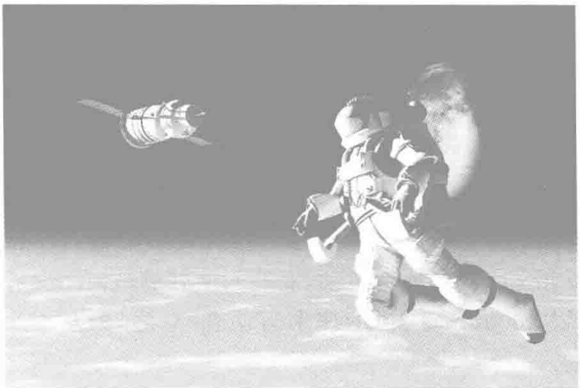


第1章

质点运动学

质点运动学的任务是研究和描述作机械运动的物体在空间的位置随时间变化的关系，并不追究运动发生的原因.本章在引入参考系、坐标系、质点等概念的基础上，定义描述质点运动的物理量，如位置矢量、位移、速度和加速度等，进而讨论这些量随时间的变化以及相互关系，然后讨论曲线运动中的切向加速度和法向加速度，最后介绍相对运动.

本章知识框图

§1.1 参考系　坐标系　物理模型

一、运动的绝对性和相对性

众所周知，运动是物质的存在形式，运动是物质的固有属性，任何物体在任何时刻都在不停地运动着. 从这种意义上讲，运动是绝对的. 例如，地球就在自转的同时绕太阳公转，太阳又相对于银河系中心以大约 250 $km \cdot s^{-1}$ 的速率运动，而我们所处的银河系又相对于其他银河系大约以 600 $km \cdot s^{-1}$ 的速率运动着. 总之，绝对不运动的物体是不存在的.

然而运动又是相对的. 因为我们所研究的物体的运动，都是在一定的环境和特定的条件下运动. 例如，当我们说一列火车开动了，这显然是指火车相对于地球(即车站)而言的，因此离开特定的环境、特定的条件谈论运动没有任何意义. 正如恩格斯所说："单个物体的运动是不存在的——只有在相对的意义下才可以谈运动."

为了描述物体的运动必须作三点准备，即选择参考系、建立坐标系、提出物理模型.

二、参考系

运动是绝对的，但运动的描述却是相对的；因此，在确定研究对象的位置时，必须先选定一个标准物体(或相对静止的几个物体)作为基准，那么这个被选作标准的物体或物体群，就称为**参考系**.

同一物体的运动，如果我们所选的参考系不同，对其运动的描述就会不同. 例如，在匀速直线运动的车厢中自由下落的物体，相对于车厢是作直线运动；相对于地面，却是作抛物线运动；相对于太阳或其他天体，其运动的描述则更为复杂. 这一事实，充分说明了运动的描述是相对的.

从运动学的角度讲，参考系的选择是任意的，通常以对问题的研究最方便、最简单为原则. 研究地球上物体的运动，在大多数情况下，以地球为参考系最为方便(以后如不作特别说明，研究地面上物体的运动，都是以地球为参考系). 但是，当我们在地球上发射人造"宇宙小天体"时，则应以太阳为参考系.

三、坐标系

要想定量地描述物体的运动，就必须在参考系上建立适当的坐标系. 在力学中常用的有直角坐标系. 根据需要，我们也可选用极坐

标系、自然坐标系、球面坐标系或柱面坐标系等. 下面简要介绍直角坐标系和自然坐标系.

1. 直角坐标系

直角坐标系也称笛卡儿坐标系，它由三条共点且互相垂直的射线组成(见图1-1)；三条射线的交点O称为坐标系的原点，每一条射线分别称为坐标系的x、y、z **坐标轴**；三个坐标轴的方向分别由三个单位常矢量$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$表示. 如果物体局限于在一个平面内运动，通常用二维直角坐标系(只有两个独立坐标或独立参量)来定量描述其运动情况.

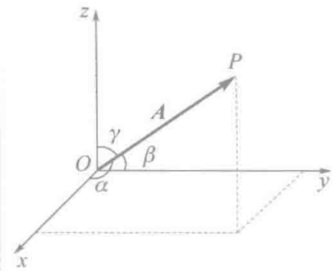


图1-1　直角坐标系

在直角坐标系中，任意矢量$\boldsymbol{A}$可以表示为

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}. \tag{1-1}$$

矢量的大小或模表示为

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \tag{1-2}$$

矢量的方向也可以由它与三个坐标轴之间的夹角(α,β,γ)来表示，因此，这三个夹角的余弦也称矢量的方向余弦. 在直角坐标系中，方向余弦满足关系

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{1-3}$$

同时，在直角坐标系中，坐标轴的单位矢量是常矢量，因此满足

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t} = 0,\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t} = 0,\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{1-4}$$

2. 自然坐标系

如图1-2所示，当质点运动轨迹为已知时，在运动轨迹上任取一点O为坐标原点，用质点距离原点的轨道长度s来确定质点任意时刻的位置，以轨迹切向和法向的单位矢量$(\boldsymbol{\tau}_0$、$\boldsymbol{n}_0)$作为其独立的坐标方向，这样的坐标系，称为**自然坐标系**. s称为**自然坐标**. 以后将会看到，用自然坐标来描述一般曲线运动，是很方便的.

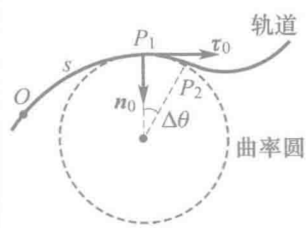


图1-2　自然坐标系

总的说来，当参考系选定后，无论选择何种坐标系，物体的运动性质都不会改变. 然而，坐标系选择得当，可使计算简化.

四、物理模型

任何一个真实的物理过程都是极其复杂的. 为了寻找某过程中最本质、最基本的规律，我们总是根据所提问题(或所要回答的问题)，对真实过程进行理想化的简化，然后经过抽象提出一个可供数学描述的物理模型.

现在我们所提的问题是确定物体在空间的位置. 若物体的尺度比它运动的空间范围小很多，例如绕太阳公转的地球和调度室中铁路运行图上的列车等；或当物体作平动时，物体上各部分的运动情况(轨迹、速度、加速度)完全相同，这时我们可以忽略物体的形状、大小而把它看成一个具有一定质量的几何点，并称之为质点.

若物体的运动在上述两种情形之外，我们还可推出**质点系**的概念. 即把这个物体看成是由许许多多满足第一种情况的质点所组成的系统. 当我们把组成这个物体的各个质点的运动情况弄清楚了，整个物体的运动情况也就弄清楚了.

综上所述:**选择合适的参考系,以方便确定物体的运动性质;建立恰当的坐标系,以定量地描述物体的运动;提出较准确的物理模型,以确定所提问题最基本的运动规律.**

*五、国际单位制和量纲

各国使用的单位制种类繁多.就力学而言,常用的就有国家单位制,厘米、克、秒制和工程单位制……这给国际科学技术交流带来很大不便.为此在第十四届国际计量会议上选择了7个物理量为**基本量**,规定其相应单位为**基本单位**,在此基础上建立了国际单位制(SI).我国国务院在1984年把国际单位制的单位定为法定计量单位.

