万学教育
UNIVERSAL EDUCATION GROUP

最·新·版

金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

考研数学

高等数学基础教材

李铮 主编

- 浓缩本科教材，从最基础角度详解考试要点
- 精析典型实例，助力“三基”知识理解与运用
- 集中提炼要点精华，贴心提示常见误区、失分点
- 精编同步习题及详解，现学现用、及时巩固提高

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

万学教育
UNIVERSAL EDUCATION GROUP

考研数学

高等数学基础教材

李铮◎主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

考研数学高等数学基础教材/李铮主编. —北京：
北京理工大学出版社，2016.3
ISBN 978－7－5682－2016－3

Ⅰ.①考… Ⅱ.①李… Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第053822号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 / 19.5
字　　数 / 582千字
版　　次 / 2016年3月第1版　2016年3月第1次印刷
定　　价 / 48元

责任编辑 / 梁铜华
文案编辑 / 多海鹏
责任校对 / 孟祥敬
责任印制 / 边心超

图书出现印装质量问题，请拨打售后服务热线，本社负责调换

前言

高等数学是高等院校理工科和经管类各专业的一门重要的基础理论课程，也是全国硕士研究生入学统一考试数学试卷中所占分值最多的考查学科（在数学一、数学三试卷中分值比例为56%，在数学二试卷中分值比例为78%）。高等数学学科所研究的理论知识以及解决问题的思想、方法在科学技术领域有着广泛的应用，学好这门课程是至关重要的。通过本课程的学习，学生应掌握高等数学的基本概念、基本理论和基本方法，并具备应用高等数学的理论、方法去分析和解决实际问题的能力。

对于具有选拔性的研究生入学考试，教科书因受到课时和篇幅等因素的局限，不可能针对这一考试的需求对所有的考点都做出详尽阐释，也不可能提供多样的解题方法和对各章知识点、易错点的系统归纳总结。本书的主旨就是帮助读者把握高等数学这门课程的知识体系的内涵及精华，并且根据研究生入学考试的范围和要求针对性地突出重点，使读者在复习时掌握重点，在考试中应对自如，获得优异成绩。

本书为编者基于多年本科教学实践和丰富的考研辅导经验，严格依据最新全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲的要求精心编写。为了方便读者复习时与考试要求保持一致，本书按考试大纲的编排顺序同步逐章编写。全书共分为八章，每章由本章概要、考查要点详解、重要公式结论与方法技巧、常见误区警示、本章同步练习、习题答案解析六大栏目构成。

本书在编写中力求深入浅出、突出重点，注重高等数学的基本概念、基本理论和基本方法，尽量做到详尽深入、概念准确、逻辑清晰、通俗易懂，同时在选材、理论推导、内容讲述等诸多方面全面满足考生的需要。本书包含较多的例题，不仅在解题方法方面体现出标准、简捷、巧妙的特点，并且在例题后增加了解题思路、分析和评注，帮助考生及时总结解题经验，避免常犯错误。此外，在各章的最后提供同步练习，以便考生能通过全面系统的解题训练切实巩固提高。

本书的总体特色：本科教科书与考研大纲考试要求的完美结合

本书最大的特点在于：在内容编写方面像本科教材一样基础、详尽、透彻，并且在考试的适用性和针对性上更胜一筹，全面满足考生基础阶段复习的需求。

本书的编写体系和特点如下：

1. 本章概要

提纲挈领总括各章的主要内容，根据历年考试中命题特点提示复习要点并给出合理建议；形象呈现知识结构图，方便读者把握考点的内在联系；再现考试大纲对各章考查的范围和要求，给读者提供明确方向及重点。

2. 考查要点详解

从最基础的角度切入，像本科教材一样详尽透彻讲述各章节涉及的基本概念、定理、法则等考点，既细致深入，又突出要点，注重知识点之间的衔接关联；针对各考查要点编排适量的具有代表性的基础性例题，不仅提供规范、详细的分析解答，而且注重思路、方法的启示和归纳，使读者不仅学会知识，更能够灵活运用。

