国家卫生和计划生育委员会“十三五”规划教材配套教材
全国高等医药教材建设研究会“十三五”规划教材配套教材

全国高等学校药学类专业第八轮规划教材配套教材
供药学类专业用

高等数学

学习指导与习题集

第3版

主编 顾作林

人民卫生出版社
PEOPLE'S MEDICAL PUBLISHING HOUSE

国家卫生和计划生育委员会“十三五”规划教材配套教材

全国高等医药教材[illegible]规划教材配套教材

全国高等学校药学类[illegible]套教材

供药学类专业用

高等数学
学习指导与习题集

第3版

主　编　顾作林

副主编　吕　同　刘启贵　秦　侠

编　者（以姓氏笔画为序）

田冬梅（广东药科大学）

李　芳（河北医科大学）

吕　同（山东大学数学院）

刘启贵（大连医科大学）

杨君慧（西安医学院）

秦　侠（安徽医科大学）

顾作林（河北医科大学）

徐良德（哈尔滨医科大学）

缪素芬（北京中医药大学）

人民卫生出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导与习题集/顾作林主编. —3版. —北京:人民卫生出版社,2016

ISBN 978-7-117-22368-3

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①顾… Ⅲ. ①高等数学－医学院校－教学参考资料 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第094523号

高等数学学习指导与习题集
第3版

主　　编:顾作林
出版发行:人民卫生出版社(中继线 010-59780011)
地　　址:北京市朝阳区潘家园南里19号
邮　　编:100021
E - mail:pmph @ pmph.com
购书热线:010-59787592　010-59787584　010-65264830
印　　刷:北京市艺辉印刷有限公司
经　　销:新华书店
开　　本:787×1092　1/16　**印张**:14
字　　数:349千字
版　　次:2007年7月第1版　2016年2月第3版
2016年2月第3版第1次印刷(总第4次印刷)
标准书号:ISBN 978-7-117-22368-3/R·22369
定　　价:32.00元
打击盗版举报电话:010-59787491　E-mail:WQ @ pmph.com
(凡属印装质量问题请与本社市场营销中心联系退换)

出版说明

全国高等学校药学类专业本科国家卫生和计划生育委员会规划教材是我国最权威的药学类专业教材，于1979年出版第1版，1987~2011年间进行了6次修订，并于2011年出版了第七轮规划教材。第七轮规划教材主干教材31种，全部为原卫生部“十二五”规划教材，其中29种为“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材；配套教材21种，全部为原卫生部“十二五”规划教材。本次修订出版的第八轮规划教材中主干教材共34种，其中修订第七轮规划教材31种；新编教材3种，《药学信息检索与利用》《药学服务概论》《医药市场营销学》；配套教材29种，其中修订24种，新编5种。同时，为满足院校双语教学的需求，本轮新编双语教材2种，《药理学》《药剂学》。全国高等学校药学类专业第八轮规划教材及其配套教材均为国家卫生和计划生育委员会“十三五”规划教材、全国高等医药教材建设研究会“十三五”规划教材，具体品种详见出版说明所附书目。

该套教材曾为全国高等学校药学类专业唯一一套统编教材，后更名为规划教材，具有较高的权威性和较强的影响力，为我国高等教育培养大批的药学类专业人才发挥了重要作用。随着我国高等教育体制改革的不断深入发展，药学类专业办学规模不断扩大，办学形式、专业种类、教学方式亦呈多样化发展，我国高等药学教育进入了一个新的时期。同时，随着药学行业相关法规政策、标准等的出台，以及2015年版《中华人民共和国药典》的颁布等，高等药学教育面临着新的要求和任务。为跟上时代发展的步伐，适应新时期我国高等药学教育改革和发展的要求，培养合格的药学专门人才，进一步做好药学类专业本科教材的组织规划和质量保障工作，全国高等学校药学类专业第五届教材评审委员会围绕药学类专业第七轮教材使用情况、药学教育现状、新时期药学人才培养模式等多个主题，进行了广泛、深入的调研，并对调研结果进行了反复、细致地分析论证。根据药学类专业教材评审委员会的意见和调研、论证的结果，全国高等医药教材建设研究会、人民卫生出版社决定组织全国专家对第七轮教材进行修订，并根据教学需要组织编写了部分新教材。