国际单位制的7个基本量为长度、质量、时间、电流、温度、物质的量和发光强度.

有了基本单位,通过物理量的定义或物理定律就可导出其他物理量的单位.从基本量导出的量称为**导出量**,相应的单位称为**导出单位**.例如速度的国际单位是 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$,力的国际单位是 $\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}}$(简称为牛,符号是N).因为导出量是由基本量导出的,所以导出量可用基本量的某种组合(乘、除、幂等)表示.这种由基本量的组合来表示物理量的式子称为该物理量的**量纲式**,如果用L,M和T分别表示长度、质量和时间,则力学中其他物理量的量纲式可表示为

$$[Q] = \mathrm{L}^{p}\mathrm{M}^{q}\mathrm{T}^{r}.$$

例如,在国际单位制中力的量纲式为

$$[F] = \mathrm{LMT}^{-2}.$$

量纲式和量纲在物理学中很有用处.只有量纲式相同的量才能相加、相减或用等式相连,这一法则称为**量纲法则**.所以我们可以用量纲法则进行单位换算,检验新建方程或检验公式的正确性和完整性;还可为探索复杂的物理规律提供线索.量纲分析法在科学研究中具有重要作用.

在物理学中,除采用国际单位制以外,基于不同需要,还常用其他一些非法定计量单位.如长度在原子线度和光波中常用"埃"(Å)作单位:

$$1\ \text{Å} = 10^{-10}\ \mathrm{m}.$$

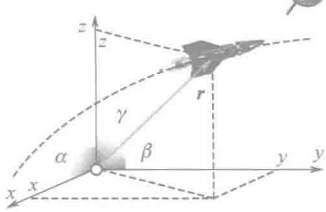
在国家标准GB 3102中明确指出"推荐使用纳米(nm)".对于原子核线度,常用"飞米"(fm)作单位.

$$1\ \mathrm{nm} = 10^{-9}\ \mathrm{m},\quad 1\ \mathrm{fm} = 10^{-15}\ \mathrm{m}.$$

在天体物理中,常用"天文单位"和"光年"作长度单位.1天文单位定义为地球和太阳的平均距离,光年是光在1年时间内通过的距离,即

$$1\ \text{天文单位} = 1.496 \times 10^{11}\ \mathrm{m},$$

$$1\ \text{光年} = 9.46 \times 10^{15}\ \mathrm{m}.$$



质点运动的描述

§1.2 位矢 位移 速度 加速度

一、位置矢量

为了表示运动质点的位置,首先应该选取参考系,然后在参考系

上选定坐标系的原点和坐标轴. 图1-3中点 P 在直角坐标系中的位置可由 P 所在点的三个坐标 x,y,z 来确定，或者用从原点 O 到 P 点的有向线段 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{r}$ 来表示，矢量 $\boldsymbol{r}$ 叫作**位置矢量**（简称**位矢**，又称**矢径**）. 相应地，坐标 x,y,z 也就是位矢 $\boldsymbol{r}$ 在坐标轴上的三个分量.

在直角坐标系中，位矢 $\boldsymbol{r}$ 可以表示成

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}, \tag{1-5}$$

式中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x,y,z 轴正方向的单位矢量. 位矢 $\boldsymbol{r}$ 的大小为

$$|\boldsymbol{r}|=r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{1-6}$$

位矢的方向余弦是

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\quad \cos\beta=\frac{y}{r},\quad \cos\gamma=\frac{z}{r}.$$

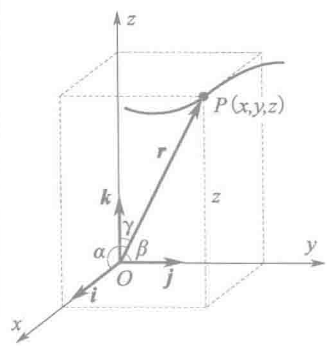


图1-3　直角坐标系下的位矢

质点的机械运动是质点的空间位置随时间变化的过程. 这时质点的坐标 x,y,z 和位矢 $\boldsymbol{r}$ 都是时间 t 的函数. 表示运动过程的函数式称为**运动方程**，可以写成

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t) \tag{1-7a}$$

或

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t). \tag{1-7b}$$

知道了运动方程，就能确定任一时刻质点的位置，从而确定质点的运动. 力学的主要任务之一，正是根据各种问题的具体条件，求解质点的运动方程.

质点在空间的运动路径称为**轨道**（又名**轨迹**）. 质点的运动轨道为直线时，称为直线运动. 质点的运动轨道为曲线时，称为曲线运动. 从(1-7a)式中消去 t 即可得到**轨道方程，又称轨迹方程**. (1-7a)式就是轨道的参数方程.

轨道方程和运动方程最明显的区别，就在于轨道方程不是时间 t 的显函数.

例 1-1　已知某质点的运动方程为 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}$，其中 $x(t)=3\sin\frac{\pi}{6}t$，$y(t)=3\cos\frac{\pi}{6}t$，式中 t 以 s 计，x,y 以 m 计，求质点的轨道方程.

解　从 x,y 两式中消去 t 后，得轨道方程

$$x^2+y^2=9$$

这表明质点是在 $z=0$ 的平面内，作以原点为圆心，半径为 3 m 的圆周运动.

二、位移

如图1-4所示，设质点沿曲线轨道 $\overset{\frown}{AB}$ 运动，在 t 时刻，质点在 A 处，在 $t+\Delta t$ 时刻，质点运动到 B 处. A,B 两点的位矢分别由 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 表示，质点在 Δt 时间间隔内位矢的增量

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1, \tag{1-8}$$

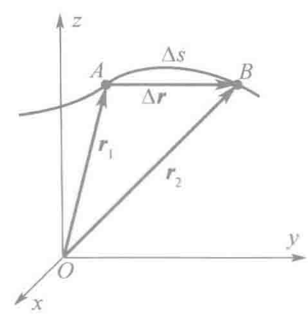


图1-4　位移

我们称之为**位移**，它是描述物体位置变动大小和方向的物理量，在图1-4中就是由起始位置 A 指向终止位置 B 的一个矢量. 位移是矢量，它的运算遵守矢量加法的平行四边形法则（或三角形法则）.

如图 1-5 所示，位移的模只能记作 $|\Delta\boldsymbol{r}|$，不能记作 Δr. Δr 通常表示两个位矢的模的增量，即 $\Delta r=|\boldsymbol{r}_2|-|\boldsymbol{r}_1|$，而 $|\Delta\boldsymbol{r}|$ 则是位矢增量的模（即位移的模），而且在通常情况下 $|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta r$.