3. 重要公式结论与方法技巧

集中归纳各章需要牢记的、常用的、对解题特别关键的公式与结论，知识精华一应俱全，便于读者查找记忆；提炼各章典型题目的解题方法技巧，有效提高读者的解题熟练度，为强化、冲刺复习奠定坚实基础。

4. 常见误区警示

为避免读者在基础复习时形成的对知识内容的错误理解、对解题方法的错误思维定势、对细节的疏漏，造成后期复习的困扰甚至是考试中的失分，此栏目针对读者最常见的理解误区和复习盲点进行详细、透彻讲解，并辅以实例演示说明。

5. 本章同步练习及习题答案解析

各章提供适量习题及配套答案解析，供读者在复习各章之后通过独立解题熟悉“三基”在解题中的应用，并对照答案解析明晰错误原因和复习薄弱环节，及时查漏补缺。

由于本书是基础复习教材，要求读者重点掌握“三基”，对于综合性较强的题型，编者将在后续的《考研数学强化复习全书》(数学一至三)中继续进行详细讲解，希望读者在使用本书夯实基础之后再进行强化提高，最终在考试中取得优异成绩！

特别提示　本书适合数学一、数学二、数学三及数农考生使用，对于仅针对数学一至三个别卷种适用的章节，书中分别以上标“①”、“②”、“③”表示，数农考生可参考数学三的适用范围。书中收入了部分考研真题，对真题，在题号后以“年份卷种”的形式表示，如选自 2011 年数学一的真题表示为“2011①”。本书中涉及的符号力求与教育部考试中心发布的最新大纲及使用最广泛的高校教材保持一致，便于读者识别。

由于编者水平有限，同时编写时间也较为仓促，不足与不当之处在所难免，恳请读者和专家批评指正。

编者

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　录

第一章 函数 极限 连续

本章概要

复习导语

高等数学的研究对象是函数，研究方法就是极限，这充分说明了本章内容的重要性．函数、极限、连续都是高等数学的基础内容，学好本章对于学习高等数学是至关重要的．这部分知识在考研真题中的命题形式通常是选择题或填空题，考查对于概念的理解；而更多的是作为基础知识在考研真题的综合题和应用题中体现．求极限是研究生入学考试的一个重要题型，随着学习内容的不断深入，求极限的方法将会逐步多样化．掌握求极限的方法是非常重要的，了解掌握最基本的求极限方法可为更深入的学习打下坚实的基础．

知识结构图

- 函数
  - 定义
    - 定义域
    - 对应法则
  - 性质
    - 奇偶性
    - 单调性
    - 周期性
    - 有界性
  - 初等函数
    - 基本初等函数
    - 复合函数、反函数
  - 其他函数
    - 分段函数
    - 隐函数
    - 参数方程、极坐标表示的函数

- 极限
  - 定义
    - $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$
    - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$
      - $x\to x_0^+$
      - $x\to x_0^-$
    - $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$
      - $x\to +\infty$
      - $x\to -\infty$
  - 性质
    - 唯一性
    - 有界性
    - 保号性

- 极限
  - 极限存在准则
    - 单调有界准则
    - 夹逼准则
  - 两个重要极限
    - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
    - $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$
  - 无穷小
    - 定义
    - 性质、关系
    - 比较
    - 无穷大
- 连续
  - 定义
    - $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$
    - 左右连续
  - 初等函数的连续性——定义区间内连续
  - 间断点
    - 第一类间断点(左右极限存在)
      - 可去间断点
      - 跳跃间断点
    - 第二类间断点(无穷间断点、振荡间断点等)
  - 闭区间连续函数的性质
    - 最值定理→有界性定理
    - 介值定理→零值定理

关系:连续⇒极限⇒
- 有界
- 保号

复习目标

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.

5. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系[①②].