药学类专业第八轮规划教材的修订编写，坚持紧紧围绕全国高等学校药学类专业本科教育和人才培养目标要求，突出药学类专业特色，对接国家执业药师资格考试，按照国家卫生和计划生育委员会等相关部门及行业用人要求，在继承和巩固前七轮教材

建设工作成果的基础上，提出了"继承创新""医教协同""教考融合""理实结合""纸数同步"的编写原则，使得本轮教材更加契合当前药学类专业人才培养的目标和需求，更加适应现阶段高等学校本科药学类人才的培养模式，从而进一步提升了教材的整体质量和水平。

为满足广大师生对教学内容数字化的需求，积极探索传统媒体与新媒体融合发展的新型整体教学解决方案，本轮教材同步启动了网络增值服务和数字教材的编写工作。34种主干教材都将在纸质教材内容的基础上，集合视频、音频、动画、图片、拓展文本等多媒介、多形态、多用途、多层次的数字素材，完成教材数字化的转型升级。

需要特别说明的是，随着教育教学改革的发展和专家队伍的发展变化，根据教材建设工作的需要，在修订编写本轮规划教材之初，全国高等医药教材建设研究会、人民卫生出版社对第四届教材评审委员会进行了改选换届，成立了第五届教材评审委员会。无论新老评审委员，都为本轮教材建设做出了重要贡献，在此向他们表示衷心的谢意！

众多学术水平一流和教学经验丰富的专家教授以高度负责的态度积极踊跃和严谨认真地参与了本套教材的编写工作，付出了诸多心血，从而使教材的质量得到不断完善和提高，在此我们对长期支持本套教材修订编写的专家和教师及同学们表示诚挚的感谢！

本轮教材出版后，各位教师、学生在使用过程中，如发现问题请反馈给我们(renweiyaoxue@163.com)，以便及时更正和修订完善。

全国高等医药教材建设研究会

人民卫生出版社

2016年1月

国家卫生和计划生育委员会“十三五”规划教材
全国高等学校药学类专业第八轮规划教材书目

序号	教材名称	主编	单位
1	药学导论(第4版)	毕开顺	沈阳药科大学
2	高等数学(第6版)	顾作林	河北医科大学
	高等数学学习指导与习题集(第3版)	顾作林	河北医科大学
3	医药数理统计方法(第6版)	高祖新	中国药科大学
	医药数理统计方法学习指导与习题集(第2版)	高祖新	中国药科大学
4	物理学(第7版)	武　宏	山东大学物理学院
		章新友	江西中医药大学
	物理学学习指导与习题集(第3版)	武　宏	山东大学物理学院
	物理学实验指导***	王晨光	哈尔滨医科大学
		武　宏	山东大学物理学院
5	物理化学(第8版)	李三鸣	沈阳药科大学
	物理化学学习指导与习题集(第4版)	李三鸣	沈阳药科大学
	物理化学实验指导(第2版)(双语)	崔黎丽	第二军医大学
6	无机化学(第7版)	张天蓝	北京大学药学院
		姜凤超	华中科技大学同济药学院
	无机化学学习指导与习题集(第4版)	姜凤超	华中科技大学同济药学院
7	分析化学(第8版)	柴逸峰	第二军医大学
		邸　欣	沈阳药科大学
	分析化学学习指导与习题集(第4版)	柴逸峰	第二军医大学
	分析化学实验指导(第4版)	邸　欣	沈阳药科大学
8	有机化学(第8版)	陆　涛	中国药科大学
	有机化学学习指导与习题集(第4版)	陆　涛	中国药科大学
9	人体解剖生理学(第7版)	周　华	四川大学华西基础医学与法医学院
		崔慧先	河北医科大学
10	微生物学与免疫学(第8版)	沈关心	华中科技大学同济医学院
		徐　威	沈阳药科大学
	微生物学与免疫学学习指导与习题集***	苏　昕	沈阳药科大学
		尹丙姣	华中科技大学同济医学院
11	生物化学(第8版)	姚文兵	中国药科大学
	生物化学学习指导与习题集(第2版)	杨　红	广东药科大学