必须注意，位移表示物体位置的改变，并非质点所经历的路程. 例如，在图 1-4 中，位移是有向线段 $\overrightarrow{AB}$，它的量值 $|\Delta\boldsymbol{r}|$ 为割线 AB 的长度. 路程是标量，即曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度，通常记作 Δs. 一般说来，$|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta s$. 显然，只有在 Δt 趋近于零时，才有 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s$. 应当指出，即使在 $\Delta t\to 0$ 时，也没有 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}r$ 这个等式成立.

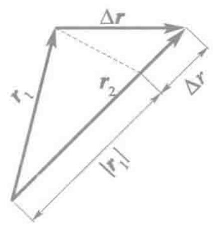


图 1-5 位移的大小

在直角坐标系中，位移的表达式为

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{r}&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\\&=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k},\end{aligned}\tag{1-9}$$

位移的模为

$$|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.\tag{1-10}$$

位移和路程的单位均是长度的单位，国际单位制中为 m.

三、速度

研究质点的运动，不仅要知道质点的位移，还必须知道在多长一段时间内通过这段位移，亦即要知道质点运动的快慢程度.

如图 1-4 所示，在时刻 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间内，质点的位移为 $\Delta\boldsymbol{r}$. 那么 $\Delta\boldsymbol{r}$ 与 Δt 的比值，称为质点在 t 时刻附近 Δt 时间内的**平均速度**

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\overrightarrow{AB}}{\Delta t}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}.\tag{1-11}$$

这就是说，平均速度的方向与位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向相同，平均速度的大小与在相应的时间 Δt 内单位时间的位移大小相同.

显然，用平均速度描述物体的运动是比较粗糙的. 因为在 Δt 时间内，质点各个时刻的运动情况不一定相同，质点的运动可以时快时慢，方向也可以不断改变，平均速度不能反映质点运动的真实细节. 如果我们要精确地知道质点在某一时刻或某一位置的实际运动情况，应使 Δt 尽量减小，即 $\Delta t\to 0$，用平均速度的极限值——**瞬时速度**（简称**速度**）来描述.

质点在某时刻或某位置的瞬时速度，等于该时刻附近 Δt 趋近于零时平均速度的极限值，数学表示式为

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}.\tag{1-12}$$

可见**速度等于位矢对时间的一阶导数**.

速度的方向就是 Δt 趋近于零时，平均速度 $\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$ 或位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的极限方向，即沿质点所在处轨道的切线方向，并指向质点前进的一方.

速度是矢量，具有大小和方向. 描述质点运动时，我们也常采用一个叫作**速率**的物理量. 速率是标量，等于质点在单位时间内所行经

的路程，而不考虑质点运动的方向. 如图 1－4 所示，在 Δt 时间内质点所行经的路程为曲线 $\widehat{AB}$，设曲线 $\widehat{AB}$ 的长度为 Δs，那么 Δs 与 Δt 的比值就称为 t 时刻附近 Δt 时间内的平均速率，即

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{1-13}$$

平均速率与平均速度不能等同看待. 例如，在某一段时间内，质点环行了一个闭合路径，显然质点的位移等于零，平均速度也为零，而质点的平均速率则不等于零.

虽然如此，但在 $\Delta t\to 0$ 的极限条件下，曲线 $\widehat{AB}$ 的长度 Δs 与直线 AB 的长度 $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 相等，即在 $\Delta t\to 0$ 时，$\mathrm{d}s=|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$，所以瞬时速率

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}=|\boldsymbol{v}|, \tag{1-14}$$

即**瞬时速率就是瞬时速度的模**.

在直角坐标系中，由(1－5)式可知，速度可表示成

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}, \tag{1-15}$$

式中 $v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，$v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ 叫作速度在 x，y，z 轴的分量. 这时速度的模可以表示成

$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}. \tag{1-16}$$

速度和速率在量值上都是长度与时间之比，国际单位制中为 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

四、加速度

在力学中，位矢 $\boldsymbol{r}$ 和速度 $\boldsymbol{v}$ 都是描述物体机械运动的状态参量. 即 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 已知，质点的力学运动状态就确定了. 我们即将引入的加速度概念则是用来描述速度矢量随时间变化快慢的物理量.

在变速运动中，物体的速度是随时间变化的. 这个变化可以是速度大小的变化，也可以是速度方向的变化，一般情况下速度的方向和大小都在变化. 加速度就是描述质点的速度(大小和方向)随时间变化快慢的物理量. 如图 1－6 所示，$\boldsymbol{v}_A$ 表示质点在时刻 t、位置 A 处的速度，$\boldsymbol{v}_B$ 表示质点在时刻 $t+\Delta t$、位置 B 处的速度. 从速度矢量图可以看出，在时间 Δt 内质点速度的增量为

$$\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A.$$

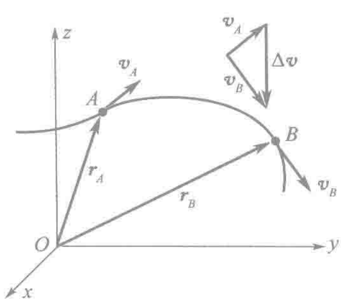


图 1－6　速度的增量

与平均速度的定义相类似，比值 $\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$ 称为 t 时刻附近 Δt 时间内的**平均加速度**，即

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A}{\Delta t}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}. \tag{1-17}$$

平均加速度只是反映在时间 Δt 内速度的平均变化率. 为了准确地描述质点在某一时刻 t(或某一位置处)的速度变化率，须引入瞬时加速度.

质点在某时刻或某位置处的**瞬时加速度**(简称**加速度**)等于该时刻附近 Δt 趋近于零时平均加速度的极限值，其数学式为

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}. \tag{1-18}$$

可见，**加速度是速度对时间的一阶导数，或位矢对时间的二阶导数.**

在直角坐标系中，加速度的表示式为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}, \tag{1-19}$$

式中 $a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$，$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$，$a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}$，称为加速度在 x，y，z 轴的分量. 加速度的模为

$$a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{1-20}$$

加速度的方向是当 $\Delta t \to 0$ 时，平均加速度 $\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$ 或速度增量的极限方向.

在国际单位制中，加速度的单位为 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

例 1-2 一质点在 xOy 平面上运动，运动方程为 $x=3t+5$，$y=\frac{1}{2}t^2+3t-4$. 式中 t 以 s 计，x，y 以 m 计.(1)以时间 t 为变量，写出质点位置矢量的表示式；(2)求出 $t=1$ s 时刻和 $t=2$ s 时刻的位置矢量，计算这 1 s 内质点的位移；(3)计算 $t=0$ s 时刻到 $t=4$ s 时刻内的平均速度；(4)求出质点速度矢量表示式，计算 $t=4$ s 时质点的速度；(5)计算 $t=0$ s 到 $t=4$ s 内质点的平均加速度；(6)求出质点加速度矢量的表示式，计算 $t=4$ s 时质点的加速度(请把位置矢量、位移、平均速度、瞬时速度、平均加速度、瞬时加速度都表示成直角坐标系中的矢量式).

解 (1) $\boldsymbol{r}=(3t+5)\boldsymbol{i}+\left(\frac{1}{2}t^2+3t-4\right)\boldsymbol{j}$ m.