了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念[③].

6. 掌握极限的性质及四则运算法则[①②].

了解极限的性质,掌握极限的四则运算法则[③].

7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法[①②].

了解极限存在的两个准则,掌握利用两个重要极限求极限的方法[③].

8. 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的比较方法,会用等价无穷小量求极限.

9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

考查要点详解

第一节 函数

一、函数的定义

1. **定义 1.1.1** 设 X,Y 是两个非空实数集，如果对于 X 中的任意一个数 x，按照对应法则 f，在 Y 中存在唯一的数 y，则称 f 为数集 X 到数集 Y 的函数，记作 $f:X\to Y$. 数 x 对应的数 y 称为 f 的函数值，记作 $y=f(x)$. 数集 X 称为函数的定义域（或记作 $D(f)$），函数值 y 的集合称为 f 的值域，记作 $R(f)$，即 $R(f)=\{y|y=f(x)且x\in D(f)\}$. 注意：$R(f)\subseteq Y$.

2. 函数定义的两个要素：定义域、对应法则.

函数的定义域主要掌握五种基本类型：

$$\frac{1}{y},y\neq 0;\quad \sqrt{y},y\geqslant 0;\quad \log_a y,y>0;\quad \arcsin y,|y|\leqslant 1;\quad \arccos y,|y|\leqslant 1.$$

【例 1.1.1】 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}+\arcsin\dfrac{x-1}{3}$ 的定义域.

【解】 由题设 $\begin{cases}\sqrt{x^2-2x-3}\neq 0,\\ x^2-2x-3\geqslant 0,\\ \left|\dfrac{x-1}{3}\right|\leqslant 1,\end{cases}$ 解联立不等式 $\begin{cases}(x+1)(x-3)>0,\\ |x-1|\leqslant 3\end{cases}$ 得函数的定义域为 $[-2,-1)\cup(3,4]$.

评注

这是函数部分最基本的题型，此题中含有定义域的三种类型.

【例 1.1.2】 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln|x-1|}$ 的定义域.

【解】 由题设 $\begin{cases}\ln|x-1|\neq 0\\ |x-1|>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x-1|\neq 1,\\ x-1\neq 0,\end{cases}$ 得函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

评注

此题中含有定义域的两种类型.

【例 1.1.3】 设 $f\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)=2x-1(x\neq 2)$，当 $x\neq 1$ 时，求 $f\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$.

【解】 令 $\dfrac{x+1}{x-2}=t$，则 $x=\dfrac{1+2t}{t-1}$，所以 $f(t)=\dfrac{3+3t}{t-1}$，$f\left(\dfrac{1}{x-1}\right)=\dfrac{3x}{2-x}(x\neq 1,x\neq 2)$.

评注

$y=f(x)$ 或 $u=f(v)$ 都表示函数 f，这说明函数用什么变量表示都可以，这也可以称为函数的变量无关性.

【例 1.1.4】 设 $2f(x)+3f(1-x)=x^2+1$，求 $f(x)$.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

【解】 由题设$\begin{cases}2f(x)+3f(1-x)=x^2+1,\\2f(1-x)+3f(x)=(1-x)^2+1,\end{cases}$消去 $f(1-x)$即可得到 $f(x)=\frac{1}{5}(x^2-6x+4)$.

> **评 注**
>
> 此题利用了函数的变量无关性.

二、函数的性质

1.奇偶性

定义 1.1.2 设函数 f 的定义域 $D(f)$ 关于原点对称，$\forall x\in D(f)$，若 $f(-x)=-f(x)$，则称 f 为奇函数；若 $f(-x)=f(x)$，则称 f 为偶函数.

【例 1.1.5】 判断函数 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})(a>0,a\neq1)$的奇偶性.

【解】 显然，函数 $f(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，且 $f(x)+f(-x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})+\log_a(-x+\sqrt{x^2+1})=\log_a 1=0$，所以 $f(x)$为奇函数.