续表

序号	教材名称	主编	单位
12	药理学(第 8 版)	朱依谆	复旦大学药学院
		殷　明	上海交通大学药学院
	药理学(双语)★★	朱依谆	复旦大学药学院
		殷　明	上海交通大学药学院
	药理学学习指导与习题集(第 3 版)	程能能	复旦大学药学院
13	药物分析(第 8 版)	杭太俊	中国药科大学
	药物分析学习指导与习题集(第 2 版)	于治国	沈阳药科大学
	药物分析实验指导(第 2 版)	范国荣	第二军医大学
14	药用植物学(第 7 版)	黄宝康	第二军医大学
	药用植物学实践与学习指导(第 2 版)	黄宝康	第二军医大学
15	生药学(第 7 版)	蔡少青	北京大学药学院
		秦路平	第二军医大学
	生药学学习指导与习题集★★★	姬生国	广东药科大学
	生药学实验指导(第 3 版)	陈随清	河南中医药大学
16	药物毒理学(第 4 版)	楼宜嘉	浙江大学药学院
17	临床药物治疗学(第 4 版)	姜远英	第二军医大学
		文爱东	第四军医大学
18	药物化学(第 8 版)	尤启冬	中国药科大学
	药物化学学习指导与习题集(第 3 版)	孙铁民	沈阳药科大学
19	药剂学(第 8 版)	方　亮	沈阳药科大学
	药剂学(双语)★★	毛世瑞	沈阳药科大学
	药剂学学习指导与习题集(第 3 版)	王东凯	沈阳药科大学
	药剂学实验指导(第 4 版)	杨　丽	沈阳药科大学
20	天然药物化学(第 7 版)	裴月湖	沈阳药科大学
		娄红祥	山东大学药学院
	天然药物化学学习指导与习题集(第 4 版)	裴月湖	沈阳药科大学
	天然药物化学实验指导(第 4 版)	裴月湖	沈阳药科大学
21	中医药学概论(第 8 版)	王　建	成都中医药大学
22	药事管理学(第 6 版)	杨世民	西安交通大学药学院
	药事管理学学习指导与习题集(第 3 版)	杨世民	西安交通大学药学院
23	药学分子生物学(第 5 版)	张景海	沈阳药科大学
	药学分子生物学学习指导与习题集★★★	宋永波	沈阳药科大学
24	生物药剂学与药物动力学(第 5 版)	刘建平	中国药科大学
	生物药剂学与药物动力学学习指导与习题集(第 3 版)	张　娜	山东大学药学院

续表

序号	教材名称	主编	单位
25	药学英语（上册、下册）（第5版）	史志祥	中国药科大学
	药学英语学习指导（第3版）	史志祥	中国药科大学
26	药物设计学（第3版）	方　浩	山东大学药学院
	药物设计学学习指导与习题集（第2版）	杨晓虹	吉林大学药学院
27	制药工程原理与设备（第3版）	王志祥	中国药科大学
28	生物制药工艺学（第2版）	夏焕章	沈阳药科大学
29	生物技术制药（第3版）	王凤山	山东大学药学院
		邹全明	第三军医大学
	生物技术制药实验指导***	邹全明	第三军医大学
30	临床医学概论（第2版）	于　锋	中国药科大学
		闻德亮	中国医科大学
31	波谱解析（第2版）	孔令义	中国药科大学
32	药学信息检索与利用*	何　华	中国药科大学
33	药学服务概论*	丁选胜	中国药科大学
34	医药市场营销学*	陈玉文	沈阳药科大学

注：*为第八轮新编主干教材；**为第八轮新编双语教材；***为第八轮新编配套教材。

全国高等学校药学类专业第五届教材评审委员会名单

顾　　问　吴晓明　中国药科大学

　　　　　周福成　国家食品药品监督管理总局执业药师资格认证中心

主任委员　毕开顺　沈阳药科大学

副主任委员　姚文兵　中国药科大学

　　　　　郭　姣　广东药科大学

　　　　　张志荣　四川大学华西药学院

委　　员（以姓氏笔画为序）

王凤山　山东大学药学院

朱依谆　复旦大学药学院

朱　珠　中国药学会医院药学专业委员会

刘俊义　北京大学药学院

孙建平　哈尔滨医科大学

李晓波　上海交通大学药学院

李　高　华中科技大学同济药学院

杨世民　西安交通大学药学院

杨　波　浙江大学药学院

张振中　郑州大学药学院

张淑秋　山西医科大学

陆　涛　中国药科大学

周余来　吉林大学药学院

胡长平　中南大学药学院

胡　琴　南京医科大学

姜远英　第二军医大学

夏焕章　沈阳药科大学

黄　民　中山大学药学院

黄泽波　广东药科大学

曹德英　河北医科大学

彭代银　安徽中医药大学

董　志　重庆医科大学

前　言

在师生恳谈会上,同学们提的最多的两个问题是:作为医药学专业的学生,学习高等数学究竟有什么用途?高等数学学起来很难,如何学好这门课程?