(2)将 $t=1$，$t=2$ 分别代入上式即有

$$\boldsymbol{r}_1=8\boldsymbol{i}-0.5\boldsymbol{j}\ \mathrm{m},$$

$$\boldsymbol{r}_2=11\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}\ \mathrm{m}.$$

这 1 s 内质点的位移为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=3\boldsymbol{i}+4.5\boldsymbol{j}\ \mathrm{m}.$$

(3) 因 $t=0$，$t=4$ 的位置矢量分别为

$$\boldsymbol{r}_0=5\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{r}_4=17\boldsymbol{i}+16\boldsymbol{j},$$

所以平均速度为

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{r}_4-\boldsymbol{r}_0}{4-0}=\frac{12\boldsymbol{i}+20\boldsymbol{j}}{4}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

(4)根据速度定义式有

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=3\boldsymbol{i}+(t+3)\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},$$

则 $t=4$ s 时的速度为

$$\boldsymbol{v}_4=3\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

(5)因 $t=0$，$t=4$ 的速度分别为

$$\boldsymbol{v}_0=3\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{v}_4=3\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j},$$

所以平均加速度为

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{v}_4-\boldsymbol{v}_0}{4}=\frac{4\boldsymbol{j}}{4}=1\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

(6)根据加速度定义式有

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=1\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}},$$

由此可见，该质点的加速度沿 y 方向，且为恒量.

§ 1.3 曲线运动的描述

一、一般的平面曲线运动　切向加速度　法向加速度

质点作曲线运动时，$\Delta\boldsymbol{v}$ 的方向和 $\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$ 的极限方向一般不同于速

度$\boldsymbol{v}$ 的方向，而且在曲线运动中，加速度的方向总是指向曲线凹进的一边；如果速率是减小的($|\boldsymbol{v}_B|<|\boldsymbol{v}_A|$)，则 $\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{v}$ 的方向夹角为钝角；如果速率是增大的($|\boldsymbol{v}_B|>|\boldsymbol{v}_A|$)，则 $\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{v}$ 的方向夹角为锐角；如果速率不变($|\boldsymbol{v}_B|=|\boldsymbol{v}_A|$)，则 $\boldsymbol{a}$ 与$\boldsymbol{v}$ 的方向夹角为直角，如图 1－7 所示.

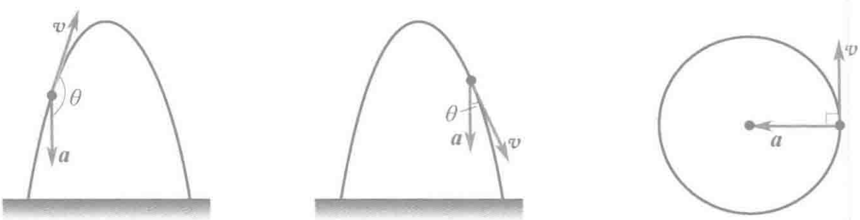


图 1－7　曲线运动中的加速度

为运算方便起见，常采用平面自然坐标系予以讨论. 即将加速度沿着质点所处轨道的切线方向和法线方向进行分解，这样得到的加速度分量分别叫作**切向加速度**和**法向加速度**.

设质点的运动轨道如图 1－8(a)所示，t 时刻质点在 P_1 点，速度为$\boldsymbol{v}_1$；$t+\Delta t$ 时刻质点运动到 P_2 点，速度为$\boldsymbol{v}_2$，P_1，P_2 两点邻切角为 $\Delta\theta$，在 Δt 时间内，速度增量为 $\Delta\boldsymbol{v}$. 图 1－8(b)表示$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\Delta\boldsymbol{v}$ 三者之间的关系，图中 $\Delta\boldsymbol{v}$ 就是矢量$\overrightarrow{BC}$. 如果在$\overrightarrow{AC}$上截取$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}|=|\boldsymbol{v}_1|$，则剩下的部分

$$|\overrightarrow{DC}|=|\overrightarrow{AC}|-|\overrightarrow{AB}|=|\boldsymbol{v}_2|-|\boldsymbol{v}_1|=|\Delta\boldsymbol{v}_\tau|=\Delta v,$$

即

$$|\Delta\boldsymbol{v}_\tau|=\Delta v,$$

反映了速度模的增量. 连接BD，并记作 $\Delta\boldsymbol{v}_n$，其反映了速度方向的增量. 于是速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 所包含的速度大小的增量和速度方向的增量这两个方面的含义，通过 $\Delta\boldsymbol{v}_\tau$ 和 $\Delta\boldsymbol{v}_n$ 得到了定量的描述，即 $\Delta\boldsymbol{v}=\Delta\boldsymbol{v}_\tau+\Delta\boldsymbol{v}_n$.

由图 1－8(c)可看出，当 $\Delta t\to 0$ 时，$\Delta\theta\to 0$，则$\angle ABD\to\frac{\pi}{2}$，即在极限条件下，$\Delta\boldsymbol{v}_n$的方向垂直于过 P_1 点的切线，亦即沿曲线在 P_1 点的法线方向；同时，在 $\Delta\theta\to 0$ 的极限条件下$\Delta\boldsymbol{v}_\tau$就是$\boldsymbol{v}_1$的方向，亦即沿曲线在 P_1 点的切向方向.

由图 1－8(c)还可看出，$\Delta\theta\to 0$ 时，$|\Delta\boldsymbol{v}_n|=v\Delta\theta$. 如果以 $\boldsymbol{n}_0$ 表示 P_1 点内法线方向的单位矢量，以 $\boldsymbol{\tau}_0$ 表示 P_1 点切线方向(且指向质点前进方向)的单位矢量，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}_\tau}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}_n}{\Delta t}\\&=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}_0+v\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{n}_0,\end{aligned}\tag{1-21}$$

式中 $\boldsymbol{\tau}_0$，$\boldsymbol{n}_0$ 为切向和法向的单位矢量. 由于$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v\frac{1}{\rho}$，式中 $\rho=$

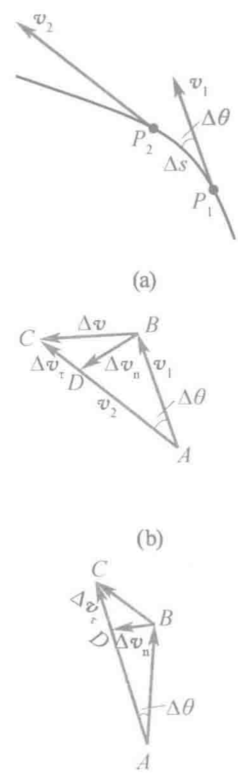


图 1－8　切向加速度与法向加速度

$\frac{ds}{d\theta}$为过 P_1 点的曲率圆的曲率半径，则(1-21)式可写为

$$\boldsymbol{a}=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}_0+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}_0=\boldsymbol{a}_\tau+\boldsymbol{a}_n, \tag{1-22}$$

式中 $\boldsymbol{a}_\tau=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}_0$，$\boldsymbol{a}_n=\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}_0$ 即为加速度的切向分量和法向分量. $a_\tau=\frac{dv}{dt}$，反映速度大小的变化率；$a_n=\frac{v^2}{\rho}$，反映速度方向的变化率. 加速度的模为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}. \tag{1-23}$$

例 1-3 以速度$\boldsymbol{v}_0$平抛一小球，不计空气阻力，求 t 时刻小球的切向加速度量值 a_τ，法向加速度量值 a_n.