> **评 注**
>
> 考生应当熟记一些特殊的奇函数.除此题的形式之外，还有 $\ln\frac{1-x}{1+x}$和$\frac{a^x-1}{a^x+1}$.

2.单调性

定义 1.1.3 设函数 f 的定义域为区间 I，$\forall x_1,x_2\in I$，$x_1<x_2$，若 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$(或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$)，则称 f 为单调增加(或减少)函数.

注意：若不等号$\leqslant$(或$\geqslant$)改为$<$(或$>$)，则称 f 为严格单调增加(或减少)函数.

【例 1.1.6】 证明函数 $f(x)=\arctan x$ 在$(-\infty,+\infty)$内单调增加.

【证明】 当 $x_1<0$，$x_2>0$ 时，显然 $f(x_2)>f(x_1)$；当 x_1,x_2 同号且 $x_1<x_2$ 时，由于 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$，所以 $\arctan x_2-\arctan x_1=\arctan\frac{x_2-x_1}{1+x_1\cdot x_2}>0$，故函数单调增加.

> **评 注**
>
> 在本书第二章引入导数概念后，考生可以用导数来讨论函数的单调性，可使问题更为简单.

3.周期性

定义 1.1.4 设函数 f 的定义域为区间 I，若存在非零实数 $T\in\mathbf{R}$，使得 $x+T\in I$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 f 为周期函数，T 为函数 f 的周期.

注意：一般情况下，把最小正周期(如果存在的话)简称为函数的周期.

例如：$y=\sin x$，$\cos x$ 的周期是 2π，$y=\tan x$，$\cot x$ 的周期是 π.而周期函数不一定有最小正周期，如常数函数 $y=c$.

【例 1.1.7】 设$\forall x\in\mathbf{R}$，有 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$.证明：$f(x)$是周期函数.

【证明】 由于 $f(x)-f^2(x)=\frac{1}{4}-\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]^2$，所以 $\left[f(x+1)-\frac{1}{2}\right]^2=f\left(x+\frac{1}{2}\right)-f^2\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\left[f\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right]^2=\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]^2$，又由题设知 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}$，所以 $f(x+1)=$

$f(x)$，即函数 $f(x)$ 是周期函数且周期为 1.

评 注

在不清楚函数的周期是多少时，需要考生进行不断尝试.

4. 有界性

定义 1.1.5 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D(f)$，如果存在 $M>0$，使得 $\forall x\in D(f)$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 有界.

如果存在 M，使得 $\forall x\in D(f)$，有 $f(x)\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 有上界；如果存在 m，使得 $\forall x\in D(f)$，有 $f(x)\geqslant m$，则称函数 $f(x)$ 有下界.

函数 $f(x)$ 有界的充要条件是函数 $f(x)$ 既有上界又有下界.

评 注

函数的有界性很重要，是函数性质中的难点. 本书第一章的极限和函数连续性中都将介绍相关函数的有界性.

常见的有界函数：$|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，$|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$.

函数无界的定义：$\forall M>0$，$\exists x_0\in D(f)$，使得 $|f(x_0)|>M$.

【例 1.1.8】 证明函数 $f(x)=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.

【证明】 $\forall M>0$，取 $x_0=2[M]\pi$，其中 $[M]$ 表示取 M 的整数部分，则 $f(x_0)=2[M]\pi\cos(2[M]\pi)=2[M]\pi>M$，所以函数无界.

三、复合函数与反函数

1. 复合函数

定义 1.1.6 设函数 $y=f(u)$，$u\in U$，$u=g(x)$，$x\in X$. 如果当 x 在 $X^*\subseteq X$ 中取值时，相应的 u 值在 U 中，那么称 y 为 x 的复合函数，记作 $f\circ g$，即 $f\circ g(x)=f[g(x)]$.

评 注

复合函数在函数内容中很重要，也是一个难点，需要考生重点掌握.

