金的资助,将写一本有关中学数学探究案例集的著作,邀我将未发表的文章都收录于他的著作中,我非常感动.过去期待投稿发表一篇数学论文的那种艰辛,至今历历在目.如今,哪怕是发表十篇数学论文,都变得那么容易,几乎是唾手可得,这真是太不可思议了.这是因为肖恩利老师是中学高级教师,中国数学奥林匹克高级教练员,上海市中学生业余数学学校教练员.他多次荣获中国数学会高中、初中数学联赛优秀教练员称号,是杨浦区第八批教育系统拔尖人才和杨浦区第四届学科带头人.他获得"上海市中小学中青年教师教学评选活动一等奖",在《数学通报》《数学教学》《数学通讯》等数学核心类期刊上发表十余篇论文,并与他人合著多本书籍.

我和肖恩利有着千丝万缕的关系,记得2008年,我任教班级的学生施通通到美国西德维尔友好学校(Sidwell Friends School)交流一年,西德维尔友好学校的老师和同学对他的出色表现赞不绝口,很想知道复旦附中的数学教学风格和秘诀,经他与学校联系,要复旦附中委派一位数学老师到美国西德维尔高中参加美国独立学校协会(National Association of Independent Schools,简称NAIS)年会,肖恩利有幸受学校委派.在出访前,他与我讨论报告的选题及其内容.最终,他不负众望,以《中国数学教学》为题,在NAIS的小组会上作了成功的报告.2009年,上海市科学技术协会组织的英才俱乐部,为了指导上海中学生的数学课题研究,邀请的大学教授是束金龙先生,而邀请的中学老师是我.他向我问起肖恩利的教学情况.我才知道,他原来是肖恩利的硕士生导师.而在肖恩利的教学生涯中,恰巧我们相遇.

在我退休之际,能看到肖恩利的有关数学方法的著作,并被请为此书作序,实乃我一生中的幸事.非常相似的是,我也是在这个年龄发表有关高中生数学课外读物的数学专著,但按学术专

著的质量来看，他的著作其难度和深度都写得比我好. 真是青出于蓝而胜于蓝. 在此，我祝贺肖恩利新著出版，并以此为新起点，不断有创新教学成果，不断有新著作问世.

汪杰良

2017 年 3 月于复旦附中

（汪杰良，复旦附中数学教师，中学高级教师，中国数学奥林匹克高级教练，中国数学会会员. 曾任南京市中学数学教学研究会常务理事、南京市初等数学研究课题组组长、上海市数学会理事、上海市中学数学教学研究会常务委员.）

前　言

有人说，数学教师的三项基本功是解题、上课、写论文，此言不虚，每一位奋战在教学第一线的教师都对这种说法有深刻的感受．自从踏上工作岗位的第一天起，数学教师几乎天天都在与“题目”打交道，积累了不少的解题资料，也肯定产生过不少的“火花”．那么，是让这些“火花”渐渐熄灭，还是让它“越烧越旺”，进而能开辟一小片自己的“研究领域”？我的选择是第二种．在多年的教学和解题经历中，我养成了“记录——思考——引申——溯源”的习惯：

“记录”——将自己在教学和解题过程中遇到的好问题、好方法记录下来；

“思考”——将自己收集的问题反复研读、反复琢磨；

“引申”——从不同角度研究问题，设法找到问题、方法之间的联系；

“溯源”——从数学历史、数学名题、数学名著中寻找问题来源，寻找灵感，从初等数学与高等数学的关联中寻找思路和解决方法．

到今天为止，解题是我每天都要进行的思维活动，不仅活跃了我的思维，提升了我的研究能力，也让我在教学实践和解题实践中找到了快乐，找到了成就感．虽然离开辟自己的“研究领域”还有一段距离，但我始终相信，坚持下去，终有收获！

