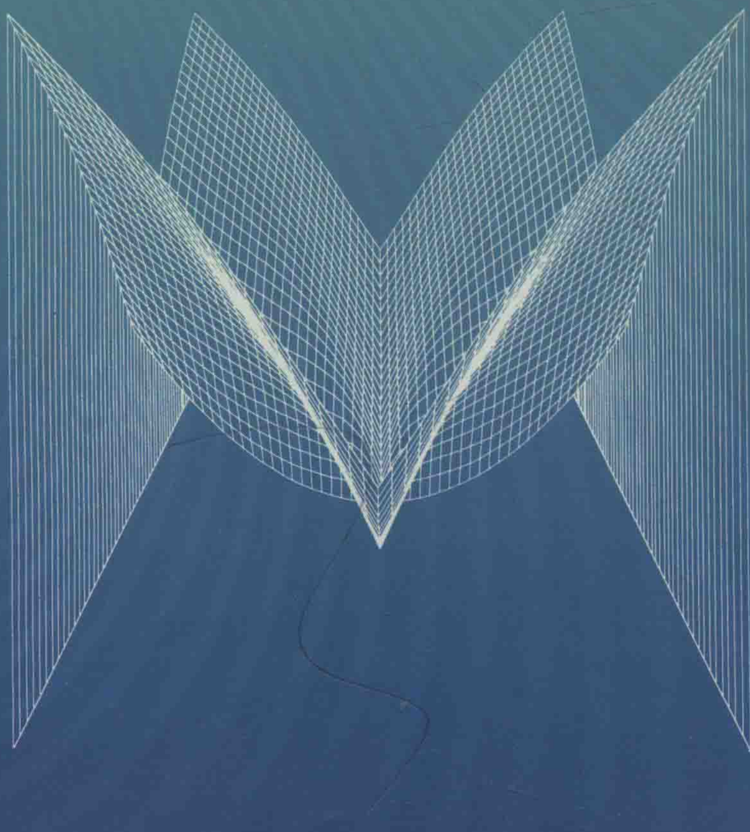
高等职业教育新形态一体化教材

高等应用数学

（第二版）下册

主编 郭建萍 贾进涛



高等教育出版社

资源索引表

高等职业教育新形态

高等应用数学

Gaodeng Yingyong Shuxue

（第二版）下册

主编　郭建萍　贾进涛

高等教育出版社·北京

内容简介

本书是根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，在认真总结高职高专院校数学教学改革经验的基础上，结合并参考国内同类教材的发展趋势编写而成的。

全书分上下两册，上册内容包括函数的极限与连续、导数与微分、导数的应用、一元函数积分学、定积分的应用、向量代数与空间解析几何简介、多元函数微分学、多元函数积分学基础；下册内容包括常微分方程、无穷级数初步、概率论与数理统计初步、线性代数初步、数学实验。上册书后附有初等数学中的常用公式、几种常用的曲线（$a>0$）、积分表；下册书后附有泊松分布表、标准正态分布表、χ^2 分布表、t 分布表、F 分布表、概率论与数理统计基础预备知识、极坐标。

书中的部分知识点配有讲解视频，读者可通过扫书中二维码及时获取。

本书内容叙述通俗易懂，便于自学，可作为高等专科教育、高等职业教育、成人教育工科类各专业教材，也可作为工程技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等应用数学．下册／郭建萍，贾进涛主编．－－2版．－－北京：高等教育出版社，2017.1

ISBN 978－7－04－046964－6

Ⅰ．①高… Ⅱ．①郭… ②贾… Ⅲ．①应用数学－高等职业教育－教材 Ⅳ．①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 286997 号

策划编辑	崔梅萍	责任编辑	崔梅萍	封面设计	张　楠	版式设计	马敬茹
插图绘制	尹文军	责任校对	刘　莉	责任印制	赵义民		

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　　刷	北京市鑫霸印务有限公司		http://www.hepmall.com
开　　本	787mm×1092mm　1/16		http://www.hepmall.cn
印　　张	16.25	版　　次	2012 年 9 月第 1 版
字　　数	390 千字		2017 年 1 月第 2 版
购书热线	010－58581118	印　　次	2017 年 1 月第 1 次印刷
咨询电话	400－810－0598	定　　价	29.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　46964－00

前言

本书是为了适应我国高等职业教育快速发展的要求和培养高技能人才的需要，根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，在认真总结近年来高职高专数学教学改革经验的基础上，结合并参考国内同类教材的发展趋势编写而成的。