我们所学的各门课程是适应自身专业需要的一个课程体系,是一个系统工程。在这个系统工程中,高等数学是最基础的课程之一。由于各学科间的相互渗透和联系越来越密切,使得高等数学不仅教给学生思考和解决实际问题的科学方法和必要技能,也为后继课程的学习提供知识和方法论的支撑。这主要体现在数理统计方法课程的学习,需要完备的高等数学理论作支持。好比一条连接完好的封闭链条,不允许出现断点一样,高等数学的学习是最基础的一个环节。

之所以有的同学说高等数学学起来很难,是因为它内容丰富、系统性强,且需要较扎实的中学数学知识储备。在相对较短的时间内,学习如此众多的数学模型并掌握它们的应用,确非易事。但高等数学的内容结构合理、联系密切,抓住它的特点,不断地总结各章内容的知识体系结构以及它们之间的联系,并适当地做些练习,积累下来,就会发现高等数学如同蕴含无数宝藏的大海,我们常常惊叹于发现一颗颗美丽的贝壳,进而激发进一步探究它的欲望。

为了帮助广大读者学好这门课程,由参加教材编写的各位老师,总结自己多年的教学实践经验,编写了这本与《高等数学》教材配套的指导书。

本书的特色是将各章内容的知识体系结构以图解的形式展现,使读者从整体上更清晰地了解各章内容及它们之间的联系,突出各章内容的重点和难点。把各章内容的主要知识点总结、汇集起来,形成内容概要。通过丰富的例题分析,建立完善的解题方法和技巧体系。并提供大量的复习思考题,巩固、提高读者的解题技能。

在本书的编写过程中,参考了国内外大量有关书籍,我们对这些书籍的作者表示感谢,同时也感谢编写组成员所在各医药院校有关领导和老师的悉心关怀和大力支持。

由于作者水平有限,书中难免有错误或考虑不周之处,恳请读者多提宝贵意见。

顾作林

2016 年 1 月于石家庄

目　录

第一章 函数与极限

函数、极限、连续是高等数学的基本概念。函数是高等数学研究的主要对象,极限是研究函数变化趋势的重要方法。

本章内容的知识体系结构图解如下:

- 第一章 函数与极限
  - 一 基本概念
    - 1. 函数(***)
    - 2. 复合函数(***)
    - 3. 反函数(**)
    - 4. 初等函数(*****)——高等数学的主要研究对象
    - 5. 极限(*****)
    - 6. 无穷小(大)(****)
    - 7. 连续(****)
    - 8. 间断点(***)
  - 二 极限
    - 1. 极限的定义(***) 本章难点
    - 2. 无穷小(大)
      - (1)无穷小(大)的定义(**)
      - (2)无穷小定理(***)
      - (3)无穷小与无穷大的关系(**)
      - (4)无穷小的比较
        - ①高阶无穷小(**)
        - ②同阶无穷小(**)
        - ③等价无穷小(***)
    - 3. 求极限的方法 本章重点
      - (1)按定义求(***)
      - (2)极限的四则运算(****)
      - (3)用无穷小的结论求(****)
      - (4)用函数的连续性求(***)
      - (5)利用两个重要极限(*****)
  - 三 函数
    - 1. 函数
      - (1)函数(***)
      - (2)复合函数(****)
      - (3)反函数(**)
      - (4)初等函数(****)
    - 2. 函数的连续性
      - (1)连续的定义(****)
      - (2)间断(**)
      - (3)初等函数的连续性(***)
      - (4)闭区间上连续函数的性质
        - ①最值定理(***)
        - ②有界性定理(***)
        - ③介值定理(****)

注:“ * ”号表示内容的重要程度。

【学习要求】

1. 正确理解函数、反函数、复合函数及初等函数的概念。
2. 掌握函数的简单性质及复合函数的复合过程。
3. 正确理解极限、无穷小及无穷大概念,掌握无穷小性质,了解无穷小的比较。
4. 熟练应用极限的四则运算法则及两个重要极限求极限,了解极限存在准则。
5. 理解函数连续性的定义,掌握闭区间上连续函数的性质,了解函数的间断点及其