解 由图 1-9 可知

$$a_\tau=g\sin\theta=g\frac{v_y}{v}=g\frac{gt}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}$$

$$=\frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}};$$

$$a_n=g\cos\theta=g\frac{v_x}{v}=\frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}.$$

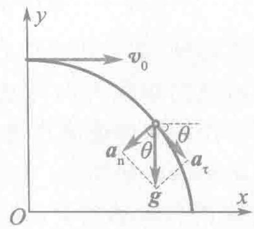


图 1-9

二、圆周运动　角速度　角加速度

质点作圆周运动时，由于其轨道的曲率半径处处相等，而速度方向始终在圆周的切线上，因此对圆周运动的描述，常常采用以平面自然坐标系为基础的线量描述和以平面极坐标系为基础的角量描述，现分别进行简单介绍.

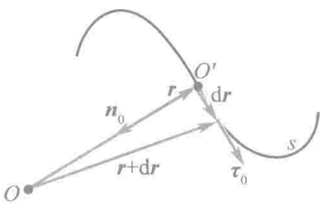


图 1-10　用自然坐标表示质点的位置

在自然坐标系中，位矢 $\boldsymbol{r}$ 是自然坐标 s 的函数，即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s).$$

如图 1-10 所示，O'为自然坐标系原点，$\boldsymbol{\tau}_0$ 和 $\boldsymbol{n}_0$ 分别为切向单位矢量和法向单位矢量. 我们知道，$|d\boldsymbol{r}|=ds$，在自然坐标系中位移、速度可分别表示为

$$d\boldsymbol{r}=ds\boldsymbol{\tau}_0,\quad \boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{ds}{dt}\boldsymbol{\tau}_0=v\boldsymbol{\tau}_0. \tag{1-24}$$

根据(1-22)式，圆周运动中的切向加速度和法向加速度为

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}_\tau=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}_0=\frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{\tau}_0,\\ \boldsymbol{a}_n=\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}_0=\frac{v^2}{R}\boldsymbol{n}_0,\end{cases} \tag{1-25}$$

式中 R 是圆半径. 于是，所谓匀速圆周运动，就是指切向加速度为零的圆周运动，即匀速率圆周运动.

如果以圆心为**极点**,任引一条射线为**极轴**,那么质点位置对极点的矢径 $\boldsymbol{r}$ 与极轴的夹角 θ 就叫作质点的**角位置**,用 $\Delta\theta$ 表示位矢在 Δt 时间内转过的**角位移**. 角位移既有大小又有方向,其方向的规定为:用右手四指表示质点的旋转方向,与四指垂直的大拇指指向则表示角位移的方向,即角位移的方向是按右手螺旋法则规定的. 在图 1-11 中,质点逆时针转动,这时角位移的方向垂直于纸面向外. 但可以证明,有限大小的角位移不是矢量(因为其合成不服从交换律),只有在 $\Delta t\to 0$ 时的角位移才是矢量. 质点作圆周运动时,其角位移只有两种可能的方向,因此,我们也可以在标量前冠以正、负号来表示角位移的方向. 如果我们过圆心作一垂直于圆面的直线,任选一个方向规定为坐标轴的正方向,则由上述规定的角位移,其方向与坐标轴正向相同则为正号,反之则为负号. 在国际单位制中,角位移的单位是弧度(rad).

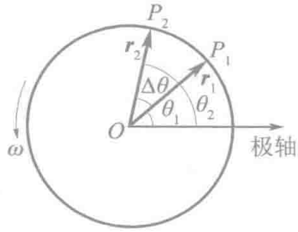


图 1-11 角位移

如前述引进速度和加速度的方法一样,我们也可以引进**角速度**和**角加速度**,即

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t},\tag{1-26}$$

$$\alpha=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}.\tag{1-27}$$

在国际单位制中,角速度的单位是弧度每秒(rad/s),角加速度的单位是弧度每二次方秒(rad/s^2).

当质点作圆周运动时,R=常数,只有角位置是 t 的函数,这样只需一个坐标(即角位置 θ)就可描述质点的位置. 这和质点的直线运动颇有些类似. 因此,我们也可比照匀变速直线运动的方法建立起描述匀角加速圆周运动的公式,即在匀角加速圆周运动中有

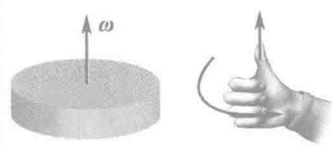


图 1-12 角速度方向

$$\begin{cases}\omega=\omega_0+\alpha t,\\ \theta=\theta_0+\omega_0 t+\dfrac{1}{2}\alpha t^2,\\ \omega^2-\omega_0^2=2\alpha(\theta-\theta_0).\end{cases}\tag{1-28}$$

不难证明,在圆周运动中,线量和角量之间存在如下关系,即

$$\begin{cases}\mathrm{d}s=R\mathrm{d}\theta,\\ v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=R\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=R\omega,\\ a_\tau=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=R\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=R\alpha,\\ a_\mathrm{n}=\dfrac{v^2}{R}=R\omega^2.\end{cases}\tag{1-29}$$

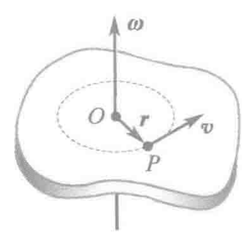


图 1-13 角速度矢量与线速度矢量的关系

角速度的方向就是角位移矢量的方向,如图 1-12 所示. 按照矢量的矢积法则,角速度矢量与线速度矢量之间的关系为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r},$$

如图 1-13 所示.

例 1-4 一小球作匀减速圆周运动，初始转速 $n=1\,500\ \mathrm{r\cdot min^{-1}}$，经 $t=50$ s 后静止.(1)求角加速度 α 和从开始到静止小球的转数 N；(2)求 $t=25$ s 时小球的角速度 ω；(3)设圆半径 $R=1$ m，求 $t=25$ s 时小球的速度和加速度.