本书具有以下特点：

1. 采用"纸质教材+数字课程资源"的形式出版。纸质教材与丰富的数字教学资源一体化设计，方便学生学习和使用。数字课程资源对纸质内容起到巩固、补充和拓展作用，形成以纸质教材为核心，数字教学资源配合的综合知识体系。

2. 本书力求依据"以应用为目的，以必需够用为度"的原则，在保证数学体系基本完整的前提下，注重讲清概念，减少数理论证，注重培养学生的基本运算能力、分析能力和解决实际问题的能力，注重理论联系实际。

3. 书中渗透了简单的数学模型和数学实验，培养应用意识，为学生专业课的学习奠定了坚实的基础。

4. 本书每节后配有习题，每章后配有复习题，书末附有习题参考答案等，学生在课后可以比较高效地对该章知识进行复习、巩固和提高。

本书分上、下两册。上册内容有：函数的极限与连续、导数与微分、导数的应用、一元函数积分学、定积分的应用、向量代数与空间解析几何简介、多元函数微分学、多元函数积分学基础。下册内容有：常微分方程、无穷级数初步、概率论与数理统计初步、线性代数初步、数学实验。对于书中标有 * 号的内容可根据专业需要选取。

本书第一章、第七章由贾进涛编写；第二章、第三章由陶华编写；第四章、第六章由杜玉贞编写；第五章、第八章由郭建萍编写；第九章、第十章由王德才编写；第十一章、第十二章由任丽萍编写；第十三章、第十四章由封心拥编写；第十五章由郭健编写。

由于编者水平有限，书中的错误与不当之处在所难免，恳请读者和同行批评指正。

编者

2016 年 6 月

目 录

第三篇 常微分方程

第四篇 无穷级数初步

第五篇　概率论与数理统计初步

第六篇 线性代数初步

第七篇 数学实验

第三篇

常微分方程

第九章　常微分方程

从学习代数开始，我们就接触过了代数方程与方程组. 后来，在解析几何、微积分等课程中，又学习过函数方程. 所谓**微分方程**，就是含有一个或几个自变量、未知函数以及未知函数的导数（或微分）的方程. 只含有一个自变量的微分方程，称为**常微分方程**. 自变量多于一个的微分方程，称为**偏微分方程**. 本书只讨论一些常微分方程及其解法.

微分方程是与微积分同时产生的. 许多实际问题的解决，促进人们对微分方程的研究，而微分方程的研究又促进实际问题的解决，同时也促进了其他学科的发展. 比如，根据探照灯把点光源发出的光反射成平行光束的要求，列出微分方程，求出它的“解”，从而确定出反射镜面所应有的形状；又如，在天文学上，一般的天体都是观察得到的，而海王星的发现，却是一个罕见的特例. 勒威耶①根据微分方程的研究结果，预见到有个行星存在，还算出了它在天空中的位置，进而按照他所算出的结果找到了海王星. 在近代，微分方程不仅在物理、力学、工程等方面继续发挥作用，还渗透进了生物学、生态学、经济学、医学等各学科，因而它还是比较活跃的数学分支.

第一节　常微分方程的基本概念

微分方程的定义

一、实例

先从实例出发，来说明微分方程的基本概念.

例 1　已知曲线上任一点的切线的斜率等于该点的纵坐标的倒数，且曲线通过(0,1)，求此曲线的方程.

解　设曲线方程为 $y=f(x)$，根据导数的几何意义知，曲线上任一点处的切线斜率就是函数 $y=f(x)$ 在该点的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 由题意有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{y},$$

为了求出 $y(x)$，将上式改写成

$$y\mathrm{d}y=\mathrm{d}x,$$

两边积分，得

① 勒威耶（Leverrier，1811—1877）：法国天文学家.

$$\frac{1}{2}y^2 = x + C_1,$$

其中 C_1 为任意常数. 令 $C = 2C_1$,有

$$y^2 = 2x + C.$$

由于曲线过点(0,1),即当 $x = 0$ 时,$y = 1$,代入上式得

$$1^2 = 2 \times 0 + C, \quad 从而\ C = 1,$$

于是所求曲线方程为 $y^2 = 2x + 1$.

例 2　以初速度 v_0 垂直下抛一物体,设该物体运动只受重力影响,试求物体下落距离 s 与时间 t 的函数关系.