本书收录的是我和我的同事们在平时教学和解题中的一些思考，既有对解题方法的探讨，如“一个射影面积的向量化处理”和“对一个分段递推数列周期性的研究”，也有对数学原理的思考，如“球和圆柱侧面可展性的一个证明”和“从 $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$ 到高斯整数”等，并从中提炼了一些进行初等数学研究的主要方法，如信息技术的使用、一些重要的思想方法等．当然，这些方法并没有包含进行初等数学研究的所有方法，并且在进行初等数学研究的时候，方法的使用并没有明显的界限，初等数学研究往往是对研究者的知识、技能和意志力等全方位的考验，因此，本书的写作目的并不在于方法的罗列和划分，而是提出这样一个问题：怎样让数学的“教”与“学”成为一个整体？这应该就是我不断努力追求的目标和方向吧．

在此，特别感谢李秋明老师和汪杰良老师给我的鼓励、支持和帮助，也感谢他们为本书作序．

限于学识和能力，本书尚有不足之处，敬请指正！

笔者

2017 年 3 月

目　录

第一章 开启中学数学探究之门，踏上初等数学研究之路

——概论

何谓中学(初等)数学？何谓中学(初等)数学研究？

在数学史的研究中，16 世纪末到 17 世纪初是公认的“初等数学”(即常量数学)向“近代数学”(即变量数学)的过渡时期. 在这一时期之前，数学已经明显地从经验形态上升为理论形态，成为一门独立的学科，数学的主体部分，如算术、代数、几何、三角等已基本建立起来. 17 世纪，数学“出现一次从常量数学到变量数学的跃进，以解析几何和微积分为代表”①，自此，数学进入了“微积分”和“代数化研究”的时代，标志着“近代数学”辉煌时期的开始. 与之相应的，现阶段我国中小学的数学学习内容，的确是以 17 世纪初之前的数学内容为主. 自从 20 世纪 50 年代末人民教育出版社出版发行丛书《初等数学复习及研究》以来，“初等数学”的研究内容“约定俗成的是指当时不属于高等数学、近代数学、现代数学的内容”②.“初等数学”即“中小学数学”的合理性正体现于此. 但这种简单看法带来的直接后果是，在当今的数学界，“凡说到初等数学，不少人总会有一种‘小儿科’的感觉”③，认为初等数学难有大作为和真正的进展. 这种看法混淆了“初等数学”与“初等数学研究”，割裂了“初等数学”与“高等数学”的关系.

诚然，“初等数学”的内容是“基础的”，方法直观，抽象程度不高，处于数学的基础地位，在长期的数学教学实践中，似乎也形成了一个共识：初等数学中的每个概念和每个命题都不过是高等数学中某一数学理论的具体表现和特殊情况，初等数学对之的处理只能是就事论事. 这种认识显然是不恰当的，在数学的发展史中，很多例子表明，越是浅显易懂的问题，越是深奥无比，初等数学中一些看上去“浅显”的问题，却促成了高等数学在某一领域的深入发展，如对欧几里得几何学的第五公设的研究而发展起来的罗巴契夫斯基几何以及黎曼几何学等非欧几何学，受代数方程根式解的启发而发展起来的伽罗瓦群论，等等. 在已故数学家吴大任为《高观点下的初等数学(Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint)》所作的导读中，明确指出，初等数学即“基础数学”，是“整个数学的基础”，“其观点蕴含着真理”④.

因此，初等数学是高等数学的基础，高等数学是初等数学的延续，虽然两者各有自己的研究对象、方法和任务，彼此替代不了，但是两者在内容、方法和思想上仍然互相渗透. 初等数学中的

---

① 沈文选，杨清桃. 数学思想领悟[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2008：5.

② 甘大旺. 初等数学研究问题四议[J]. 中学数学，2013(1)：60－62.

③ [德]F. 克莱因. 高观点下的初等数学(第一卷)[M]. 舒湘芹，陈义章，杨钦樑，译. 上海：复旦大学出版社，2009.