分类。

【要点概览】

(一)函数

1. 函数的概念

定义 1-1 如果对于数集 D 中的每一个元素 x,按照某一对应法则 f,都有唯一确定的数值 y 与之对应,则称 f 是在 D 上的一个函数,记作:

$$y = f(x), x \in D$$

集合 D 称为函数的定义域,集合:$V = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域。

在理解函数定义时要注意以下几点:

(1) 定义域和对应法则 f 是确定函数的两个基本要素,缺一不可。因此,两函数相等是指它们的定义域、对应法则分别相同。

例如 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$ 与 $g(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}}$。显然,$f(x)$ 与 $g(x)$ 对应法则相同,但定义域不同,前者定义域是 $(-\infty,1) \cup [2,+\infty)$,后者定义域是 $[2,+\infty)$,故,$f(x) \neq g(x)$。

(2) 若对于每一个 $x \in D$,有唯一确定的数值 y 与之对应,则称 f 是 D 上的单值函数,否则称为多值函数。

如 $y = x^2$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的单值函数,而由方程 $x^2 + y^2 = a^2$ 所确定的函数

$$y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$$

是 $[-a,a]$ 上的多值函数。

2. 函数表示法 解析法、列表法、图像法。

3. 定义域求法

(1) 当函数用解析式表示时,定义域就是使这个式子有意义的自变量值的全体构成的集合。

(2) 在实际问题中,定义域应由实际问题的意义来确定。

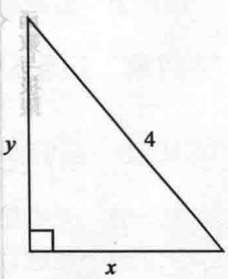

图 1-1

例如,在图 1-1 所示的直角三角形中,$y = \sqrt{4^2 - x^2}$,此函数的定义域应满足:

$$\begin{cases} 4^2 - x^2 \geqslant 0 \\ \sqrt{4^2 - x^2} > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} |x| < 4 \\ x > 0 \end{cases}$,故函数的定义域为 $(0,4)$。

4. 函数的特性 单值性和多值性、有界性、单调性、奇偶性、周期性。

(二)复合函数与反函数

1. 复合函数 函数 $y = f(u)$,$u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数为 $y = f[\varphi(x)]$。

理解此概念时应注意以下几点:

(1) 不是任何两个函数都能复合成一个复合函数,只有当 $u = \varphi(x)$ 的值域与 $y = f(u)$ 的定义域的交集非空时才能构成复合函数。

例如 $y = \arccos u$,$u = \sqrt{2 + x^2}$ 就不能进行复合,因为函数 $u = \sqrt{2 + x^2}$ 的值域为 $[2,+$

∞),而 $y = \arccos u$ 的定义域为 $[-1,1]$,显然,$[2,+\infty)\cap[-1,1]=\phi$,故不能构成复合函数。

(2) 形成复合函数的中间变量可以不止一个,即复合函数可由多个函数构成。

例如 $y = \mathrm{arctg}u, u = \sin v, v = x^2+1$。由以上三个函数构成一个复合函数:

$$y = \mathrm{arctg}[\sin(x^2+1)]$$

中间变量为 u、v。

(3) 分解复合函数的方法:对给定的复合函数,可以由外及里一层层顺序拆开,使拆开后的每个函数都是基本初等函数或由基本初等函数及常数经四则运算所构成的简单函数。

例　指出下列函数由哪些函数复合而成

(1) $y = \sqrt[3]{\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}$　　　　(2) $y = \arcsin(1-x)^3$

解　由复合函数分解方法知

(1) $y = u^{\frac{2}{3}}, u = \dfrac{1+x}{1-x}$

(2) $y = \arcsin u, u = v^3, v = 1-x$

2. 反函数　理解该定义时应注意:

(1) 反函数:是指从 $y=f(x)$ 中解出的函数 $x=\varphi(y)$,人为地写成 $y=\varphi(x)$,常用 $y=f^{-1}(x)$ 表示,即 $f^{-1}=\varphi$。

(2) f 的定义域、值域分别为 f^{-1} 的值域、定义域。

(3) 在同一坐标系中,$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称,而 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图形是同一图形。

3. 初等函数　常数及基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合而构成的,可用一个解析式表示的函数,称为初等函数。