解　如图 9 - 1 所示,设物体的质量为 m,由于下抛后只受重力作用,故物体所受之力为

$$F = mg.$$

又根据牛顿第二定律 $F = ma$ 及加速度 $a = \frac{d^2 s}{dt^2}$,所以

$$m\frac{d^2 s}{dt^2} = mg,$$

即

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = g.$$

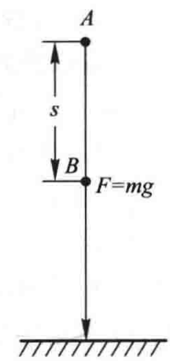


图 9 - 1

两端积分,得

$$\frac{ds}{dt} = gt + C_1,$$

两端再次积分,得

$$s = \frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2,$$

这里 C_1, C_2 都是任意的常数.

由题意知

$$t = 0\ 时, \quad s = 0, \quad v = \frac{ds}{dt} = v_0,$$

把上述结果代入 $\frac{ds}{dt} = gt + C_1$ 及 $s = \frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$ 中,因此得下落距离 s 与时间 t 的函数关系为

$$s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t.$$

当 $v_0 = 0$ 时,物体的运动为自由落体运动.

微分方程的解

二、基本概念

从上面两个例子所得到的 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$,$\frac{d^2 s}{dt^2} = g$ 都是常微分方程. 另外,如 $y' + xy^2 = 0$,$x dy +$

$y\mathrm{d}x=0$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0$ 也都是微分方程.

定义 1　微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数，称为**微分方程的阶**. 二阶及二阶以上的微分方程称为**高阶微分方程**.

例如，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{y}$，$y'+xy^2=0$ 都是一阶微分方程. $\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=g$，$y''+2y'+y=1$ 都是二阶微分方程.

定义 2　若某个函数代入微分方程，能使该方程成为恒等式，则称这个函数为该**微分方程的解**.

例如，$y^2=2x+1$ 与 $y^2=2x+C$ 都是微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{y}$的解.

定义 3　若微分方程的解中含有任意常数的个数与方程的阶数相同，且任意常数是独立的，则称此解为该方程的**通解**或**一般解**.

在通解中给任意常数一确定的值而得到的解称为**特解**.

例如：

$y^2=2x+C$ 是微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{y}$的通解；

$s=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$ 是微分方程$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=g$ 的通解；

$y^2=2x+1$ 与 $y^2=2x+2$ 都是 $y'=\frac{1}{y}$的特解.

为了得到合乎要求的特解，一般在许多实际问题中，在提出微分方程的同时，还给出方程中的未知函数所必须满足的一些条件. 常见的是给出未知函数对应于自变量某个确定值的函数值与导数值，称为微分方程的**初始条件**.

例如，例 1 中给出的当 $x=0$ 时，$y=1$ 即 $y|_{x=0}=1$，就是微分方程的初始条件.

例 3　验证函数 $y=C_1\cos kx+C_2\sin kx$ 是微分方程$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+k^2y=0\quad(k\neq0)$的通解.

解　因为

$$y'=-C_1k\sin kx+C_2k\cos kx,$$
$$y''=-k^2(C_1\cos kx+C_2\sin kx),$$

把 y'，y''代入微分方程左端得

$$-k^2(C_1\cos kx+C_2\sin kx)+k^2(C_1\cos kx+C_2\sin kx)\equiv0.$$

又 $y=C_1\cos kx+C_2\sin kx$ 中有两个独立的任意常数，方程$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+k^2y=0$ 是二阶的，所以 $y=C_1\cos kx+C_2\sin kx$ 是该微分方程的通解.

习题 9－1

1. 指出下列微分方程的阶数：

（1）$y''+3y'+2y=\sin x$；　　（2）$(y')^2+2y=0$；

（3）$y'\cdot y''-x^2y=1$；　　（4）$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}-y=\mathrm{e}^x$；

2. 验证下列各题中的函数(或隐函数)是否为所给微分方程的解,其中 C_1,C_2 均为任意常数.

(1) $xy'=2y,y=5x^2+x$;　　(2) $y''+y=0,y=3\sin x-4\cos x$;

(3) $(x-2y)y'=2x-y,x^2-xy+y^2=0$;　　(4) $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y=0,y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$.

3. 设有一质量为 m 的质点做直线运动,假定有一个和时间成正比例的拉力作用在它的上面,同时质点又受到与速度成正比例的阻力,试求速度随时间变化的微分方程.

