21 shiji gaodeng yuanxiao | 21世纪高等院校 **通识教育**规划教材 | tongshi jiaoyu guihua jiaocai

应用工程数学

◎ 于丽妮 朱如红 主编

Applied Engineering Mathematics

中国工信出版集团 人民邮电出版社 POSTS & TELECOM PRESS

21 shiji gaodeng yuanxiao | 21世纪高等院校
通识教育规划教材 | tongshi jiaoyu guihua jiaocai

应用工程数学

◎ 于丽妮 朱如红 主编

Applied Engineering Mathematics

人民邮电出版社

北京

图书在版编目（CIP）数据

应用工程数学 / 于丽妮，朱如红主编. -- 北京 ：
人民邮电出版社，2016.8
21世纪高等院校通识教育规划教材
ISBN 978-7-115-43146-2

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①于… ②朱… Ⅲ. ①工程数学－高
等学校－教材 Ⅳ. ①TB11

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第191196号

内容提要

本书编写的主导思想是：在满足教学基本要求的前提下，降低理论推导的难度，注重解决问题的方法，力图使读者学以致用和学用结合，也为读者将来的学习、工作与发展奠定一定的数学基础。

全书分为上下两篇，共七章。上篇为线性代数部分，内容有行列式与克莱姆法则、矩阵及其计算、矩阵的初等变换与线性方程组、线性方程组解的结构；下篇为概率论与数理统计，内容有随机事件与概率、一维随机变量、数理统计初步。各节均配有一定数量的习题，书末附有参考答案，以供读者学习和查阅之用，为增加读者学习兴趣，本书后面附有一些线性代数以及概率论与数理统计发展简史。

本书既可作为高职高专工程类学生的普适性基础教材，又可作为相关教师的教学参考书。

◆ 主　　编　于丽妮　朱如红
　责任编辑　王　平
　责任印制　焦志炜
◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
　邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　北京隆昌伟业印刷有限公司印刷
◆ 开本：787×1092　1/16
　印张：15.25　　　　　　　2016 年 8 月第 1 版
　字数：374 千字　　　　　 2016 年 8 月北京第 1 次印刷

定价：38.00 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315

前　言

为了适应新世纪我国高等教育迅速发展的形势，满足新时期高等教育人才培养拓宽口径，增强适应性对数学教育的要求，结合多年的教学研究与实践，博采众家之长，编写了本书。本书编写过程中，在遵循本学科系统性与科学性的前提下，尽量做到内容少而精，充分体现素质教育，突出教学思想，贯彻由浅入深、循序渐进、融会贯通的教学原则与直观形象的教学方法，既注重基础概念、基本理论和方法的阐述，又注重学生基本运算能力的训练和分析问题、解决问题能力的培养。

本书由两部分组成，第一部分是线性代数，包括行列式与克莱姆法则、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、线性方程组解的结构 4 章；第二部分是概率论与数理统计，包括随机事件及其概率、一维随机变量，数理统计初步 3 章，各节均配有一定数量的习题，书末附有习题答案。

根据实践教学和实际应用中的特点，本书的内容编写与以往教材有所变化。首先，考虑到工程实际中碰到的具体问题都是求解一个阶数确定的行列式，在教材编写以及教学过程中适当降低行列式计算的教学要求，不必要也不应该把精力放在牵涉到很高计算技巧和大量复杂计算中，而应该让学生掌握由具体到一般、由低阶到高阶的数学思想方法；其次，由于矩阵在实际工程中几乎是无处不在、无处不用的数学工具，它是将实际问题与数学理论联系在一起的桥梁，而学生往往在理论与实际相结合方面有所欠缺，因此我们在教材中适量增加矩阵的教学内容，提高矩阵的教学要求，使学生对矩阵的重要性及应用性有充分的认识，提高学生的数学素养和培养学生应用数学知识分析问题、解决问题的能力。

本书由于丽妮老师策划、组织编写，并负责统稿、定稿。全书由于丽妮老师和朱如红老师任主编，第 1、2、3、4 章由于丽妮老师执笔，第 5、6、7 章由朱如红老师执笔。

为了提高编写质量，在本书的编写过程中，编者查阅和借鉴了大量的优秀数学教材和数学文献。本书虽经多次讨论，反复修正，但限于编者水平，加之教学改革中的一些问题有待进一步探索，书中缺点和疏漏之处在所难免，恳请使用本书的老师和同学批评指正。