4. 分段函数　在定义域的不同范围内函数的解析式不相同,即不能用一个解析式表示的函数,称为分段函数。

显然,分段函数是非初等函数。

(三) 函数极限的概念

1. 当 $x\to\infty$ 时函数的极限。

定义 1-2　设有函数 $f(x)$,若对于预先任意给定的无论多么小的正数 ε,总存在正数 N,使得对 $|x|>N$ 时的一切 x,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立,则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记作:

$$\lim_{x\to\infty}f(x) = A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to\infty)$$

特别地,当 x 取自然数 n 趋近于 $+\infty$ 时便得数列极限。

注意:定义中的 ε 刻划 $f(x)$ 与 A 的无限接近程度。N 刻划 $|x|$ 充分大的程度,N 是随 ε 而确定的,是 ε 的函数,但不是单值函数。

2. $x\to x_0$ 时函数的极限

定义 1-3　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义(x_0 可除外),若对于预先任意给定的无论多么小的正数 ε,总存在一个正数 δ,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立（A 为常数），则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作：

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A \quad (x\to x_0)$$

这里 ε 和 δ 是分别刻划 $f(x)$ 与 A，x 与 x_0 之间接近程度的。

理解该定义时注意以下几点：

(1) 定义中 $|x-x_0|>0$，必有 $x\neq x_0$，即不考虑 x_0 点。这是因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 研究的是当自变量 x 在 x_0 点附近无限接近 x_0 时，函数 $f(x)$ 的变化趋势，与 $f(x)$ 在 x_0 点有无定义及取什么值都无关。

(2) 当 x 仅从 x_0 的左侧（即 $x<x_0$）无限趋近 x_0 时函数有极限，称为左极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 或 $f(x_0-0)$；当 x 仅从 x_0 的右侧（即 $x>x_0$）无限趋近 x_0 时函数有极限，称为右极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 或 $f(x_0+0)$。

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-A]=0$

（四）极限的四则运算法则

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)$ 都存在（略去 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$），则有

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$

(3) $\lim[f(x)/g(x)]=\lim f(x)/\lim g(x) \quad (g(x)\neq 0 \text{ 且 } \lim g(x)\neq 0)$

运用此法则时注意：

(1) 法则的前提条件：$\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都存在，对商的极限更应注意分母及其极限不能为零。

(2) 对于法则中的加、乘运算可推广到有限个函数的情形。

(3) 对于不满足法则条件的极限需经过适当变换变成满足法则条件时，方可用法则。

例 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3x+1}{6x^3+5x^2+7}$。

解 因为分子、分母的极限均为“∞”，故不能直接用法则。为此，将分子、分母同除以 x^3 得：

$$\text{原极限}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{6+\dfrac{5}{x}+\dfrac{7}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(6+\dfrac{5}{x}+\dfrac{7}{x^3}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}6+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7}{x^3}}$$

$$=0$$

一般地，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}0 & m<n\\ \dfrac{a_m}{b_n} & m=n\\ \infty & m>n\end{cases}$$

（五）无穷小与无穷大

1. **定义 1-4**　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则称 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时函数 $f(x)$ 为无穷小量，简称无穷小；

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则称 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时函数 $f(x)$ 为无穷大量，简称无穷大。

理解无穷小与无穷大时，应注意：

（1）无穷小与无穷大都是变量，因此，任何一个很小的数，都不是无穷小；任何一个很大的数，也不是无穷大。但常数零是无穷小。

（2）说一个函数是无穷小还是无穷大时，必须指明自变量的变化趋势。

（3）无穷小与无穷大的关系：在自变量的同一变化过程中，若 $f(x)$ 是无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小；若 $f(x)$ 是无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大。

（4）极限与无穷小的关系：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha \quad (\alpha \text{ 为 } x\to x_0 \text{ 时的无穷小})$$

2. 无穷小的性质

（1）有限个无穷小的代数和（或积）仍为无穷小。

（2）有界函数与无穷小之积仍为无穷小。

注意　性质（1）的前提条件"有限个"，否则结论未必成立。

例如，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)\neq \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2}$。

实际上，
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{2n}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

因此，无穷多个无穷小之和，未必是无穷小。

（六）极限存在准则与两个重要极限

1. 极限存在准则

准则 Ⅰ（夹逼定理）：若对于点 x_0 某一邻域内的一切 x（x_0 可除外），或绝对值大于某一正数的一切 x，有

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$$

成立，且

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} h(x)=A$$

则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)$ 存在，且

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$$