解 (1)由题知 $\omega_0=2\pi n=2\pi\times\dfrac{1\,500}{60}=50\pi\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$，当 $t=50$ s 时，$\omega=0$，故由(1-28)式可得

$$\alpha=\frac{\omega-\omega_0}{t}=\frac{-50\pi}{50}=-\pi(\mathrm{rad\cdot s^{-1}})=-3.14\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}.$$

从开始到静止，小球的角位移及转数分别为

$$\theta-\theta_0=\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2=50\pi\times 50-\frac{\pi}{2}\times(50)^2(\mathrm{rad})=1\,250\pi\ \mathrm{rad},$$

$$N=\frac{1\,250\pi}{2\pi}=625\ \mathrm{r}.$$

(2)$t=25$ s 时小球的角速度为

$$\omega=\omega_0+\alpha t=50\pi-25\pi(\mathrm{rad\cdot s^{-1}})=25\pi\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}.$$

(3)$t=25$ s 时小球的速度为

$$v=R\omega=1\times 25\pi=78.5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

相应的切向加速度和法向加速度分别为

$$a_\tau=R\alpha=-\pi\ (\mathrm{m\cdot s^{-2}})=-3.14\ \mathrm{m\cdot s^{-2}},$$

$$a_n=R\omega^2=1\times(25\pi)^2(\mathrm{m\cdot s^{-2}})=6.16\times 10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

例 1-5 如图 1-14 所示，一飞机在高空点 A 时的水平速度为 1 940 km/h，沿近似于圆弧的曲线俯冲到点 B，其速度为 2 192 km/h，所经历的时间为 3 s.设 A 到 B 的圆弧的半径约为 3.5 km，且飞机从 A 到 B 的俯冲过程可视为匀变速率圆周运动.若不计重力加速度的影响，求：(1)飞机在 B 点的加速度；(2)飞机由点 A 到达点 B 所经历的路程.

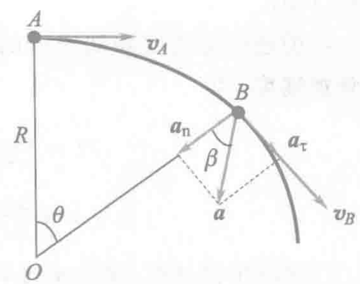


图 1-14

解 由已知，$v_A=1\,940$ km/h$=539$ m/s；$v_B=2\,192$ km/h$=609$ m/s；$R=3\,500$ m；$t=3$ s.

(1)飞机在 B 点的加速度

法向加速度：$a_n=\dfrac{v_B^2}{R}=\dfrac{609^2}{3\,500}$ m/s$=106$ m/s²；

切向加速度：由题意 $a_\tau=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

$$\int_{v_A}^{v_B}\mathrm{d}v=\int_0^t a_\tau\mathrm{d}t,$$

得 $a_\tau=\dfrac{v_B-v_A}{t}=\dfrac{609-539}{3}\ (\mathrm{m/s^2})=23.3\ \mathrm{m/s^2}$.

B 点加速度：

$$a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}=\sqrt{106^2+23.3^2}\ (\mathrm{m/s^2})=109\ \mathrm{m/s^2}.$$

$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}_n$ 的夹角 $\beta=\arctan\dfrac{a_\tau}{a_n}=12.4°$.

(2)飞机由点 A 到达点 B 所经历的路程

因飞机沿圆弧的运动是初速为 v_A、加速度为 a_τ 的匀加速率圆周运动，故飞机由点 A 到点 B 所经历的路程为

$$s=v_At+\frac{1}{2}a_\tau t^2=539\times 3\ m+\frac{1}{2}\times 23.3\times 3^2\ m=1\,722\ m.$$

§1.4 运动学中的两类问题

一、由已知的运动方程求速度和加速度，这类问题主要是运用求导的方法

例 1-6 已知一质点的运动方程为 $\boldsymbol{r}=3t\boldsymbol{i}-4t^2\boldsymbol{j}$，式中 $\boldsymbol{r}$ 以 m 计，t 以 s 计，求质点运动的轨道方程、速度和加速度.

解　将运动方程写成分量式

$$x = 3t,\quad y = -4t^2.$$

消去参变量 t 得轨道方程：$4x^2 + 9y = 0$，这是一条顶点在原点的抛物线，如图 1-15所示.

由速度定义得

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = 3\boldsymbol{i} - 8t\boldsymbol{j},$$

其模为 $v = \sqrt{3^2 + (8t)^2}$，与 x 轴的夹角 $\theta = \arctan\dfrac{-8t}{3}$.

由加速度的定义得

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -8\boldsymbol{j},$$

即加速度的方向沿 y 轴负方向，大小为 $8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

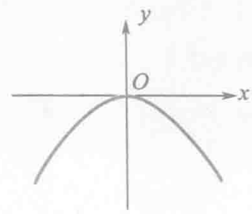


图 1-15

例 1-7　一质点沿半径为 1 m 的圆周运动，它通过的弧长 s 按 $s = t + 2t^2$ 的规律变化. 问它在 2 s 末的速率、切向加速度和法向加速度各是多少？

解　由速率定义，有

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 1 + 4t.$$

将 $t = 2$ s 代入上式，得 2 s 末的速率为

$$v = 1 + 4\times 2(\mathrm{m\cdot s^{-1}}) = 9\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},$$

其法向加速度为

$$a_n = \frac{v^2}{R} = 81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

由切向加速度的定义，得 $a_\tau = \dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = 4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$，为一常数，则 2 s 末的切向加速度为 $4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

二、已知加速度和初始条件，求速度和运动方程，求解这类问题要用积分的方法

例 1-8　一质点沿 x 轴运动，其加速度 $a = -kv^2$，式中 k 为正常数. 设 $t = 0$ 时，$x = 0$，$v = v_0$，求 v 和 x 作为 t 的函数的表示式.

解　因为 $\mathrm{d}v = a\mathrm{d}t = -kv^2\mathrm{d}t$，分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}v}{v^2} = -k\mathrm{d}t,$$

积分得

$$kt = \frac{1}{v} + c_1.$$

因为 $t = 0$ 时，$v = v_0$，所以 $c_1 = -\dfrac{1}{v_0}$，代入上式，并整理得

$$v = \frac{v_0}{1 + v_0 kt}.$$

再由 $\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t$，将 v 的表示式代入，并取积分得

$$x = \int \frac{v_0\,\mathrm{d}t}{1 + v_0 kt} + c_2 = \frac{1}{k}\ln(1 + kv_0 t) + c_2.$$

因为 $t = 0$ 时，$x = 0$，所以 $c_2 = 0$，于是

$$x = \frac{1}{k}\ln(1 + kv_0 t).$$

例 1-9　一质点从静止开始作圆周运动，角加速度 $\alpha = (2 + 3t)\ \mathrm{rad/s^2}$，圆周半径 $R = 10$ cm. 求：(1)质点的角速度；(2)$t = 2$ s 时质点的法向加速度、切向加速度和总加速度的大小.

解 (1)质点的角速度

由 $\alpha=\dfrac{d\omega}{dt}$ 有 $\int_0^\omega d\omega=\int_0^t \alpha dt$ 得

$$\omega=\int_0^t \alpha dt=\int_0^t (2+3t)dt=\left(2t+\frac{3}{2}t^2\right)\ \text{rad/s}.$$

(2)$t=2$ s 时角速度

$$\omega=2t+\frac{3}{2}t^2=10\ \text{rad/s}.$$

法向加速度 $a_n=\omega^2 R=10\ \text{m/s}^2$.