希望读者在学完本书后能有所收获，如能激发读者对相关知识的兴趣，增强学习信心，提高科学素养，这便是我们的初衷。

编　者

2016 年 6 月

上篇　线性代数

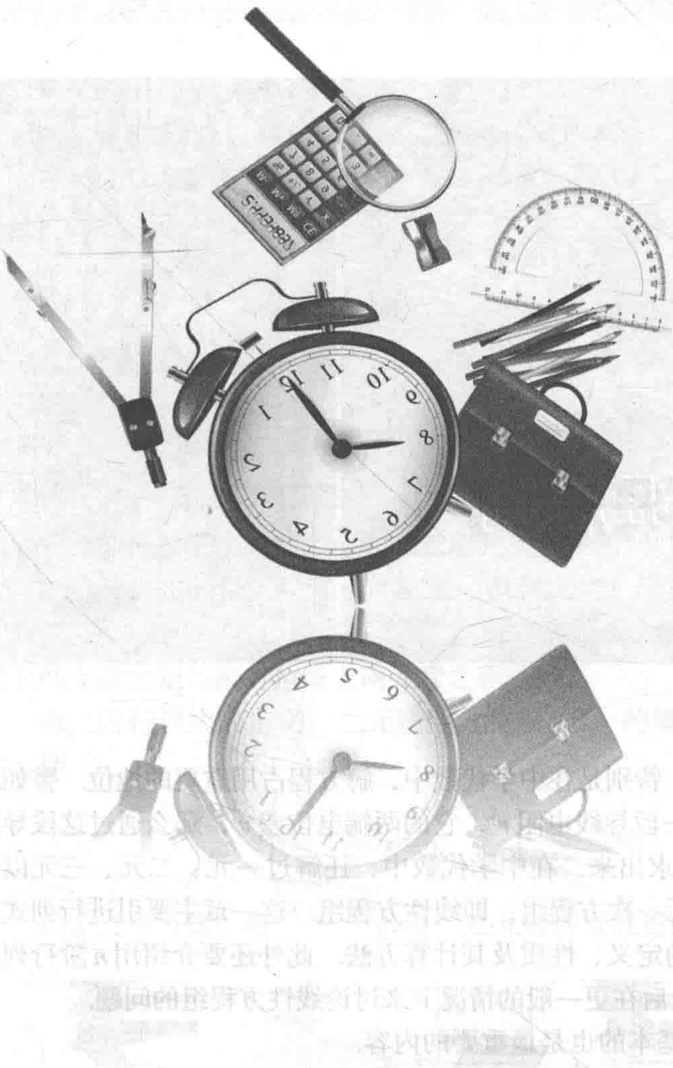
目　录

下篇　概率论与数理统计

目　录

上篇

线性代数



上篇

线性代数

第 1 章

行列式与克莱姆法则

解方程是代数中一个基本的问题，特别是在中学代数中，解方程占用重要的地位. 譬如最熟悉的一元一次方程问题，如果知道一段导线电阻 r ，它的两端电位差 v ，那么通过这段导线的电流强度 i ，就可以由关系式 $ir = v$ 求出来. 在中学代数中，还解过一元、二元、三元以至四元一次方程组. 主要讨论一般的多元一次方程组，即**线性方程组**. 这一章主要引进行列式来解线性方程组，主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法. 此外还要介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆法则. 之后在更一般的情况下来讨论线性方程组的问题.

线性方程组的理论在数学中是最基本的也是最重要的内容.

1.1 二阶及三阶行列式

1.1.1 二元线性方程组与二阶行列式

在中学代数中学过，对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1}$$

为消去未知数 x_2 ，以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘上述两方程的两端，然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

同理，消去未知数 x_1 ，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ，则

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\quad x_1 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{2}$$

可以看出，（2）中的分子、分母都是 4 个数分两对相乘再相减而得. 其中 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

由方程组的（1）的 4 个系数确定.

为了便于记忆这个公式，引入二阶行列式的概念.

定义 1　由 4 个数 a_{11}，a_{22}，a_{12}，a_{21} 排成二行二列（横排称行，竖排称列）的数表并以两条竖线括之

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

称为**二阶行列式**，其值表示为 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

其中数 $a_{ij}\,(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式的**元素**（**或称为元**），每个元素下标的第 1 个数字表示元素所在的行，下标的第 2 个数字表示元素所在的列.

二阶行列式的定义，可用对角线法则来记忆. 从左上角 a_{11} 到右下角 a_{22} 这条对角线称为**主对角线**，从右上角 a_{12} 到左下角 a_{21} 这条对角线称为**副对角线**，那么二阶行列式就是主对角线上两元素之积与副对角线上两元素之积的差.