④ [德]F. 克莱因. 高观点下的初等数学(第一卷)[M]. 舒湘芹，陈义章，杨钦樑，译. 上海：复旦大学出版社，2009.

一些思想方法和思维模式仍在高等数学中起着非常重要的作用,日本数学家和教育家米山国藏曾说过:"学生们在初高中学到的数学知识,几乎没有什么机会应用,很多就会忘掉,然而不管他们以后从事什么业务工作,唯有深深地铭刻于脑际的数学精神和数学思想方法却长期地在他们的生活和工作中发挥着重要作用."[①]可以说,初等数学"内容初等性"是其"内容丰富性和综合性"的构成要件,初等数学形数并举,可以从多个角度去分析,具有高度的灵活性,最适宜作为研究数学方法的素材,历来与科学方法论的发展有密切的联系.因此,"初等数学研究"有着比"初等数学"更为广泛的内容,它不仅关注具体的数学知识,也以"数学方法研究"作为其研究目的之一.正如周春荔教授指出,初等数学研究"内容主要涉及初等数学专题的发现与探讨,数学思想方法论以及有关数学史的研究等等"[②].

1.1 初等数学研究的内容和方向

作为中学数学一线教师中进行初等数学研究的典型代表——甘志国,曾在其皇皇巨著《初等数学研究(Ⅰ)》中指出[③],初等数学研究包括以下内容:

① 教材研究;

② 竞赛研究;

③ 解题研究;

④ 专题研究(难度很大,难出成果);

⑤ 文献研究;

⑥ 课外活动研究;

⑦ 跨学科研究.

罗增儒教授[④]将"初等数学研究"进一步引申为"中学教师的数学研究",并且应该把"初等数学研究"放在首位,还应该包括"对数学内容做教学法加工的'教育数学'研究",即"中学教师的数学研究"应包括以下两个重点:

① 发展初等数学;

② 建设教育数学.

章士藻教授[⑤]提出了初等数学研究的8个方向:

① 继续开展对著名古典数学问题的研究;

② 不断开拓新领域,开展对新课题的研究;

③ 开展对初等数学思想、方法的研究;

④ 开展对初等数学命题的研究;

⑤ 开展对初等数学解题的研究;

---

① [日]米山国藏.数学的精神、思想和方法[M].毛正中,吴素华,译.成都:四川教育出版社,1986.

② 周春荔.试论中学数学教师的初等数学研究[J].中学数学,1991(6):1-3.

③ 甘志国.初等数学研究(Ⅰ)[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2008.

④ 罗增儒.谈中学教师的数学研究工作[J].中学数学教学参考,1997(7):24-26.

⑤ 章士藻.中学数学教育学[M].南京:江苏教育出版社,1996.

⑥ 开展对初等数学的应用研究；

⑦ 开展高等数学指导初等数学的研究；

⑧ 开展对初等数学的教学研究.

综合以上各位专家和学者的看法，结合目前数学教学环境的变化（如大量数学类专业软件的开发与应用等），笔者认为抓住以下几个方向进行初等数学研究是大有益处的，有利于教学和教师的成长：

① 初等数学的命题与解题的研究（包括教材、试题等）；

② 基于数学软件环境下的数学思想与方法（类比、猜想等）的研究；

③ 结合高等数学方法的初等数学问题研究；

④ 数学史的研究与初等数学问题的溯源研究.

其中，“初等数学问题的溯源研究”是指系统地收集资料，完整梳理某一（类）初等数学问题的发生、发展历史和研究现状. 由于初等数学部分问题解决的资料已经非常丰富，因此，“溯源研究”的目的是将某一类问题的“点”串成“线”，并将“线”织成“网络”，看清问题的脉络，寻找解决问题的突破口.

方向④的确定是基于以下的思考.