$t=2$ s 时,角加速度

$$\alpha=2+3t=8\ \text{rad/s}^2.$$

切向加速度 $a_\tau=\alpha R=0.8\ \text{rad/s}^2$.

总加速度的大小

$$a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}=\sqrt{(10)^2+(0.8)^2}\ (\text{m/s}^2)=10.03\ \text{m/s}^2.$$

*§1.5 相对运动

在§1.1中曾指出,由于选取不同的参考系,对同一物体运动的描述就会不同,这反映了运动描述的相对性.下面我们研究同一质点在有相对运动的两个参考系中的位矢、速度和加速度之间的关系.

当我们研究大轮船上物体的运动时,一方面既要知道该物体对于河岸的运动,另一方面又要知道该物体相对于轮船的运动.为此,我们就把河岸(即地球)定义为静止参考系,而把轮船定义为运动参考系.但是,当我们研究宇宙飞船的发射时,则只能把太阳作为静止参考系而把地球作为运动参考系.这就是说,**"静止参考系"、"运动参考系"的称谓都是相对的**.在一般情况下,研究地面上物体的运动,把地球作为静止参考系比较方便.

当我们定义了静止参考系后,对于一个处于运动参考系中的物体,我们就把它相对于静止参考系的运动称为**绝对运动**,把运动参考系相对于静止参考系的运动称为**牵连运动**,把物体相对于运动参考系的运动称为**相对运动**.显然,这些称谓也是相对的.

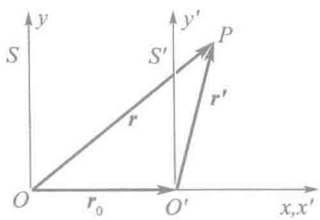


图1-16 运动描述的相对性

如图1-16所示,设 S 为静止参考系,S' 为运动参考系.为简单计,假定相应坐标轴保持相互平行,S' 相对于 S 沿 x 轴作直线运动.这时两参考系间的相对运动情况,可用 S' 系的坐标原点 O' 相对于 S 系的坐标原点 O 的运动来代表.设有一质点位于 S' 中的 P 点,它对 S 的位矢为 $\boldsymbol{r}$(即为绝对位矢),对 S' 的位矢为 $\boldsymbol{r}'$(即为相对位矢),而 O' 点对 O 点的位矢为 $\boldsymbol{r}_0$(即为牵连位矢).由矢量加法的三角形法则可知,$\boldsymbol{r}$,$\boldsymbol{r}'$,$\boldsymbol{r}_0$ 之间有如下关系

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}', \tag{1-30}$$

即绝对位矢等于牵连位矢与相对位矢的矢量和.

将(1-30)式两边对时间求导,即可得

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}', \tag{1-31}$$

式中 $\boldsymbol{v}$ 为**绝对速度**,$\boldsymbol{v}_0$ 为**牵连速度**,$\boldsymbol{v}'$ 为**相对速度**.

将(1-31)式两边对时间再次求导,可得

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{a}', \tag{1-32}$$

式中 $\boldsymbol{a}$ 为**绝对加速度**,$\boldsymbol{a}_0$ 为**牵连加速度**,$\boldsymbol{a}'$ 为**相对加速度**.

需要说明的是(1-30)、(1-31)、(1-32)三式所表示的位矢、速度和加速度的合成法则,只有物体的运动速度远小于光速时才成立.当物体的运动速度可与光速相比时,上述三式不再成立,此时遵循的是相对论时空坐标、速度和加速度的变换法则.另外当两个参考系之间还有相对转动时,速度和加速度之间的关系要复杂得多,此处就不作讨论了.

当讨论处于同一参考系内质点系中各质点间的相对运动时，可以利用以上结论表示质点间的相对位矢和相对速度.

设某质点系由 A，B 两质点组成. 它们对某一参考系的位矢分别为 $\boldsymbol{r}_A$ 和 $\boldsymbol{r}_B$，如图 1-17 所示. 质点系内 B 质点对 A 质点的位矢显然是由 A 引向 B 的矢量 $\boldsymbol{r}_{BA}$. 由图可知，用矢量减法的三角形法则，则有

$$\boldsymbol{r}_{BA} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A, \tag{1-33}$$

$\boldsymbol{r}_{BA}$ 称为 B 对 A 的相对位矢.

将(1-33)式对时间求一阶导数，可得 B 对 A 的相对速度

$$\boldsymbol{v}_{BA} = \boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A. \tag{1-34}$$

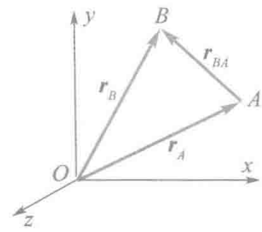


图 1-17 相对位矢

例 1-10 如图 1-18(a)所示，河宽为 L，河水以恒定速度 $\boldsymbol{u}$ 流动，岸边有 A，B 两码头，A，B 连线与岸边垂直，码头 A 处有船相对于水以恒定速率 v_0 开动. 证明：船在 A，B 两码头间往返一次所需时间为

$$t = \frac{\dfrac{2L}{v_0}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{u}{v_0}\right)^2}}$$

(船换向时间不计).

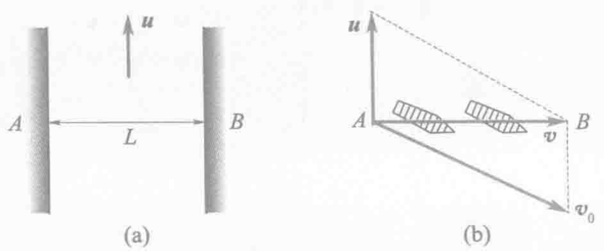


图 1-18

解 设船相对于岸边的速度(绝对速度)为 $\boldsymbol{v}$，由题知，$\boldsymbol{v}$ 的方向必须指向 AB 连线，此时河水流速 $\boldsymbol{u}$ 为牵连速度，船对水的速度 $\boldsymbol{v}_0$ 为相对速度，于是有

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}_0.$$

据此作出矢量图 1-18(b)，知

$$v = \sqrt{v_0^2 - u^2}.$$

读者自己可证当船由 B 返回 A 时，船对岸的速度的模亦由上式给出. 因为在 AB 两码头往返一次的路程为 $2L$，故所需时间为

$$t = \frac{2L}{v} = \frac{2L}{\sqrt{v_0^2 - u^2}} = \frac{\dfrac{2L}{v_0}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{u}{v_0}\right)^2}}.$$

讨论：(1)若 $u=0$，即河水静止，则 $t=\dfrac{2L}{v_0}$，这是显然的.

(2)若 $u=v_0$，即河水流速 u 等于船对水的速率 v_0，则 $t\to\infty$，即船由码头 A(或 B)出发后就永远不能再回到原出发点了.

(3)若 $u>v_0$，则 t 为一虚数，这是没有物理意义的，即船不能在 A，B 间往返.

综合上述讨论可知，船在 A，B 间往返的必要条件是

$$v_0 > u.$$

习题 1

1. 选择题

(1)一运动质点在某瞬时位于矢径 $\boldsymbol{r}(x,y)$ 的端点处,其速度大小为(　　).