由二阶行列式的定义，二元线性方程组（1）的解（2）中的 x_1，x_2 也可以写成二阶行列式，即

$$b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\qquad b_2a_{11}-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

由定义 1 可知，若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$，二元线性方程组的解可表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

若记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$，则有

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

可以看出，二元线性方程组的解的分母 D 均为原方程组的系数所确定的二阶行列式（即系数行列式），x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1、b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}、a_{21} 所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1、b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}、a_{22} 所得的二阶行列式.

例 1　求解线性方程组

$$\begin{cases} 6x_1-4x_2=10, \\ 5x_1+7x_2=29. \end{cases}$$

解　由于

$$D=\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}=6\times 7-(-4)\times 5=62\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}10 & -4\\ 29 & 7\end{vmatrix}=10\times 7-(-4)\times 29=186,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}6 & 10\\ 5 & 29\end{vmatrix}=6\times 29-5\times 10=124,$$

因此

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{186}{62}=3,\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{124}{62}=2.$$

1.1.2 三元线性方程组与三阶行列式

对于三元线性方程组也有相似的讨论. 设方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}$$

由消元法解得

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1\\ &=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3,\\ &(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_2\\ &=a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31},\\ &(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_3\\ &=a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}.\end{aligned}$$

若 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$，则

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}},$$

$$x_2=\frac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}},$$

$$x_3=\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}.$$

定义 2 设九个数排成三行三列的数表

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

称为三阶行列式，其值表示为

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

由定义 2 可以看出，三阶行列式等式右端含有 6 项，而每一项乘积都是由行列式中位于不同的行和不同的列的元素构成再冠以正负号，如图 1.1 所示的对角线法则：图中三条实线看做是与主对角线平行的联线，实线上三元素的乘积冠以正号，三条虚线看做是与副对角线

平行的联线，虚线上三元素的乘积冠以负号.

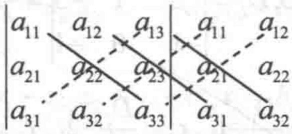


图 1.1

若三元线性方程组的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$，

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

则三元线性方程组的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 2 计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则，有

$$\begin{aligned} D &= 1\times(-1)\times 2+2\times 4\times 5+3\times 1\times 1 \\ &\quad -1\times 4\times 1-2\times 1\times 2-3\times(-1)\times 5 \\ &= -2+40+3-4-4+15=48. \end{aligned}$$

例 3 求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=0$.

解 按对角线法则，方程左端

$$\begin{aligned} D &= 3x^2+4x+18-9x-2x^2-12 \\ &= x^2-5x+6, \end{aligned}$$

由 $x^2-5x+6=0$，解得

$$x=2\ 或\ x=3.$$

例 4 解线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2, \\ 2x_1+x_2-3x_3=1, \\ -x_1+\ x_2-x_3=0. \end{cases}$

解 因为方程组的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5\neq 0$，

$$D_1=\begin{vmatrix}-2&-2&1\\1&1&-3\\0&1&-1\end{vmatrix}=-5, D_2=\begin{vmatrix}1&-2&1\\2&1&-3\\-1&0&-1\end{vmatrix}=-10, D_3=\begin{vmatrix}1&-2&-2\\2&1&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=-5,$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\ x_2=\frac{D_2}{D}=2,\ x_3=\frac{D_3}{D}=1.$$

习题 1.1

1. 计算下列行列式并对比观察其特征.

（1）$\begin{vmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{vmatrix}$；（2）$\begin{vmatrix}0&0&7\\0&2&0\\5&0&0\end{vmatrix}$；

（3）$\begin{vmatrix}0&0&0\\7&9&4\\7&9&6\end{vmatrix}$；（4）$\begin{vmatrix}2&3&4\\5&-2&1\\1&2&3\end{vmatrix}$；

（5）$\begin{vmatrix}3&0&8\\1&3&4\\5&0&6\end{vmatrix}$；（6）$\begin{vmatrix}3&-6&2\\2&3&6\\-6&-2&3\end{vmatrix}$；

（7）$\begin{vmatrix}1&-1&3\\2&1&-1\\0&-4&8\end{vmatrix}$；（8）$\begin{vmatrix}3&2&1\\-1&1&2\\2&0&-5\end{vmatrix}$；

（9）$\begin{vmatrix}1&3&2\\2&1&3\\3&2&1\end{vmatrix}$；（10）$\begin{vmatrix}1&3&8\\1&1&9\\1&4&5\end{vmatrix}$.

2. 利用行列式求解下列方程组.