【例 1.1.9】 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-1,1]$，求 $f(x+a)+f(x-a)\ (a>0)$ 的定义域.

【解】 函数 $f(x+a)$ 的定义域是 $[-1-a,1-a]$，函数 $f(x-a)$ 的定义域是 $[-1+a,1+a]$.

当 $0<a<1$ 时，所求的定义域是 $[-1+a,1-a]$；当 $a>1$ 时，所求的定义域是空集；当 $a=1$ 时，定义域为 $\{0\}$.

2. 反函数

定义 1.1.7 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D(f)$，值域为 $R(f)$. 如果对于每一个 $y\in R(f)$，存在唯一的 $x\in D(f)$ 使得 $f(x)=y$，则得到一个函数 $x=f^{-1}(y)$，称 f^{-1} 为函数 f 的反函数，记作 f^{-1}.

注意：反函数的定义域、值域分别是原函数的值域、定义域.

反函数常用 $y=f^{-1}(x)$ 表示，此时反函数的图形与原函数的图形关于直线 $y=x$ 对称.

【例 1.1.10】 求函数 $f(x)=\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2+1}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2+1}}$ 的反函数.

【解】 记 $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2+1}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2+1}}$，则 $y^3=2x+3(-1)\cdot\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2+1}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2+1}}\right)=2x-3y$，所以反函数为 $x=\dfrac{1}{2}(y^3+3y)$ 或 $y=\dfrac{1}{2}(x^3+3x)$.

评 注

反函数的自变量不一定要用 x 表示.

四、初等函数与分段函数

1. 基本初等函数

(1) 常数函数

$y=c, x\in\mathbf{R}$.

(2) 幂函数

$y=x^{\alpha}$, α 为非零常数. 所有幂函数的图形都经过点 $(1,1)$.

当 α 为正整数时, 定义域为 $\mathbf{R}$; 当 α 为负整数时, 定义域为非零实数.

(3) 指数函数

$y=a^{x}, x\in\mathbf{R}$(其中 $a>0$ 且 $a\neq1$), 经过点 $(0,1)$.

(4) 对数函数

$y=\log_{a}x, x>0$(其中 $a>0$ 且 $a\neq1$), 经过点 $(1,0)$.

(5) 三角函数

$y=\sin x$; $y=\cos x$; $y=\tan x$; $y=\cot x$; $y=\sec x$; $y=\csc x$.

(6) 反三角函数

$y=\arcsin x$; $y=\arccos x$; $y=\arctan x$; $y=\operatorname{arccot} x$.

评 注

掌握基本初等函数的定义域、性质及其图形非常重要.

2. 初等函数

初等函数是由常数和基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合后能用一个公式表示的函数.

3. 分段函数

用两个或两个以上公式表示的函数称为分段函数, 分段函数一般来说不是初等函数, 但也有例外, 例如 $|x|=\sqrt{x^2}$, 前者表示分段函数而后者为初等函数.

在考研数学中, 初等函数通常有相应的公式, 而分段函数一般需要根据定义加以讨论.

【例 1.1.11】 设函数 $f(x)=\begin{cases}2x, & x\leqslant0\\ 0, & x>0\end{cases}$, $\varphi(x)=x^2-1$, 求 $f[\varphi(x)]$.

【解】 $f[\varphi(x)]=\begin{cases}2\varphi(x), & \varphi(x)\leqslant0\\ 0, & \varphi(x)>0\end{cases}=\begin{cases}2(x^2-1), & |x|\leqslant1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

【例 1.1.12】 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{x}, & x>1,\\ 2x, & x\leqslant1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}\sin x, & x>0,\\ x^2, & x\leqslant0,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

【解】 当 $x<-1$ 时, $g(x)=x^2>1$; 当 $x\geqslant-1$ 时, $g(x)\leqslant1$, 所以 $f[g(x)]=\begin{cases}2^{x^2}, & x<-1,\\ 2x^2, & -1\leqslant x\leqslant0,\\ 2\sin x, & x>0.\end{cases}$

评 注

两个分别包含两段的分段函数复合后, 不一定是四段的分段函数.