除了前述“基础性”与“综合性”等技术和解题层面的特点之外，初等数学的“文化教养”功能是其他学科不可替代的，这一功能的实现需要教师对初等数学的内容和发展史有比较全面的了解. 伟大的数学家庞加莱曾说：“如果我们想要预测数学的未来，那么适当的途径是研究这门学科的历史和现状”[①]；法国数学家泰尔凯则认为，数学家的传记、轶闻、故事还可以启发学生的人格成长. 教学实践也表明，用适当的数学史内容点缀数学教学，可以增加学生的学习兴趣. 同时，数学史也向我们（教师和学生）展现了数学曲折的发展和数学家们坚持不懈的努力，甚至为了追求真理而拼搏一生，了解数学史不仅可以促进学生理解数学知识，还能使他们获得顽强学习的勇气，进而塑造完善的人格. 从数学课程的角度看，适当引入数学史是必要的：

（1）中小学数学课程中的逻辑体系是系统的，是有条理的，学习内容有先后，给学生的印象是数学的发展似乎是按某种方式预先安排好的，“螺旋上升”，例如整数的发展“自然”过渡到有理数和无理数，为了学习函数“自然”需要引进集合等等，实际上，数学发展史远远比课本中体现出来的要丰富得多. 学习数学史，可以让学习者能更完整地理解数学概念的发展与联系，更深刻地理解数学的本质.

（2）中小学数学课程中的概念和命题（定理、公理等）是经过千锤百炼的，具有高度概括性，给学生的印象是数学家所做的事情就是概念到概念，定理到定理，如学生学习圆锥曲线，模式是“定义——建立方程——研究性质”，但实际上圆锥曲线的发展史却与之大相径庭. 起源于公元前4世纪的圆锥曲线与几何三大问题中的二倍立方问题有关，古希腊数学家阿波罗尼奥斯（Apollonius）（约公元前262—前190）采用平面切割圆锥的方法研究圆锥曲线，并著有《圆锥曲线论》（该书由陕西科学技术出版社于2007年再版，朱恩宽等译），书中使用纯几何方法已经得到了今天高

① ［美］M. 克莱因. 古今数学思想［M］. 张理京，张锦炎，江泽涵，译. 上海：上海科学技术出版社，2013.

中数学中关于圆锥曲线的全部性质与结果，该书问世后的十几个世纪里，数学界对圆锥曲线的研究一直没有什么进展．直到16世纪，德国天文学家开普勒揭示了行星按椭圆轨道绕太阳运行，意大利物理学家伽利略发现物体斜抛运动的轨道是抛物线，这两件事唤醒了人们对圆锥曲线的热情，促使人们对圆锥曲线作进一步的研究．1579年，意大利数学家蒙蒂(Guidobaldo del Monte)将椭圆定义为：平面内到两个定点距离之和为定长(大于两定点间的距离)的动点轨迹，这也是现在我国的高中数学教材中一直使用的定义．直到17世纪初期，解析几何随着费马和笛卡儿的著作而诞生，利用方程研究圆锥曲线才进入人们的视野，并大大促进了圆锥曲线理论的发展．到了19世纪末，圆锥曲线"不仅在理论上达到极高峰，在实用上也得到充分的利用"①．圆锥曲线有着2000年的丰富发展史，这显然是课程设置中的学时要求所不能比拟的．

进一步，如前所述，《圆锥曲线论》既然已经得到了今天关于圆锥曲线的全部结果，那么今天我们使用解析方法得到的所有结论应该算是《圆锥曲线论》的补充，或者是相关结论的初等证明，正如胡炳生教授所指出的："如果我们不知道这方面的数学发展的史实，就可能陷入初等数学研究的误区：误将前人的研究成果，又再次进行重复研究．"②