(A)$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$　　(B)$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$

(C)$\dfrac{\mathrm{d}|\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}$　　(D)$\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$

(2)一质点作直线运动,某时刻的瞬时速度 $v=2$ m/s,瞬时加速度 $a=-2$ m/s^2,则 1 s 后质点的速度(　　).

(A)等于零　　(B)等于-2 m/s

(C)等于 2 m/s　　(D)不能确定

(3)一质点沿半径为 R 的圆周作匀速率运动,每 t 时间转一圈,在 $2t$ 时间间隔中,其平均速度大小和平均速率大小分别为(　　).

(A)$\dfrac{2\pi R}{t},\dfrac{2\pi R}{t}$　　(B)$0,\dfrac{2\pi R}{t}$

(C)$0,0$　　(D)$\dfrac{2\pi R}{t},0$

(4)质点作曲线运动,$\boldsymbol{r}$ 表示位置矢量,$\boldsymbol{v}$ 表示速度,$\boldsymbol{a}$ 表示加速度,s 表示路程,a_τ 表示切向加速度,下列表达式中,(　　).

① $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=a$,　　② $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t=v$,

③ $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t=v$,　　④ $|\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t|=a_\tau$.

(A)只有①、④是对的　　(B)只有②、④是对的

(C)只有②是对的　　(D)只有③是对的

(5)一质点在平面上作一般曲线运动,其瞬时速度为$\boldsymbol{v}$,瞬时速率为 v,某一时间内的平均速度为$\bar{\boldsymbol{v}}$,平均速率为 $\bar{v}$,它们之间的关系必定有(　　).

(A)$|\boldsymbol{v}|=v,|\bar{\boldsymbol{v}}|=\bar{v}$　　(B)$|\boldsymbol{v}|\neq v,|\bar{\boldsymbol{v}}|=\bar{v}$

(C)$|\boldsymbol{v}|\neq v,|\bar{\boldsymbol{v}}|\neq\bar{v}$　　(D)$|\boldsymbol{v}|=v,|\bar{\boldsymbol{v}}|\neq\bar{v}$

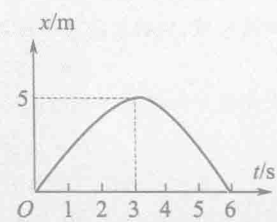
2. 填空题

(1)一质点,以 $\pi\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的匀速率作半径为 5 m 的圆周运动,则该质点在 5 s 内,位移的大小是________;经过的路程是________.

(2)一质点沿 x 方向运动,其加速度随时间的变化关系为 $a=3+2t$ (SI),如果初始时刻质点的速度 v_0 为 $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$,则当 t 为 3 s 时,质点的速度 $v=$________.

(3)一质点从静止出发沿半径 $R=1$ m 的圆周运动,其角加速度随时间 t 的变化规律是 $\alpha=12t^2-6t$ (SI),则质点的角速度 $\omega=$________;切向加速度 $a_\tau=$________.

(4)一质点作直线运动,其坐标 x 与时间 t 的关系曲线如题1.2(4)图所示.则该质点在第________秒瞬时速度为零;在第________秒至第________秒间速度与加速度同方向.



题 1.2(4)图

(5)一质点其速率表示式为 $v=1+s^2$,则在任一位置处其切向加速度 a_τ 为________.

3. 解答题

1.3.1　下面几个质点运动学方程,哪个是匀变速直线运动?

(1)$x=4t-3$;(2)$x=-4t^3+3t^2+6$;

(3)$x=-2t^2+8t+4$;(4)$x=2/t^2-4/t$.

给出这个匀变速直线运动在 $t=3$ s 时的速度和加速度,并说明该时刻运动是加速的还是减速的.(x 单位为 m,t 单位为 s)

1.3.2　在以下几种运动中,质点的切向加速度、

法向加速度以及加速度哪些为零？哪些不为零？

(1)匀速直线运动；(2) 匀速曲线运动；(3) 变速直线运动；(4) 变速曲线运动.

1.3.3　一质点沿 x 轴作直线运动，t 时刻的坐标为 $x=4.5t^2-2t^3$(SI). 试求：(1)第 2 s 内的平均速度；(2)第 2 s 末的瞬时速度；(3) 第 2 s 内的路程.

1.3.4　两辆车 A 和 B，在笔直的公路上同向行使，它们在同一起始线上同时出发，并且由出发点开始计时，行使的距离 x(m)与行使的时间 t(s)的函数关系式：A 为 $x_A=4t+t^2$，B 为 $x_B=2t^2+2t^3$，则它们刚离开出发点时，行使在前面的一辆车是哪辆车？并分别求出出发后两辆车行使距离相同的时刻和出发后 B 车相对 A 车速度为零的时刻？

1.3.5　质点 P 在水平面内沿一半径为 $R=2$ m 的圆轨道转动. 转动的角速度与时间 t 的函数关系为 $\omega=kt^2$(k 为常量). 已知 $t=2$ s 时，质点 P 的速度值为 32 m/s. 试求 $t=1$ s 时，质点 P 的速度与加速度的大小.

1.3.6　一石头从空中由静止下落，由于空气阻力，石头并非作自由落体运动. 现已知加速度 $a=A-Bv$，式中 A、B 为常量. 试求石头的速度随时间的变化关系.

1.3.7　质点沿 x 轴运动，其加速度和位置的关系为 $a=2+6x^2$，a 的单位为 $m\cdot s^{-2}$，x 的单位为 m. 质点在 $x=0$ 处，速度为 $10\ m\cdot s^{-1}$，试求质点在任何坐标处的速度值.

1.3.8　已知一质点作直线运动，其加速度为 $a=4+3t$ $(m\cdot s^{-2})$，开始运动时，$x=5$ m，$v=0$，求该质点在 $t=10$ s 时的速度和位置.

1.3.9　一质点沿半径为 1 m 的圆周运动，运动方程为 $\theta=2+3t^3$，式中 θ 以 rad 计，t 以 s 计，求：(1) $t=2$ s 时，质点的切向和法向加速度；(2)当加速度的方向和半径成 45°角时，其角位移是多少？

1.3.10　质点沿半径为 R 的圆周按 $s=v_0t-\frac{1}{2}bt^2$ 的规律运动，式中 s 为质点离圆周上某点的弧长，v_0，b 都是常量，求：(1) t 时刻质点的加速度；(2) t 为何值时，加速度在数值上等于 b.

1.3.11　一质点在半径为 0.4 m 的圆形轨道上自静止开始作匀角加速转动，其角加速度为 $\alpha=0.2\ rad\cdot s^{-2}$，求 $t=2$ s 时质点的速度、法向加速度、切向加速度和合加速度.

*1.3.12　一船以速率 $v_1=30\ km\cdot h^{-1}$ 沿直线向东行驶，另一小艇在其前方以速率 $v_2=40\ km\cdot h^{-1}$ 沿直线向北行驶，问在船上看小艇的速度为多少？在艇上看船的速度又为多少？