第二节 极限

一、极限的定义

1. 数列极限的定义

定义 1.2.1 已知数列$\{x_n\}$及数 a,如果对于任意给定的正数 ε,存在正整数 N,使得对于一切满足 $n>N$ 的 x_n,有$|x_n-a|<\varepsilon$,则称数 a 为数列$\{x_n\}$当 n 趋于无穷大时的极限,记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 数列极限的定义又称为"$\varepsilon-N$"定义,可简记为:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a:\quad \forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n:n>N\Rightarrow|x_n-a|<\varepsilon.$$

评 注

由于 n 为自然数,必为正数,所以 $n\to+\infty$ 有时简化为 $n\to\infty$.

用极限的定义来证明极限存在难度比较大,在考研真题中从未出现过. 数学一、二的考生对极限的定义进行一般了解即可. 极限的定义对数学三的考生基本不作考试要求.

2. 函数极限的定义

定义 1.2.2 设函数 $f(x)$在$|x|$大于某一正数时有定义,A 为实数,如果对于任意给定的正数 ε,总存在正数 X,使得对于一切满足$|x|>X$ 的 $f(x)$,有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称数 A 为函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限,记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$. 这称为函数极限的"$\varepsilon-X$"定义,可简记为:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A:\quad \forall\varepsilon>0,\exists X,\forall x:|x|>X\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$$

定义 1.2.3 设函数 $f(x)$在点 x_0 的一个去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$内有定义,A 为实数,如果对于任意给定的正数 ε,总存在正数 δ,使得对于一切满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 $f(x)$,有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称数 A 为函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限,记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 这称为函数极限的"$\varepsilon-\delta$"定义,可简记为:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A:\quad \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x:0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$$

注意:点 x_0 的一个去心 δ 邻域表示为 $\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$,而点 x_0 的一个去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$表示不考虑邻域的半径.

二、单侧极限与左右极限

1. 单侧极限

函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限可分别定义为单侧极限,即 $x\to+\infty$时的极限和 $x\to-\infty$时的极限.

定义 1.2.4 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A:\forall\varepsilon>0,\exists X,\forall x:x>X\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$.

定义 1.2.5 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A:\forall\varepsilon>0,\exists X,\forall x:x<-X\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$.

定理 1.2.1 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

2. 左右极限

函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限可分别定义为左、右极限,即 $x\to x_0^-$ 时的极限和 $x\to x_0^+$ 时的极限.

定义 1.2.6 右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A:\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x:x_0<x<x_0+\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$. 右

极限也可记作 $f(x_0^+)$ 或 $f(x_0+0)$.

定义 1.2.7　左极限　$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x:x_0-\delta<x<x_0\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon$. 左极限也可记作 $f(x_0^-)$ 或 $f(x_0-0)$.

定理 1.2.2　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$.

评注

通常对于两种基本类型的函数(分段函数和带有绝对值的函数),考生要能想到需要考虑单侧极限与左右极限. 而对于两种特殊类型的函数$\left(a^{\infty},\arctan\infty\text{或 } a^{\frac{1}{0}},\arctan\dfrac{1}{0}\right)$,此处 $\dfrac{1}{0}$ 表示 $\dfrac{1}{x}$, $x\to0$,考生往往会因忽略造成错误,一定要特别注意.

【例 1.2.1】　函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+2^x}$ 当 $x\to\infty$ 时极限是否存在.

【解】　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+2^x}=0$,而 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+2^x}=1$,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+2^x}$ 不存在.

注意:$2^{+\infty}=+\infty,2^{-\infty}=0$.

常见错误:误认为 $2^{\infty}=\infty$.

【例 1.2.2】　求下列函数在指定点的左右极限,并判断函数在该点极限是否存在.