（1）$\begin{cases}x_1+2x_2=1\\3x_1+8x_2=2\end{cases}$；（2）$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=-1\\2x_1-2x_2+3x_3=2\\3x_1-x_2+2x_3=3\end{cases}$；

（3）$\begin{cases}2x_1+5x_2=1\\3x_1+7x_2=2\end{cases}$；（4）$\begin{cases}x+y+z=1\\2x-y-z=1\\x-y+z=2\end{cases}$；

（5）$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=-3\\5x_1-2x_2+7x_3=22\\2x_1-5x_2+4x_3=4\end{cases}$；（6）$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=0\\2x_1-x_2+x_3=1\\x_1-x_2+2x_3=3\end{cases}$.

1.2 *n* 阶行列式的定义

在这一章要把这个结果推广到 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

的情形．因此，要给出 n 阶行列式的定义并讨论它们的性质．

1.2.1　排列及其逆序数

为了定义 n 阶行列式，简单介绍一下排列的定义．

定义 3　由 1,2,3，…，n 组成的一个有序数组称为一个 **n 级排列**．

例如，35421 是一个 5 级排列，641235 是一个 6 级排列．对于一个 n 级排列来说，排列的总数是 $n!$．

很显然 $123\cdots n$ 也是一个 n 级排列，这个排列具有自然顺序，是按照递增的顺序排起来的，其他的排列都或多或少地破坏自然顺序．

定义 4　在一个排列 $j_1j_2\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n$ 中，若数 $j_t>j_s$，则称这两个数组成一个**逆序**．一个排列中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**．排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$．

例如，排列 2431 中，21,43,41,31 是逆序，2431 的逆序数就是 4.而 45321 的逆序数是 9.

定义 5　逆序数为偶数的排列称为**偶排列**；逆序数为奇数的排列称为**奇排列**．

例如，2431 是偶排列，45321 是奇排列，$123\cdots n$ 的逆序数是零，因此是偶排列．

把一个排列中某两个数的位置互换，而其余的数不动，就得到另一个排列．这样一个变换称为一个**对换**．例如，经过 1,2 对换，排列 2431 就变成了 1432，排列 2134 变成了 1234.很显然，如果连续施行两次相同的变换，那么排列还原．经过一次变换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列．

定理 1　对换改变排列的奇偶性．

定理 2　任意一个 n 级排列与排列 $123\cdots n$ 都可以经过一系列对换互变，并且所作对换的个数与这个排列有相同的奇偶性．

例 5　求排列 32514 的逆序数．

解　在排列 32514 中：

3 排在首位，逆序数为 0；

2 的前面比 2 大的数有一个 3，故逆序数为 1；

5 是最大数，逆序数为 0；

1 的前面比 1 大的数有 3、2、5 共三个，故逆序数为 3；

4 的前面比 4 大的数有一个 5，故逆序数为 1；

所以这个排列的逆序数为

$$\tau(32514)=0+1+0+3+1=5.$$

1.2.2　n 阶行列式的概念

由二阶和三阶行列式定义可以看出：二阶与三阶行列式右边的展开式的个数分别为 2! 和 3!，它们都是一些乘积的代数和，而每一项乘积都是由行列式中位于不同的行和不同的列的

元素构成的，而带“+”号和带“−”号项的个数各占一半. 以三阶行列式为例，展开式每一项都可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，其中 $j_1j_2j_3$ 是 1,2,3 的一个排列. 可以看出，当 $j_1j_2j_3$ 是偶排列时，对应的项带有正号，当 $j_1j_2j_3$ 是奇排列时，对应的项带有负号. 二阶行列式也是如此.

因此我们可以给出 n 阶行列式的定义.

定义 6 由 n^2 个数组成的 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和，这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,3,\cdots,n$ 的一个排列，每一项都按下列规则带有符号：当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，带有正号，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，带有负号.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

由定义可以看出：

（1）行列式是一种特定的算式，它是根据求解方程个数和未知量个数相同的一次方程组的需要而定义的；

（2）n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和；

（3）n 阶行列式的每项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 都是位于不同行不同列 n 个元素的乘积；

（4）且当 $n=1$ 时，$D=|a_{11}|=a_{11}$，不要与绝对值记号相混淆；

（5）n 阶行列式简记作 $\det(a_{ij})$，其中数 a_{ij} 为行列式 D 的 (i,j) 元；

（6）按此定义的二、三阶行列式，与之前按对角线法则定义的二、三阶行列式，显然是一致的；

（7）$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的符号为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$.

下面来看几个例子.

例 6 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解 这是一个四阶行列式，由行列式的定义，展开式中应该有 $4!=24$ 项. 但由于出现很多的零，所以不等于零的项数就大大减少了. 展开式一般形式是

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}.$$