第二节　一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式是

$$F(x,y,y')=0.$$

若从此式中解出 y',则上式变为

$$y'=f(x,y).$$

若 $f(x,y)$ 可表示为如下形式

$$f(x,y)=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

则 $y'=f(x,y)$ 又变为

$$P(x,y)\mathrm{d}x-Q(x,y)\mathrm{d}y=0.$$

分离变量法

一、可分离变量的一阶微分方程

若一阶微分方程可以化为形如

$$g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

的形式,则称微分方程为**可分离变量的微分方程**.

对(1)式两端积分,便得 x 和 y 的关系式,即解出了微分方程.

若微分方程的解是隐函数形式的,则称它为微分方程(1)的隐式解;若微分方程解的形式是 $y=y(x)$,则称它为该方程的显式解.

例 1　求解微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{y}$.

解　分离变量得

$$y\mathrm{d}y=x\mathrm{d}x,$$

两端积分得

$$\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{2}x^2+C_1,$$

所以其通解为

$$y^2=x^2+C.$$

例 2　求微分方程 $xy\mathrm{d}y+\mathrm{d}x=y^2\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$ 的通解.

解　分离变量得

$$\frac{y}{y^2-1}\mathrm{d}y=\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x,$$

两端积分得

$$\frac{1}{2}\ln|y^2-1|=\ln|x-1|+C_1,$$

整理得

$$\ln|y^2-1|=\ln(x-1)^2+2C_1,$$

$$|y^2-1|=(x-1)^2\mathrm{e}^{2C_1},$$

即
$$y^2-1=\pm\mathrm{e}^{2C_1}(x-1)^2.$$

因为$\pm\mathrm{e}^{2C_1}$是不为零的任意常数,把它记作 C,便得到方程的通解

$$y^2-1=C(x-1)^2. \tag{2}$$

可以验证 $C=0$ 时,$y=\pm1$,它们也是原方程的解,因此(2)式中的 C 可设为任意常数.

解方程的过程中,如果积分后出现对数,理应作类似上述的讨论.为方便起见,今后凡遇到积分后出现对数时,都做如下简化处理.以例 2 为例叙述如下:

分离变量后得

$$\frac{y\mathrm{d}y}{y^2-1}=\frac{\mathrm{d}x}{x-1},$$

两边积分得
$$\ln(y^2-1)=\ln(x-1)^2+\ln C,$$

故通解为

$$y^2-1=C(x-1)^2,$$

其中 C 为任意常数.

二、齐次微分方程

下面介绍一种可化为可分离变量的一阶微分方程的微分方程.

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3}$$

的微分方程称为**齐次方程**.

引进新的未知函数 u,令 $u=\frac{y}{x}$,则

$$y=ux,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

代入方程(3),得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u),$$

分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

两端分别积分后再用$\frac{y}{x}$代替 u,便得到方程(3)的通解.

例 3　求微分方程 $y^2+x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$的通解.

解　原方程可化为齐次方程的形式,即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{xy-x^2},\quad 即\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}-1}.$$

令 $u=\dfrac{y}{x}$,则方程化为

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u^2}{u-1},$$

分离变量,得

$$\left(1-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

两边积分,得

$$u-\ln u=\ln x+\ln C,$$

或写成

$$u=\ln(Cxu).$$

以 $u=\dfrac{y}{x}$代回,得

$$\frac{y}{x}=\ln(Cy)$$

或

$$Cy=\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}.$$

对于齐次方程,通过变量代换 $y=xu$,把它化为可分离变量的方程,然后分离变量,经积分求得通解.变量代换的方法是解微分方程最常见的方法.这就是说,求解一个不能分离变量的微分方程,常要考虑寻求适当的变量代换(因变量的变量代换或自变量的变量代换)使它化为可分离变量的方程.

一阶线性微分方程

三、一阶线性微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x) \tag{4}$$

的方程称为**一阶线性微分方程**.它对于未知函数 y 及其导数都是一次的,右边是已知函数 $Q(x)$,称为**自由项**.当 $Q(x)\equiv 0$ 时,称方程(4)为**齐次的**;当 $Q(x)\neq 0$ 时,称方程(4)为**非齐次的**.

下面依次讨论一阶线性齐次方程与一阶线性非齐次方程的求解方法.

对于

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0, \tag{5}$$

分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\,\mathrm{d}x,$$

两边积分,得

$$\ln y=-\int P(x)\,\mathrm{d}x+\ln C,$$

所以

$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}. \tag{6}$$

(6)式是方程(5)的通解.

在本章内容中,约定不定积分符号只是表示被积函数的一个原函数,如 $\int P(x)\,\mathrm{d}x$ 是 $P(x)$ 的