(1) $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\leqslant2,\\ \dfrac{1}{x-2}, & x>2,\end{cases}\ x_0=2$;

(2) $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x-1},x_0=1$;

(3) $f(x)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}},x_0=1$.

【解】　(1) $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=4,\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\infty$,所以函数在 $x_0=2$ 处极限不存在.

(2) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\dfrac{\pi}{2},\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\dfrac{\pi}{2}$,所以函数在 $x_0=1$ 处极限不存在.

(3) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=1,\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-1$,所以函数在 $x_0=1$ 处极限不存在.

评注

函数极限必须区分正负无穷大的两种常见形式及其变化形式:

当 $a>1$ 时,$a^{+\infty}=+\infty,a^{-\infty}=0,\lim\limits_{x\to0^+} a^{\frac{1}{x}}=+\infty,\lim\limits_{x\to0^-} a^{\frac{1}{x}}=0$.

$\arctan(+\infty)=\dfrac{\pi}{2},\arctan(-\infty)=-\dfrac{\pi}{2},\ \arctan\dfrac{1}{0^+}=\dfrac{\pi}{2},\ \arctan\dfrac{1}{0^-}=-\dfrac{\pi}{2}$.

三、极限的性质及四则运算法则

1. 极限的性质

定理 1.2.3 (唯一性) 如果数列或函数的极限存在,则极限值唯一.

定理 1.2.4 (数列的有界性) 如果数列的极限存在,则数列有界.

定理 1.2.5 (函数的局部有界性)

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则$\exists M>0$，$\exists\delta>0$，当$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时，$|f(x)|\leqslant M$.

若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，则$\exists M>0$，$\exists X>0$，当$|x|>X$时，$|f(x)|\leqslant M$.

定理 1.2.6 (数列的保号性)

若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$且$A>0(A<0)$，则$\exists N$，当$n>N$时，$x_n>0(<0)$.

定理 1.2.7 (函数的局部保号性)

左.右.局部保号

(1)若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$且$A>0$(或$A<0$)，则$\exists\delta>0$，当$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时，$f(x)>0$(或$f(x)<0$).

(2)若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$且$A>0$(或$A<0$)，则$\exists X>0$，当$|x|>X$时，$f(x)>0$(或$f(x)<0$).

评注

极限的性质都可以用极限的定义加以证明. 数学一、二的考生可自行尝试证明，数学三的考生不需要掌握证明.

【例 1.2.3】 设$f(x)$在$x=0$处连续，且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$，则(　　).

(A)$\exists U(0,\delta)$，使得$\forall x\in U(0,\delta)$，有$f(x)>0$.　　(B)$f(0)<0$.

(C)$\exists\mathring{U}(0,\delta)$，使得$\forall x\in\mathring{U}(0,\delta)$，有$f(x)>0$.　　(D)$f(0)>0$.

【答案】 (C).

评注

保号性是极限性质中的难点，考生需注意局部保号性，此题选(C).

注意：函数连续时，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1\Rightarrow f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot x=0$.

2. 极限运算法则

(1)定理 1.2.8 (四则运算) 设$\lim u=A$，$\lim v=B$，则

$$\lim(u\pm v)=A\pm B,\ \lim(u\cdot v)=A\cdot B,\ \lim\frac{u}{v}=\frac{A}{B}(B\neq0).$$

【例 1.2.4】 求极限$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+x-2}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+3)-4}{(x-1)(x+2)(\sqrt{x+3}+2)}=\dfrac{1}{12}$.

评注

遇到"$\dfrac{0}{0}$"型的未定式极限时，先消去零因子，再应用极限的四则运算法则.

【例 1.2.5】 设极限$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+2x-3}=-2$，求常数$a,b$的值.

分析：分母极限为零时，如果分式的极限存在，则分子的极限必定为零，即：如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c$(存在)且$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)=0$. 本题中$\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$或$1+a+b=0$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com