(3) 中小学数学教材或试题中的很多选题具有深厚的历史背景，或者与历史上的数学名题有千丝万缕的关系，平凡的外表下面往往掩盖了其生动活泼的历史图景．正如浙江大学理学院数学系沈康身教授(1923—2009)所说，"历史数学名题体现和谐之美，和音乐、绘画、雕塑、建筑等艺术作品一样，是人类文化的瑰宝，不因国籍、种族、肤色、语言而异，人见人爱，津津乐道"③．在初等数学研究和数学教学中，如何充分挖掘历史数学名题的教育意义和方法意义，是一个很有价值的选题．以下仅举三例：

① (上海版高二第二学期数学课本，第38页，例3)

过圆 $x^2+y^2=r^2$ 上一点(x_0,y_0)的切线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$；过圆 $x^2+y^2=r^2$ 外一点(x_0,y_0)作圆的两条切线，则两切点所在的直线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$；

一般情况下，给定点 $P(x_0,y_0)$，直线 l：

$$ax_0x+b\frac{y_0x+x_0y}{2}+cy_0y+d\frac{x_0+x}{2}+e\frac{y_0+y}{2}+f=0$$

称为点 P 关于二次曲线

$$C: ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

的极线，点 P 称为直线 l 关于曲线 C 的极点．

极点和极线是射影几何中的概念，有关其在平面几何中的应用可参见《初等数学复习及研究(平面几何)》(梁绍鸿，哈尔滨工业大学出版社，2008)，在圆锥曲线中的应用可参见本章参考文献[1][2][3]和[4]．

② (上海版高一第二学期数学课本，第74页，练习5.6(3)，第5题)

---

① 白尚恕．圆锥曲线小史[J]．数学通报，1964(2)：36－41．

② 胡炳生．略论初等数学研究的文化意义[J]．中学数学教学，2009(5)：13－15．

③ 沈康身．历史数学命题赏析[M]．上海：上海教育出版社，2010．

在$\triangle ABC$中，证明：

$$a^2+b^2+c^2=2(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C).$$

该等式的角形式为

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2(\sin B\sin C\cos A+\sin C\sin A\cos B+\sin A\sin B\cos C),$$

可以证明的是，当$A+B+C=(2k+1)\pi$时，上面的等式仍然成立. 实际上，这个等式是以下不等式的特殊情况：

(嵌入不等式)对$\triangle ABC$和任意实数x,y,z，都有

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2(yz\cos A+zx\cos B+xy\cos C).$$

嵌入不等式最早出现在英国数学家 J. Wolstenholme 的著作 *A Book of Mathematical on Subjects Included in the Cambridge Course*（London and Cambridge，1867）中. 1971 年，M. S. Klamkin 将其推广为

对$\triangle ABC$和任意实数x,y,z和正整数n，都有

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2(-1)^{n+1}(yz\cos nA+zx\cos nB+xy\cos nC).$$

该不等式称为 J. Wolstenholme-Klamkin 加权三角不等式. 有关嵌入不等式的应用可参见本章参考文献[5].

③（2009 年高考湖北卷，理科第 15 题）

已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=m$（m为正整数），$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2}, & a_n\text{ 为偶数},\\ 3a_n+1, & a_n\text{ 为奇数},\end{cases}$若$a_6=1$，则$m$所有可能的取值为________.

这个问题非常简单，但其背景却不一般，来源于著名的“$3x+1$”问题，即

(角谷猜想)给定一个正整数n，若n是偶数，就将n除以 2 得到$\frac{n}{2}$；若n是奇数，就乘以 3 加 1 得到$3n+1$，不断重复这两种运算，则有限步后结果为 1[①].

角谷猜想让无数数学家大跌眼镜，虽然数学家们已经发表了不少严肃的关于该问题的论文，但却始终没有最终解决这个猜想. 自从 1994 年费马大定理解决以来，有人甚至认为“$3x+1$”问题是下一个亟待解决的费马问题，但数论学家 Paul Erdös 的一番话可能给很多人的热情浇上一泼冷水，“数学还没有发展到解决这种问题的水平”. 该问题的内容实际蕴含了一个迭代过程，是一个命题的好材料.

基于以上的分析，笔者将“数学史的研究与初等数学问题的溯源研究”列为“初等数学研究”的一项内容.

① 靳平. 数学的 100 个基本问题[M]. 太原：山西科学技术出版社，2004.

1.2 初等数学研究中的信息技术——愈加重要的角色

2000年,在东京召开的第九届国际数学教育大会上,日本数学家藤田宏将"以计算机技术为代表的信息时代数学"列为今日数学经历的四个高峰之一(其他三个高峰依次是,以欧几里得《几何原本》为代表的古希腊公理化数学;以牛顿发明微积分为开端的无穷小算法数学;以希尔伯特为代表的形式主义数学).的确,信息技术的飞速发展为数学的发展提供了强大的工具,彻底改变了长期以来数学仅仅依靠一支笔和一张纸的传统.不仅使数学的应用在深度和广度两方面达到了前所未有的程度,而且深刻影响了数学的发展进程和思维方式.

(1)"四色问题"是一个著名的数学难题,吸引了大批优秀的数学家.1976年,美国伊利诺伊大学两位数学家 Kenneth Appel 和 Wolfgang Haken 宣布,他们用计算机圆满解决了"四色问题".他们将"四色问题"转化为将近两千个特殊地图的四色问题,然后利用计算机逐个验证,共计算了1 200个小时.这一消息在数学界产生了极大的震动,尽管有数学家不承认这是一个证明,但一个公认的事实却是,始于20世纪六七十年代的数学软件的迅速发展对数学的观念和研究方法都产生了巨大的冲击,利用数学软件进行数学研究正在被越来越多的数学家所接受和重视.正如 Atiyah MF 所说:"计算机在数学家工作的所有阶段上,特别是在探索和实验阶段提供着实际有效的帮助."[①]

(2)我国数学家吴文俊先生以其在数学定理机械化证明中的卓越成就荣获2000年度国家最高科学技术奖.数学定理的机械化证明,是指对于某一类定理(这类定理可能成千上万,也可能无穷无尽),建立统一、确定的证明程序,机械地、按部就班地逐步实施,经有限步后可推断数学命题的真假.相对于中学几何课程中的"一理一证",机械化证明实现了"万理一证",是数学的认识和实践中的一次飞跃,正如吴先生自己所言,"实际上,我做的数学机械化工作,是用计算机来研究数学."数学机械化的思想曾吸引了无数数学家为之倾注心血,只是在"吴文俊先生创立了数学定理机械化证明的吴氏定理之后,人们才第一次得以实现大量相当困难的数学定理的机械化证明."[②]同时吴文俊先生大力倡导数学机械化的应用,在他的指导和带动下,数学机械化方法在一些交叉研究领域获得初步应用,如理论物理、计算机科学、信息科学、自动推理、工程几何、机械机构学等等.数学机械化研究正不断开拓更多的应用领域.

(3)2016年1月,美国数学家 C. Cooper 通过"互联网梅森素数大搜索"(GIMPS)项目,找到了目前人类已知的最大素数 $2^{74\,207\,281}-1$,该素数有22 338 618位,是第49个梅森素数.这一消息迅速引发了人们的热议.梅森素数是指形如 $M_p=2^p-1$(p 为正整数)的素数,是为了纪念数学家马林·梅森(Marin Mersenne)而命名,被人们誉为"数海明珠".2 300多年来,人类仅发现49个梅森素数,且发现的已知最大素数几乎都是梅森素数,因此寻找新的梅森素数的历程也就几乎等同于寻找新的最大素数的历程,而这历程难度极大,不仅需要高深的理论和纯熟的技巧,而且需要进行艰苦的计算.人们的探寻历程主要经历了以下三个阶段:

---

① Atiyah MF,陈冬生.数学与计算机革命[J].数学译林,1991(1):62-67.

② 石赫.数学定理机械化证明的吴文俊原理[M]//中国数学发展的若干主攻方向.南京:江苏教育出版社,1994.